SVEUČILIŠTE U RIJECI
FILOZOFSKI FAKULTET

Saša Popović

KRITIČKO PREISPITIVANJE POVIJESTI RECEPCIJE VERONESEOVE NEARHIMEDOVSKE GEOMETRIJE. PRILOG POVIJESTI I FILOZOFIJI NEARHIMEDOVSKE MATEMATIKE

DOKTORSKI RAD

Rijeka, 2026.

SVEUČILIŠTE U RIJECI
FILOZOFSKI FAKULTET

Saša Popović

KRITIČKO PREISPITIVANJE POVIJESTI RECEPCIJE VERONESEOVE NEARHIMEDOVSKE GEOMETRIJE. PRILOG POVIJESTI I FILOZOFIJI NEARHIMEDOVSKE MATEMATIKE

DOKTORSKI RAD

Mentor: dr. sc. Nenad Smokrović, profesor emeritus
Komentor: prof. dr. sc. Majda Trobok

Rijeka, 2026.

UNIVERSITY OF RIJEKA
FACULTY OF HUMANITIES AND SOCIAL SCIENCES

Saša Popović

CRITICAL RE-EVALUATION OF THE RECEPTION HISTORY OF VERONESE'S NON-ARCHIMEDEAN GEOMETRY: A CONTRIBUTION TO THE HISTORY AND PHILOSOPHY OF NON-ARCHIMEDEAN MATHEMATICS

DOCTORAL THESIS

Supervisor: Professor Emeritus Nenad Smokrović, PhD
Co-supervisor: Professor Majda Trobok, PhD

Rijeka, 2026.

Mentor doktorskog rada: dr. sc. Nenad Smorković, profesor emeritus

Komentor doktorskog rada: prof. dr. sc. Majda Trobok

Doktorski rad obranjen je dana _____ u/na _____ _____ pred povjerenstvom u sastavu:

1. Prof. dr. sc. Boran Berčić, Filozofski fakultet Sveučilišta u Rijeci;
2. Prof. dr. sc. Tajana Ban-Kirigin, Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci;
3. Doc. dr. sc. Andrej Jandrić, Filozofski fakultet Univerziteta u Beogradu.

ZAHVALE

ἐλπίδες αἱ [μεν] τῶν ὀρθὰ φρονεόντων ἐφικταί,
αἱ δὲ τῶν ἀξυνέτων ἀδύνατοι.

Demokrit, DK 68 B 8

Povijest nastanka ove disertacije, premda razmjerno kratka, zamršena je i donekle neobična. S jedne strane, disertacija je plod dugogodišnje intenzivne suradnje filozofa iz Beograda i Rijeke, a s druge filozofa i matematičara s Filozofskog fakulteta u Beogradu i iz Matematičkog instituta SANU. Naime, doktorski studij započeo sam u Beogradu, a završavam ga u Rijeci. Isto tako, rad na disertaciji započeo sam kao asistent na Filozofskom fakultetu, a dovršio ga kao asistent u Matematičkom institutu SANU.

Tijekom istraživanja koje je rezultiralo ovom disertacijom cijelo sam vrijeme mogao računati na bezuvjetnu potporu svojih riječkih i nekadašnjih beogradskih mentora, prof. Nenada Smokrovića, prof. Majde Trobok, prof. Miloša Arsenijevića i prof. Vladana Đorđevića. Ovim im putem zahvaljujem na svim korisnim savjetima, sugestijama i smjernicama. Posebnu zahvalnost dugujem prof. Arsenijeviću, koji je pratio i usmjeravao moj rad još od preddiplomskog studija i bez kojega se, po svoj prilici, ne bih bavio ni Veroneseom niti poviješću, filozofijom i zasnivanjem nearhimedovske matematike.

Osjećam se osobito privilegiranim što sam tijekom rada na disertaciji imao priliku surađivati s matematičarima, vodećim stručnjacima za teorije infinitezimala i nearhimedovsku matematiku. To mi je omogućilo doista jedinstveno znanstveno i radno ozračje koje se njeguje u Matematičkom institutu SANU, kao i poticajno okruženje za istraživanje, razmjenu ideja i prijenos znanja. Dok je disertacija još bila *in statu nascendi*, u više mi je navrata pružena prilika predstaviti dijelove teksta na seminarima Instituta, što mi je svaki put višestruko koristilo pri njezinu oblikovanju. Zahvaljujem prof. Žarku Mijajloviću, prof. Miodragu Raškoviću†, prof. Milanu Božiću i prof. Vesni Todorčević na pozivima da održim predavanja na njihovim seminarima. Također zahvaljujem prof. Slobodanu Vujoševiću, prof. Zvonimiru Šikiću i prof. Zoranu Lučiću na brojnim poticajnim razgovorima o povijesti i zasnivanju matematike. Posebnu zahvalnost dugujem prof. Silviji Ghilezan, voditeljici Sektora za matematiku MISANU, i prof. Zoranu Ognjanoviću, ravnatelju Matematičkog instituta SANU, na svesrdnoj potpori tijekom završne faze rada na disertaciji, kao i na pomoći pri ostvarivanju mojih istraživačkih boravaka u inozemstvu, koji su se pokazali neprocjenjivo vrijednima za ovo istraživanje. Prof. Ognjanoviću zahvaljujem i na pažljivom čitanju rukopisa disertacije te na brojnim iznimno korisnim primjedbama.

Želim zahvaliti i Međunarodnoj komisiji za povijest matematike pri Međunarodnoj matematičkoj uniji i Međunarodnoj uniji za povijest i filozofiju znanosti i tehnologije (ICHM–IMU/IUHPST, Berlin – Pariz) na potpori u okviru programa *ICHM Grants for International Research-Related Activity* (nekadašnji *Ivor Grattan-Guinness Research Grant*) za provedbu projekta „Critical Re-examination of the Reception History of Veronese's Non-Archimedean Geometry" (2024–2025). Zahvaljujem i Zakladi Sveučilišta u Rijeci na potpori za provedbu znanstveno-istraživačkih aktivnosti u okviru programa PROMETEJ (2022–2023), kao i Sveučilištu u Rijeci na financijskoj potpori u okviru projekta „Logičke osnove umjetne inteligencije" (uniri-iskusni-human-23-147, voditelj: prof. emer. N. Smokrović) (2024–2025). Također zahvaljujem Interuniverzitetskom centru u Dubrovniku na nekoliko stipendija iz programa *IUC South-East European Scholarship Fund*. Zahvaljujem i Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences u Cambridgeu (INI), Institut Henri Poincaré u Parizu (IHP) te International Centre for Mathematical Sciences u Edinburghu (ICMS) na stipendijama i financijskoj potpori koja mi je omogućila istraživačke boravke u tim ustanovama tijekom rada na doktoratu.

Rezultati predstavljeni u ovoj disertaciji izloženi su na nizu međunarodnih konferencija i specijalističkih radionica, među kojima se osobito ističu skupovi održani u Oxfordu (Mathematical Institute i Queen's College, University of Oxford, 2024.), Parizu (*Séminaire d'Histoire des Mathématiques de l'Institut Henri Poincaré*, Sorbonne Université/CNRS, 2024.), Cambridgeu (Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, University of Cambridge, 2025.) i Washingtonu (History of Mathematics Special Interest Group of the Mathematical Association of America – HOM SIGMAA, 2025.). Zahvaljujem organizatorima i sudionicima na raspravama, kritikama i prijedlozima za daljnju suradnju i zajednički znanstveno-istraživački rad.

Naposljetku, zahvaljujem svojoj mami Vesni i mojoj Aleksandri. Njima dvjema dugujem najveću moguću zahvalnost za razumijevanje i strpljenje, za bezrezervnu ljubav i potporu koju su mi uvijek pružale te za to što su mi u najvećoj mogućoj mjeri olakšale rad na disertaciji, oslobodivši me svakodnevnih briga i obveza. Mama me je, često uz gotovo nadljudske napore, oduvijek podupirala na sve moguće načine, ostvarujući i ono što se činilo nemogućim. Aleksandra je tijekom godina gotovo i nehotice postala stručnjakinja za Veronesea, na čemu sam joj osobito zahvalan. Bez nje ne samo provedba ovoga istraživanja nego ni njegovo privođenje kraju ne bi bilo ni približno tako jednostavno.

SAŽETAK

Primarni cilj ove disertacije jest kritički preispitati povijest recepcije nearhimedovske (infinitezimalne) geometrije koju je 1890-ih razvio talijanski matematičar Giuseppe Veronese (1854–1917) i, osobito, analizirati zapanjujuću asimetriju između početne i kasnijih faza recepcije Veroneseovih pionirskih rezultata o nezavisnosti Arhimedova aksioma te sustavno rekonstruirati sve relevantne čimbenike koji su pridonijeli svojevrsnom *damnatio memoriae* Veroneseovih doprinosa ne samo u suvremenoj historiografiji i filozofiji (nearhimedovske) matematike nego i u samoj matematici. U okviru interdisciplinarnog istraživanja provedenoga u ovoj disertaciji, utemeljenoga na dosad nepoznatoj tekstualnoj i arhivskoj građi, ponuđeno je novo tumačenje Veroneseove sveobuhvatne teorije, koja sadržava filozofski i matematički iznimno značajna i duboka promišljanja o (i) prirodi, podrijetlu, funkciji i logičko-epistemološkom statusu geometrijskih aksioma, (ii) metamatematičkim pitanjima poput nezavisnosti i neproturječnosti formalnih teorija te statusa njihovih modela, (iii) egzistenciji i ontološkom statusu matematičkih objekata, (iv) metodologiji matematike, (v) strukturi kontinuuma i (vi) statusu beskonačnosti i infinitezimala. Time je omogućeno adekvatno situiranje i vrednovanje Veroneseove nearhimedovske geometrije kao jedinstvene pojave u procesu modernizacijske transformacije matematike u razdoblju *fin-de-siècle*, kao i u historiografiji filozofije matematike. Pokazano je, naime, da usprkos nizu pogrešnih tumačenja i nerazumijevanja pojedinih ključnih aspekata Veroneseove teorije od strane vodećih matematičara i filozofa, osobito G. Cantora, G. Peana, B. Russella i H. Poincaréa, mnoge Veroneseove koncepcije, ideje i uvidi u bitnome prožimaju cjelokupni *Kontinuitätsprogramm* 20. stoljeća, pa tako i dvije najutjecajnije suvremene nearhimedovske teorije: nestandardnu analizu Abrahama Robinsona i teoriju apsolutnoga aritmetičkog kontinuuma Johna Conwaya i Philipa Ehrlicha.

Ključne riječi: Giuseppe Veronese; nearhimedovska geometrija; infinitezimali; beskonačni brojevi; apsolutni i relativni kontinuum; metamatematika; povijest, filozofija i zasnivanje matematike; povijest recepcije (*Rezeptionsgeschichte*).

Naučna oblast: Povijest, filozofija i zasnivanje matematike.

Mathematics Subject Classification – MSC 2020: 01-02, 01A55, 01A60, 01A90; 00A30, 03H05.

SUMMARY

The primary goal of this dissertation is a critical re-evaluation of the reception history of non-Archimedean (i.e., infinitesimal) geometry introduced by the Italian mathematician Giuseppe Veronese (1854–1917) in the 1890s and, in particular, an analysis of the striking asymmetry in the initial and final stages of the reception of Veronese's pioneering results concerning the independence of the Archimedean axiom, as well as a systematic reconstruction of all relevant factors that contributed to a peculiar *damnatio memoriae* of Veronese's contributions not only in the contemporary historiography and philosophy of (non-Archimedean) mathematics, but also in mathematics proper. Within the framework of the interdisciplinary research conducted in the dissertation and based on previously unknown textual and archival material, an innovative interpretation of Veronese's comprehensive theory is provided, which includes philosophically and mathematically significant and profound reflections (i) on the nature, origin, function and logico-epistemological status of geometrical axioms, (ii) on metamathematical issues such as the independence and consistency of formal theories and the status of their models, (iii) on the existence and the ontological status of mathematical objects, (iv) on the methodology of mathematics, (v) on the structure of the continuum and (vi) on the status of infinity and infinitesimals. This also enables an adequate situating and assessment of Veronese's non-Archimedean geometry as a unique phenomenon in the process of modernist transformation of mathematics in the *fin-de-siècle* period, as well as in the historiography of the philosophy of mathematics. Namely, it has been shown that despite a series of misconceptions and misinterpretations of some key aspects of Veronese's theory by leading mathematicians and philosophers (notably G. Cantor, G. Peano, B. Russell, and H. Poincaré), a series of notions, ideas and insights due to Veronese essentially permeate the entire twentieth-century *Kontinuitätsprogramm*, including the two most influential contemporary non-Archimedean theories, i.e., A. Robinson's Non-Standard Analysis and J. Conway's and P. Ehrlich's theory of the absolute arithmetic continuum.

Key words: Giuseppe Veronese; non-Archimedean geometry; infinitesimals; infinite numbers; absolute and relative continua; metamathematics; history, philosophy, and foundations of mathematics; reception history (*Rezeptionsgeschichte*).

Scientific field: History, philosophy, and foundations of mathematics.

Mathematics Subject Classification – MSC 2020: 01-02, 01A55, 01A60, 01A90; 00A30, 03H05.

SADRŽAJ

PRVI DIO **1**

[**1**] Uvod **1**

[**1.1**] O motivaciji i metodologiji: povijest i/ili filozofija matematike i filozofija povijesti matematike **7**

[**1.2**] Giuseppe Veronese – izvodi iz biografije, 1854–1889: školovanje, prvi matematički utjecaji i rani rezultati iz projektivne geometrije **18**

Dodatak A. O povijesnom značaju (nacionalnih) matematičkih škola, s posebnim osvrtom na rad „Talijanske matematičke škole“ **27**

[**1.3**] Rekonstrukcija šireg povijesno-filozofskog i matematičko-filozofskog konteksta: k modernizaciji matematike **35**

Dodatak B **54**

[**1.4**] O povijesti filozofije matematike: dvije tradicije **59**

DRUGI DIO **63**

[**2**] Uvod **63**

[**2.1**] Specifični interpretativni izazovi, Veroneseovi tumači i skica nove interpretativne strategije **65**

[**2.2**] Preliminarije **78**

[**2.3**] Paschova aksiomatika, logičko-filozofsko zasnivanje geometrije i spor s Peanom o statusu geometrije hiperprostora: uvođenje u Veroneseov program iz *Fondamenti* **79**

[**2.4**] Veroneseova aristotelovska filozofija geometrije iz *Fondamenti*: od prostorne intuicije k teoriji intuitivnoga kontinuuma **100**

[**2.4.1**] Cantorova poentilistička koncepcija kontinuuma **115**

[**2.5**] Od metageometrije k metamatematici: Veroneseov „savršeni prehilbertovski stil“ i status „modela“ u geometriji od 1870-ih do 1920-ih **128**

[**2.6**] Veronese o nezavisnosti Arhimedova aksioma: teorija apsolutnoga nearhimedovskog kontinuuma **150**

[**2.6.1**] Veroneseovo nearhimedovsko uređeno polje i Veroneseovi brojevi iz *Fondamenti* **163**

[**2.6.2**] Levi-Civitin model Veroneseova kontinuuma i Hilbertov model nearhimedovske geometrije **179**

[**2.6.3**] Aksiomi uređenoga polja i aksiomi neprekidnosti **189**

[**2.7**] Komparativni prikaz aksiomatizacije geometrije iz *Fondamenti* (1891) i iz *Elementi* (1897) **198**

Dodatak C. Leibnizova *analysis situs* i Veroneseov projekt zasnivanja geometrije **230**

TREĆI DIO **239**

[**3**] Pregled ključnih aspekata inicijalne faze recepcije Veroneseovih rezultata **239**

[**3.1**] Cantorov antiinfinitezimalizam i „dokaz" protiv mogućnosti infinitezimala **256**

Dodatak D. Tekst Cantorova „dokaza" protiv mogućnosti infinitezimala iz pisma Goldscheideru (13.5.1887.) / *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten* (1887) i iz pisma Weierstraßu (16.5.1887.) **269**

[**3.1.1**] *Esiste l'infinitesimo attuale?* Spor o ontološkom statusu infinitezimala, recepcija Cantorova „dokaza" u Italiji i Peanov kantorovski dokaz protiv mogućnosti infinitezimalnih dužina **273**

[**3.1.2**] Epilog spora o ontološkom statusu infinitezimala i infinitezimalnih dužina: nekoliko ilustrativnih primjera **293**

[**3.2**] Poincaréova dvostruka pogreška i njezine manifestacije u suvremenoj historiografiji matematike **305**

ČETVRTI DIO **320**

[**4**] Uvod: recepcija Veroneseovih ideja u suvremenoj nearhimedovskoj matematici **320**

[**4.1**] *Leibniz vindicatus*. Robinsonova nestandardna analiza (NSA) i teorija hiperrealnih brojeva **320**

[**4.2**] Conway-Ehrlichov apsolutni aritmetički kontinuum i teorija nadrealnih brojeva **339**

ZAKLJUČAK **353**

BIBLIOGRAFIJA **358**

POPIS GRAFIKONA, ILUSTRACIJA I SLIKA **405**

POPIS TABLICA **407**

APPENDIX. Novootkriveni Veroneseov rukopis (Cod. Ms. G. Cantor 29, № 1) [1890] **408**

Čitatelji će ovdje moći pronaći prikaz Veroneseove teorije koja je, čini se, u filozofskim krugovima ostala gotovo nepoznata, premda zaslužuje ozbiljno razmatranje.

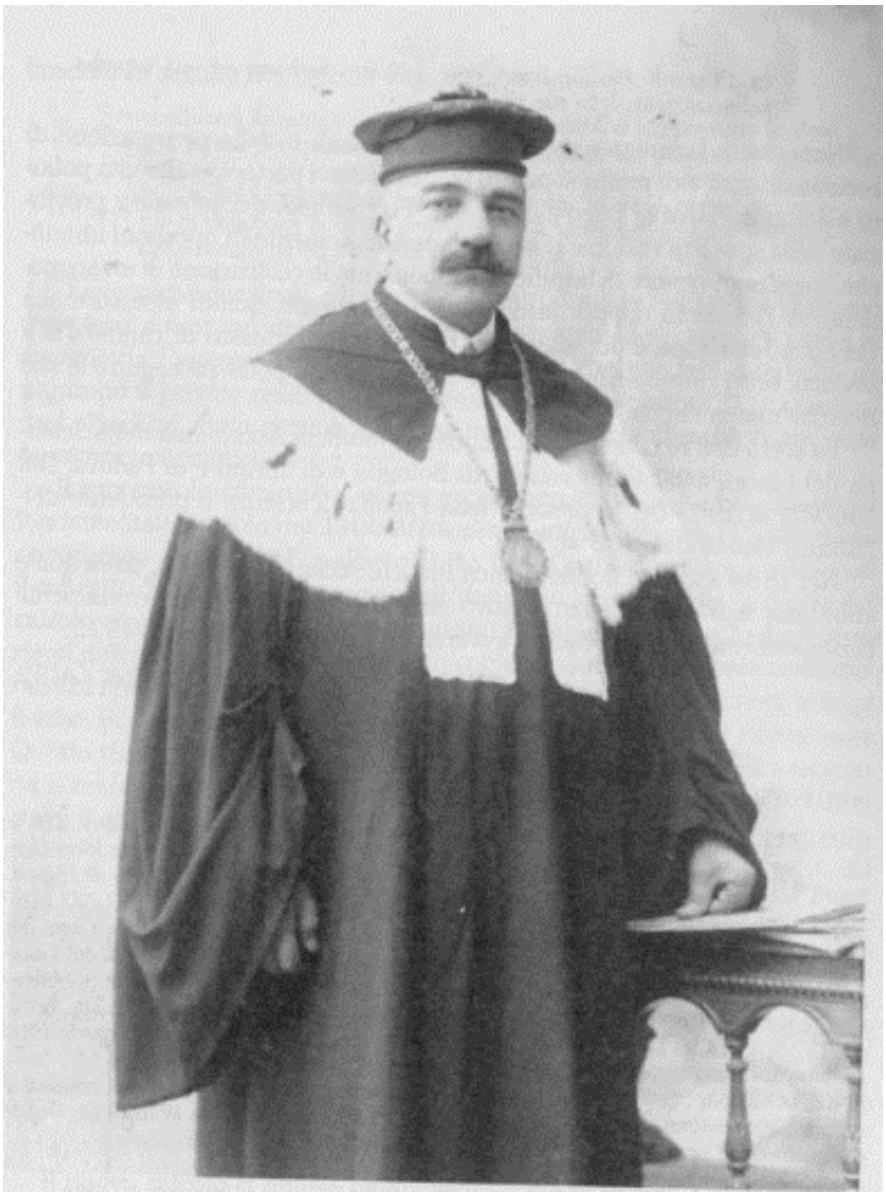
(B. Petronijević, Selbstanzeige: *Die Typischen Geometrien und das Unendliche*, *Kant Studien*, 1908)

Bez filozofije kao vodiča povijest matematike postala je *slijepa*, dok je filozofija matematike, okrenuvši leđa većini intrigantnih pojava u povijesti matematike, postala *prazna*.

(I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, 1976)

Može se reći da nema istinskoga filozofa koji se nije s velikim zanimanjem bavio matematičkim idejama i koji se nije pozivao na matematičke rezultate kako bi potkrijepio svoja razmatranja.

(G. Veronese, *Fondamenti di geometria*, 1891)



Giuseppe Veronese (1854–1917)

(Preuzeto iz: *Professori di materie scientifiche all'Università di Padova nell'Ottocento*, ur. S. Cassellato i L. Pigatto, Trieste: LINT, 1996)

PRVI DIO

[1] Uvod

Izuzetno složena, višeslojna i nerijetko dramatična povijest nearhimedovske matematike, u razdoblju od otkrića infinitezimalnog računa sredinom 16. stoljeća[1] pa sve do pojave nestandardne analize šezdesetih godina 20. stoljeća, može se riječima francuske historiografske škole (*École des Annales*) okarakterizirati kao proces dugoga trajanja u kojem je ipak moguće uočiti određene formativne događaje (*Hauptmomente*), osobito takozvane *Grundlagenkrisen*, te izdvojiti potprocese od naročite važnosti, prije svega transformativno razdoblje tijekom *belle époque* od približno 1870. do 1920. godine kada je matematika reformirana i modernizirana[2], postavši „nova" odnosno „slobodna matematika" (*neue oder freie Mathematik*). Nearhimedovskim nazivamo svako područje matematike u kojem se ograničava ili niječe univerzalno važenje tvrdnje koju od 1881. godine, slijedeći Stolza, nazivamo Arhimedovim aksiomom (*SC*, Post. 5; usp. *Elem.* V, DEF. 4), a koja u geometrijskoj inačici glasi: za ma koje dvije zadane dužine a i b, pri čemu je a manje od b, dužina a, uzastopno položena sama na sebe neki konačan broj puta n, premašit će dužinu b (*Sl. 1*). Na toj tvrdnji počiva takozvana (geometrijska) neprekidnost „u velikom".[3] Najjednostavnije

[1] Jasno je da se može govoriti i o znatno duljoj *pretpovijesti* (ili čak *prapovijesti*) nearhimedovske matematike, ako bi se u nju uključili ne samo matematički rezultati srednjega vijeka nego i klasične grčke matematike, osobito Arhimedov spis *Metoda* (Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος).

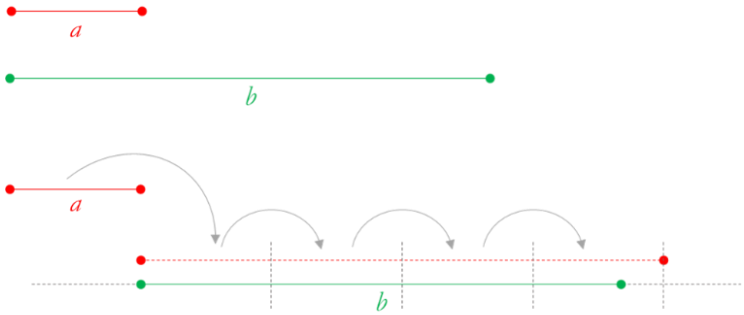
[2] Za više pojedinosti o modernizaciji matematike v. Odjeljak [1.3] u produžetku, raspravu u uvodnom dijelu Odjeljka [2.5] i nap. 249. Većina povjesničara matematike suglasna je da moderna *fin-de-siècle* matematika, barem u minimalnom smislu, podrazumijeva usmjerenost prema *formalizaciji*, razvoju novih apstraktnih logičkih, algebarskih i skupovnoteorijskih metoda te afirmaciji *aksiomatske metode*, odnosno aksiomatske karakterizacije matematičkih struktura kao glavnih objekata matematičkoga istraživanja, kao i razvoju *metamatematičkih* istraživanja aksiomatiziranih, odnosno formalnih teorija. Ono što razdoblje razvoja matematike između 1890-ih i 1920/30-ih godina, koje se u literaturi uobičajeno naziva *matematičkim modernizmom*, čini povijesno osobito zanimljivim, iznimnim i, u određenom smislu, *sui generis*, jesu opseg, intenzitet i odjek odnosno dalekosežnost inovacija uvedenih u nizu tradicionalnih matematičkih disciplina, ponajprije u geometriji, analizi i aritmetici, što je rezultiralo njihovom dubokom reformom, odnosno, kako je to formulirao Gray, *modernističkom transformacijom* (usp. Gray 2008). Istodobno, modernističke tendencije dovele su i do oblikovanja posve novih područja matematike poput teorije skupova, suvremene matematičke logike, moderne algebre, algebarske geometrije, topologije, itd. Konačno, jedno od temeljnih obilježja procesa modernizacije očituje se i u izrazitoj usmjerenosti na proučavanje *osnova i filozofije matematike*, odnosno na pitanja logičke, konceptualne, metodološke, ontološke i epistemološke naravi.

[3] Pod geometrijskom neprekidnošću ovdje se podrazumijeva neprekidnost u smislu Arhimedova i ostalih aksioma neprekidnosti koji pripadaju četvrtoj skupini aksioma u svim standardnim udžbeničkim posthilbertovskim aksiomatizacijama elementarne geometrije (primjerice, usp. Borsuk i Szmielew 1960, Ch. III, str. 151ff.). Od Stolza nadalje u literaturi je postala uobičajena sljedeća formulacija Arhimedova aksioma: $\forall a, b \in S$ gdje je S neka data struktura (primjerice uređeno polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva) važi

$$0 < a < b \;\Rightarrow\; \exists n \in \mathbb{N}: \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ puta}} > b.$$

Strukturu S nazivamo arhimedovskom. Za detaljnije razmatranje aksioma neprekidnosti v. odjeljke [2.6] i [2.6.3] ove disertacije.

rečeno, Arhimedov aksiom zapravo kodificira intuiciju dosezivosti ili, još bolje, prestizivosti: pošavši od ma koje točke u prostoru, moguće je dosegnuti i prestići svaku drugu točku, i to u *konačnom* broju koraka iste duljine (Lučić 1997: 158, Arsenijević 2003a: 30). Poanta je da su u arhimedovskim strukturama poput, primjerice, standardnoga trodimenzionalnog euklidskog metričkog prostora $\mathbb{R}^3$ ili euklidske ravnine $\mathbb{R}^2$, sve dužine kojima operiramo konačne.[4] Drugim riječima, takve strukture ne sadrže beskonačno male (infinitezimalne) ni beskonačno velike elemente. Nasuprot tomu, kao što ćemo vidjeti u nastavku, u nearhimedovskoj geometriji koja predstavlja primarni predmet našega istraživanja, uz konačne postoje i dužine koje su infinitezimalne i beskonačne duljine.[5] Treba još istaknuti i da nam, kao što se može vidjeti i na *Sl. 1*, Arhimedov aksiom omogućuje uzajamno uspoređivanje dužina, to jest, općenitije, „da je geometrijska neprekidnost pretpostavka teorije mjerenja ravninskih i prostornih geometrijskih likova“ ili figura (Lučić 1997: 159).



Sl. 1. Geometrijski prikaz Arhimedova aksioma

Za razliku od Euklidova petog postulata (ili njemu ekvivalentnog Playfairova aksioma o paralelama), *Arhimedov aksiom* u kontekstu zasnivanja geometrije nije bio dovođen u pitanje sve do 19. stoljeća, odnosno, preciznije, do 1889. godine, kada je talijanski matematičar Giuseppe Veronese (1854.–1917.) u pionirskom radu „Il continuo rettilineo e l'assioma V

[4] Ako su zadane ma koje dvije točke A i B, pri čemu je $A \neq B$, *dužina* se može definirati kao skup svih točaka između A i B. Danas se najčešće označuje s AB, pri čemu se kaže se da dužina AB povezuje ili spaja točke A i B, koje se nazivaju *krajevima* odnosno *krajnjim točkama*. Ako želimo naglasiti da je riječ o *otvorenoj dužini*, odnosno da ona ne sadržava svoje krajeve, zapisivat ćemo je kao (AB), dok ćemo uniju otvorene dužine i njezinih krajeva nazivati *zatvorenom dužinom* te je zapisivati kao $[AB]$. Naposljetku, ukoliko želimo govoriti o uniji otvorene dužine (AB) i samo jednoga njezina kraja, bilo A bilo B, zapisivat ćemo je kao $[AB)$ ili $(AB]$, a takvu ćemo dužinu nazivati *poluotvorenom* (ili, alternativno, *poluzatvorenom*). U nastavku ćemo, međutim, u pravilu govoriti o dužinama *tout court*, bez daljnjega specificiranja jesu li otvorene, zatvorene ili poluotvorene (poluzatvorene), naravno, kada to nije od značenja za samo razmatranje. Zanimljivo je da je Veronese u spisu *Elementi di geometria* (1897) pod dužinama podrazumijevao isključivo zatvorene dužine, premda je koristio zapis (AB), dok takvoga ograničenja nema u njegovu ranijem djelu *Fondamenti di geometria* (1891) gdje je pod (AB) podrazumijevao dužine *simpliciter* – usp. Odjeljak [2.7].

[5] *Duljinom* ili *mjerom dužine* nazivamo funkciju ℓ koja svakoj dužini a pridružuje standardan pozitivan realan broj $\ell(a)$ (v. Borsuk & Szmielew 1960, Ch. III, §9, str. 167–72, usp. Lučić 1997, §22, str. 167–68). Nasuprot tomu, u nearhimedovskoj geometriji mjere dužina mogu biti izražene i nestandardnim, beskonačnim ili infinitezimalnim brojevima. Za definicije konačnosti, beskonačnosti i infinitezimalnosti v. drugi i četvrti dio ove disertacije; za Veroneseove brojeve v. Odjeljak [2.6.1], za Levi-Civitine *numeri monosemii* v. Odjeljak [2.6.2], za Robinsonove hiperrealne brojeve v. Odjeljak [4.1], a za Conwayeve nadrealne brojeve v. Odjeljak [4.2].

d'Archimede" prvi eksplicitno formulirao matematičko-filozofsku tezu o *neovisnosti* pojma linearnoga kontinuuma od *Arhimedova aksioma* neprekidnosti, utvrdivši da se kontinuitet ne iscrpljuje niti svodi isključivo na arhimedičnost (*Archimedizität*).[6] Daljnjoj razradi i obrani te teze Veronese je posvetio sljedeća dva desetljeća, počevši od objavljivanja monumentalnoga djela *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare* 1891. godine, a potom i u nizu radova i studija objavljivanih sve do 1914. godine. O Veroneseovim rezultatima i njihovim implikacijama raspravljali su vodeći matematičari druge polovice 19. i prve polovice 20. stoljeća, među ostalima L. Cremona, G. Bellavitis, G. Peano, M. Pieri, W. Fiedler, F. Klein, F. Schur, W. Killing, A. Schönflies, T. Levi-Civita, F. Enriques, G. Fano, G. Cantor, O. Stolz, O. Hölder, H. Poincaré, H. Hahn, D. Hilbert, M. Dehn, L. E. J. Brouwer, H. Weyl, C. S. Peirce, B. Russell, K. Vahlen, G. Vitali i mnogi drugi. Stoga nas ne treba čuditi sljedeća ocjena Philipa Ehrlicha, jednoga od najvećih suvremenih autoriteta za povijest i filozofiju nearhimedovske matematike:

> „Teorija linearnoga kontinuuma razvijena u Veroneseovim *Fondamenti di geometria* (1891) duboka je i relativno sofisticirana, a više [Veroneseovih] središnjih pojmova i ideja prožima teorije uređenih algebarskih sustava iz dvadesetoga stoljeća, a time i [Robinsonovu] nestandardnu analizu [...], kao i [Conwayevu] teoriju nadrealnih brojeva." (Ehrlich 2021: 507)

Dakle, čini se da postoji neprekinuta razvojna nit koja vodi od Veroneseovih pionirskih radova do najznačajnijih suvremenih nearhimedovskih teorija.[7] Međutim, unatoč činjenici da su Veroneseovi rezultati poslužili kao temelj moderne teorije nearhimedovskih veličina, „Veroneseov doprinos gotovo je potpuno *zaboravljen*" (Ehrlich 2006: 67, moj kurziv), kako među suvremenim matematičarima, tako i među povjesničarima i filozofima matematike. Riječima Victora Pambucciana,

---

[6] Ovo, naravno, ne bi trebalo shvatiti kao da je Veronese ujedno bio i prvi matematičar koji se krajem 19. stoljeća uopće bavio istraživanjem nearhimedovskih struktura. Kada govorimo o Veroneseovim prethodnicima u području *fin-de-siècle* nearhimedovske matematike, svakako valja spomenuti zanimljive i važne pionirske radove njemačkih matematičara P. du Bois-Reymonda (1831–1889) i C. J. Thomaea (1840–1921), austrijskog matematičara O. Stolza (1842–1905) te Veroneseova sunarodnjaka R. Bettazzija (1861–1941). Doduše, svakako treba istaknuti da se doprinosi du Bois-Reymonda i Thomaea nisu sastojali u sustavnom istraživanju nearhimedovskih struktura, nego u primjerima nearhimedovskih veličina do kojih su neočekivano i, zapravo, slučajno došli u okviru svojih istraživanja tokova vrijednosti i rasta realnih funkcija. Nadovezujući se ponajprije na du Bois-Reymonda, Stolz je početkom 1880-ih formulirao dva brojevna sustava koja je, kako je primijetio Ehrlich, Robinson 1960-ih nazvao skromnim, ali rigoroznim doprinosom modernoj teoriji nearhimedovskih sustava (Ehrlich 2006: 5). No, sâm je Stolz otvoreno priznavao da su Veroneseovi uvidi usmjerili njegova vlastita istraživanja u području uređenih sustava veličina (Stolz 1891a: 107ff.; Stolz & Gmeiner 1902: 114, nap. 2). I doista, kao što ćemo vidjeti u nastavku i, osobito, u drugom i trećem dijelu disertacije, tek je Veronese definitivno rasvijetlio (i) status i ulogu Arhimedova aksioma u zasnivanju teorije kontinuuma i zasnivanju geometrije, (ii) odnos Arhimedova aksioma prema drugim aksiomima neprekidnosti, te (iii) detektirao i otklonio manjkavosti u rezultatima o nearhimedovskim sustavima veličina koje su formulirali du Bois-Reymond, Stolz i drugi kasnodevetnaestostoljetni infinitezimalisti. Za više pojedinosti o doprinosima Thomaea, du Bois-Reymonda i Stolza v. osobito odjeljke [2.6], [3] i [3.1].

[7] O tome kako je moguće pratiti puteve transmisije Veroneseovih izvornih ideja, konceptualnih inovacija, metoda, tehnika i rezultata, kao i o načinima na koje su oni bili adaptirani, transformirani i, naposljetku, ugrađeni u različite suvremene teorije (od geometrije preko algebre i logike do teorije skupova), v. osobito treći i četvrti dio disertacije.

> „Veroneseovi doprinosi zasnivanju geometrije žive u kolektivnom pamćenju geometara ponajprije kao *fusnota* uz odjeljak Hilbertovih *Grundlagen der Geometrie* posvećen pitanju nezavisnosti Arhimedova aksioma." (Pambuccian 2014, moj kurziv)

Posve ironično, fusnota ili, bolje rečeno, fusnote (jer su ih u prvome izdanju bile dvije), koje Pambuccian spominje kao nositelje kolektivnoga pamćenja poznate su samo onima koji su čitali prvo izdanje Hilbertovih *Grundlagen* iz 1899. godine budući da su obje fusnote u kojima Hilbert upućuje na Veronesea nestale iz pojedinih kasnijih izdanja. Ta neobična urednička intervencija rezultirala je brisanjem važnoga povijesnoga podatka odnosno tekstualnoga svjedočanstva koje eksplicitno i nedvosmisleno dokumentira postojanje neposrednoga utjecaja Veroneseovih *Fondamenti* na Hilbertove *Grundlagen*.[8] Vraćajući se tvrdnji o transformaciji matematike kojom smo započeli izlaganje, taj detalj postaje iznimno važan upravo zbog toga što se Hilbertove *Grundlagen* smatraju „jedinstvenim egzemplarnim djelom kojim je uveden modernizam" u matematiku (Gray 2008: 5). Naime, središnja teza Mehrtensove utjecajne studije *Moderne–Sprache–Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme* (1990) prema kojoj je Hilbert glavni predstavnik matematičkoga modernizma mogla bi se dovesti u pitanje uspijemo li pokazati da je upravo Veronese ostvario značajan, možda čak i presudan, utjecaj na Hilberta. Time se posljedično otvara i daljnje veoma važno pitanje situiranja i (re)evaluacije Veroneseove pozicije u širem kontekstu modernizacije matematike krajem 19. i početkom 20. stoljeća. Iz toga će razloga primarni fokus istraživanja u ovoj disertaciji biti analiza *zapanjujuće asimetrije* u početnim i kasnijim fazama povijesti recepcije Veroneseove nearhimedovske geometrije, te sustavna rekonstrukcija svih relevantnih čimbenika koji su pridonijeli svojevrsnom *damnatio memoriae* Veroneseovih doprinosa u suvremenoj historiografiji i filozofiji matematike.

Upadljiva odlika većine povijesnih i filozofskih studija i pregleda posvećenih nearhimedovskoj matematici jest tendencija da se njezin razvoj promatra kao u biti *diskontinuiran*, čime se čini neopravdan *skok* s istraživanja u području Newton-Leibnizova infinitezimalnog računa tijekom 17. i 18. stoljeća na drugu polovicu 20. stoljeća kada se javljaju suvremene nearhimedovske teorije, prije svega nestandardna analiza Abrahama Robinsona iz 1960-ih godina, koja se slavi kao svojevrsna „obrana časti infinitezimala"[9], čime se, dakle, preskaču čitavo 19. i početak 20. stoljeća, a time i Veroneseovi rezultati, kao potpuno irelevantni za kasnije, dvadesetostoljetne teorije. Uzrok tomu valja tražiti u *idiosinkratičnom uvjerenju* da su „infinitezimali definitivno protjerani iz matematike" u svjetlu rezultata „velikoga trijumvirata Weierstraß–Dedekind–Cantor" (sec. Boyer 1959: 298), koje je među prvima artikulirao Bertrand Russell (1872–1970) još 1901. godine, a potom dodatno osnažio u *Principles of Mathematics* (1903). Russellovu su ocjenu nekritički preuzeli i povjesničari i filozofi matematike, odbijajući prepoznati ono što je Felixu Kleinu (1849–

[8] Jedno moguće objašnjenje ove okolnosti ponuđeno je u Odjeljku [3.2] ove disertacije, u kontekstu analize onoga što nazivam Poincaréovom dvostrukom pogreškom.

[9] Ovu formulaciju dugujemo Robinsonovu profesoru i imenjaku, Abrahamu Fraenkelu (usp. Fraenkel 1967: 107).

1925) bilo očito još 1908. godine, naime, da postoji *paralelni tok* razvoja nearhimedovske matematike, povezan s tradicionalnim infinitezimalizmom lajbnicovskoga tipa i primarno motiviran „starim metafizičkim problemom strukture kontinuuma“ koji „u najnovijoj matematici vrhuni Veroneseovim geometrijskim istraživanjima“ (Klein 1932: 214ff.; usp. Bair *et al.* 2017a, §2.5, str. 202ff.). Moje je istraživanje motivirano upravo tim Kleinovim uvidom i ima za cilj popunjavanje *lakune* u dosadašnjim povijestima i filozofijama nearhimedovske matematike[10], pokazivanjem da „premda je većina kasnodevetnaestostoljetnih i predrobinsonovskih dvadesetostoljetnih matematičara eliminirala infinitezimale iz analize“, sasvim sigurno ih nije eliminirala iz matematike *tout court* (usp. Ehrlich 2006: 3). *Contra* Russellu, moguće je identificirati, a potom i pratiti, jasan tok razvoja nearhimedovskih teorija, od pionirskih radova o infinitezimalima obogaćenim brojevnim sustavima, preko nearhimedovskih *Grössensysteme* (sustavima veličina), do zasnivanja nearhimedovske geometrije i uvođenja infinitezimalima obogaćenih kontinuuma. Drugim riječima, vidjet ćemo da su upravo Veroneseovi rezultati otvorili jedno novo, široko, izrazito raznovrsno, tehnički i filozofski duboko razrađeno područje konzistentne i sofisticirane nearhimedovske matematike (nekantorovski shvaćenoga beskonačno velikoga i beskonačno maloga), koje se u prvim desetljećima 20. stoljeća razvilo u opću teoriju nearhimedovskih uređenih algebarskih i geometrijskih sustava. Samim time, vjerujem da će izlaganje koje slijedi uvjeriti čitatelja da smo danas u poziciji istaknuti i ispraviti čitav niz *zabluda* u vezi s modernom nearhimedovskom matematikom te jasnije rasvijetliti njezine *povijesne*, *filozofske i matematičke korijene*.

Ostatak prvoga dijela posvećen je objašnjenju niza specifičnih interpretativnih izazova koje pred autora postavlja ovakav interdisciplinarni istraživački pothvat, što će biti popraćeno raspravom o odgovarajućem metodološkom pristupu i motivaciji za bavljenje ovom temom (Odjeljak [1.1]). Nakon skiciranja Veroneseove intelektualne biografije u razdoblju od 1854. do 1889. godine te napomena o takozvanoj „Talijanskoj matematičkoj školi“ (Odjeljak [1.2] i Dodatak A), rekonstruirat ćemo širi matematički i historijsko-filozofski kontekst unutar kojega je Veronese uveo nearhimedovsku geometriju 1889. odnosno 1891. godine (Odjeljak [1.3]). Drugi, najopsežniji dio disertacije posvećen je Veroneseovu zasnivanju i razvoju nearhimedovske geometrije u *Fondamenti* i drugim publikacijama do 1909. godine. U Odjeljku [2.1] bit će ponuđena nova interpretativna strategija, kao i kritika malobrojnih postojećih tumačenja Veroneseove teorije, uz osvrt na pojedine važne radove koji dosad nisu razmatrani u literaturi. U Odjeljku [2.3] bit će pružen

[10] Ovakva vrsta istraživanja usmjerenih na otvorena pitanja i lakune u pojedinim područjima povijesti matematike posve je nova i praktički je tek u začecima. Prvi skup posvećen ispitivanju specifičnih izazova s kojima se suočavaju ovakva istraživanja te artikulaciji mogućih strategija i inovativnih interpretativnih pristupa koji bi se mogli primijeniti održan je u *Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences* (University of Cambridge) u okviru istraživačkog programa *Modern History of Mathematics* u čijoj sam provedbi sudjelovao kao jedan od pozvanih predavača s izlaganjem Veronese „Redivivus and the (Re)writing of the History of *Fin-de-Siècle* Non-Archimedean Mathematics – What Remains to be Done: Prospects for Future Historiographical Research” (*MHM: Looking Ahead*, 28. 4. – 2. 5. 2025.). Ovom bih prilikom želio zahvaliti Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences (University of Cambridge) na potpori i gostoprimstvu tijekom provedbe programa *Modern History of Mathematics: Looking Ahead*, u okviru kojega sam proveo dio istraživanja čiji su rezultati predstavljeni u ovoj disertaciji.

uvod u Veroneseov program zasnivanja geometrije iz *Fondamenti* analizom jedne ilustrativne studije slučaja – spora koji je Veronese još prije zasnivanja nearhimedovske geometrije vodio s Peanom o statusu geometrije hiperprostora, ali i o ključnim logičko-filozofskim aspektima aksiomatske metode. Oslanjajući se prije svega na važne uvodne dijelove *Fondamenti*, utvrdit ćemo koja je prema Veroneseu funkcija i status intuicije i vizualizacije u zasnivanju geometrije, a osobito u onome njezinu dijelu koji je Veronese smatrao filozofski najznačajnijim – *rectimétrie*, odnosno aristotelovskoj teoriji intuitivnoga kontinuuma (Odjeljak [2.4]). U Odjeljku [2.4.1] bit će prikazana glavna alternativa aristotelizmu u pogledu filozofije matematike i, osobito, pitanja o strukturi kontinuuma – Cantorov poentilizam; u tom će se odjeljku ukazati i na važna filozofska razilaženja između Veronesea i Cantora koja će postati ključna u njihovu kasnijem sporu o statusu nearhimedovske geometrije i pitanju konzistentnoga zasnivanja teorije infinitezimala. Zatim ćemo se posvetiti Veroneseovu specifičnom pristupu aksiomatskom zasnivanju geometrije, suprotstavljajući ga alternativnim pristupima (ponajprije kod Hilberta i Peana) te analizirajući način na koji je Veronese na posve moderan, hilbertovski način istraživao nezavisnost aksioma i konstruirao prvo nearhimedovsko uređeno polje kao model aksioma svoje nove geometrije (Odjeljci [2.5], [2.6] i [2.6.1]). U Odjeljku [2.6.2] vidjet ćemo i prve važne rezultate koji se temelje na Veroneseovoj novoj geometriji: Levi-Civitin model Veroneseova kontinuuma i Hilbertov model nearhimedovske geometrije iz *Grundlagen der Geometrie*. Poglavlje završava povijesnim i logičko-matematičkim napomenama o uzajamnim odnosima aksioma neprekidnosti i standardnom aksiomatizacijom teorije uređenih polja (Odjeljak [2.6.3]), te komparativnim prikazom aksiomatizacija elementarne geometrije koje je Veronese iznio u svojim dvjema najznačajnijim knjigama (Odjeljak [2.7]). Naposljetku, u Dodatku C drugoga dijela ukazat će se na dosad neistraženu vezu između Veroneseova projekta zasnivanja geometrije i Leibnizove geometrijske analize. Treći dio disertacije posvećen je povijesti recepcije i ocjeni Veroneseovih rezultata i njihovih implikacija, kako u samoj matematici, tako i u povijesti i filozofiji matematike. Počevši od pregleda ključnih aspekata početne faze recepcije (Odjeljak [3]), u trećem će dijelu biti kritički preispitani najvažniji čimbenici koji su negativno utjecali na kasniju recepciju *Fondamenti*: Cantorov navodni „dokaz" protiv mogućnosti infinitezimala (Odjeljak [3.1] i Dodatak D), Peanov navodni „dokaz" protiv mogućnosti infinitezimalnih dužina (Odjeljak [3.1.1]) i Poincaréova dvostruka pogreška (Odjeljak [3.2]). Četvrti i posljednji dio disertacije posvećen je recepciji Veroneseovih ideja i rezultata u suvremenoj nearhimedovskoj matematici, i to u dvjema najreprezentativnijim teorijama: Robinsonovoj nestandardnoj analizi i teoriji hiperrealnih brojeva (Odjeljak [4.1]) te Conway-Ehrlichovoj teoriji apsolutnoga aritmetičkog kontinuuma i nadrealnih brojeva (Odjeljak [4.2]). U zaključku će biti pružen pregled i sažetak glavnih rezultata i ostvarenih doprinosa istraživanja provedenoga u disertaciji.

[1.1] O motivaciji i metodologiji: povijest i/ili filozofija matematike i filozofija povijesti matematike

U znamenitom pismu Malebrancheu od 13./23. ožujka 1699. godine Leibniz je zapisao jednu od rečenica koja možda ponajbolje ilustrira iznimno blisku povezanost matematike i filozofije tijekom gotovo čitave njihove zajedničke povijesti: „Matematičari su oduvijek imali jednaku potrebu biti filozofi kao što su filozofi imali potrebu biti matematičari.“[11] S druge strane, kada je riječ o vezi između povijesti matematike i filozofije matematike, koja nije u toj mjeri očita niti samorazumljiva, nju možda najbolje ilustrira jedna rečenica koja predstavlja svojevrsnu varijaciju prethodne Leibnizove misli: „Dodajmo da će ova pitanja možda još dugo vremena ostati nerazriješena budući da filozofi nisu dovoljno matematičari da bi ih [sami] razriješili niti [su] matematičari dovoljno filozofi da bi se s njima uhvatili ukoštac.“[12] O kakvim je ovdje „nerazriješenim pitanjima“ uopće riječ i kakve to veze ima s poviješću matematike, budući da se ona ovdje nigdje ni ne spominje? Možda pomalo neočekivano i iznenađujuće, Branislav Petronijević (1875–1954) napisao je ovu rečenicu u komparativnoj povijesnoj studiji zamišljenoj kao svojevrsni *nouvel hommage réparateur* N. I. Lobačevskom (1793–1856) i J. Bolyaiju (1802–1860), utemeljiteljima neeuklidske geometrije, u kojoj se bavio rekonstrukcijom povijesti otkrića, zasnivanja, razvoja i recepcije hiperboličke geometrije, te historiografskom analizom problema istodobnih neovisnih otkrića u povijesti matematike. Čini se da su prema Petronijeviću upravo historiografska pitanja ove vrste ona kojima bi se trebali baviti i filozofi i matematičari. On sâm bio je i više nego pozvan s njima se „uhvatiti ukoštac“, budući da je bio i filozof i matematičar, ali i prirodoslovac, profesor Velike škole i, od osnutka 1905. godine, Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Beogradu i, od 1906. godine, član Akademije filozofskih znanosti Srpske kraljevske akademije, prethodnice SANU, u kojoj je od 1948. godine pa do kraja života bio član Odjela prirodno-matematičkih znanosti. Još važnije, Petronijević je bio prvi srpski filozof i matematičar koji se sustavno bavio poviješću, filozofijom i (logičkim) osnovama matematike (i to geometrije, aritmetike, algebre i analize) i egzaktnih znanosti (osobito fizike). Sljedeći ulomak o *matematičkoj filozofiji* (primijetimo da Petronijević rabi taj izraz još prije pojave Russellove knjige *Introduction to Mathematical Philosophy* iz 1919. godine) iz Petronijevićeve *Autobiografske skice* koji sam otkrio tijekom proučavanja Petronijevićeve ostavštine (*Nachlass*) u Arhivu SANU i Odjelu posebnih fondova Narodne biblioteke u Beogradu otkriva nam na koji je način razumijevao vlastitu djelatnost:

> „Matematikom sam se bavio iz triju razloga: prvo, zato što se moja metafizika zasniva na matematici; drugo, zato što me zanimala logička i filozofska strana matematike; i treće, zato što je matematika prijeko potrebna pri proučavanju mehanike i fizike. […] [J]a sam morao postati matematičar da bih mogao biti

[11] „Les Mathematiciens ont autant besoin d’estre philosophes, que les philosophes d’estre Mathematiciens.“ (A II. 3, 539)

[12] „Ajoutons que ces questions resteront peut-être encore pour longtemps pendantes, les philosophes n’étant pas assez mathématiciens pour les résoudre et les mathématiciens pas assez philosophes pour les aborder.“ (Petronievics 1929: 212, nap. 4)

> metafizičar; stoga je prva sveska *Principa metafizike* ne samo metafizičko nego i matematičko djelo.[13] Kao filozof nisam samo metafizičar nego i logičar, pa me kao takvoga matematika mora zanimati kao disciplina u kojoj logika ima presudnu ulogu. Stoga sam se bavio geometrijom ne samo zato što mi je to bilo potrebno radi obrade diskretne geometrije, nego i sa stajališta geometrije kao logičkog sustava definicija, aksioma (odnosno postulata) i teorema. […] A bavio sam se i logičkim fundamentima aritmetike. […] Bavio sam se nadalje i infinitezimalnim računom s matematičkog stajališta. *S tim istraživanjima logičkog fundiranja matematike povezane su i moje tri rasprave iz povijesti matematike*.[14]" (citirano prema Petronijević 1998: 26–27, moj kurziv)

Već prva rečenica, poput one koju smo citirali na početku, potvrđuje da je Petronijević prije svega bio veliki *leibnizovac*. Naime, u pismu L'Hospitalu od 27. prosinca 1694. godine Leibniz je također istaknuo da je njegova metafizika takoreći u cijelosti matematika ili da bi to barem mogla postati.[15] Nešto slično Leibniz će ponoviti i u prepisci s Basnageom de Bauvalom od 3./13. siječnja 1696. godine, govoreći o svojem opusu – sasvim nalik načinu na koji će to učiniti i Petronijević više od dva stoljeća kasnije – kao o „neobičnoj mješavini filozofskih i matematičkih ideja" (*melange curieux de pensées philosophiques et mathematiques*, A II, 3, 121). Zanimljivo je da ćemo u drugom dijelu disertacije vidjeti kako se, premda Veronese, za razliku od Leibniza i Petronijevića, nije bio i filozof, nego samo matematičar, njegova teorija, prije svega ona iz *Fondamenti*, također može lajbnicovski okarakterizirati kao *geometria metaphysica* (usp. Leibniz I, A VI, 4, 332).

Još je važnije za našu temu rasvijetliti prirodu odnosa između Leibniza, Veronesea i Petronijevića. Prvo, kada je riječ o Veroneseu, on u povijesno-kritičkom apendiksu *Fondamenti*, u kojem daje pregled različitih problema i pristupa u području osnova geometrije, napominje da *ni za jednu* matematičku teoriju, pa tako ni za njegovu, ne vrijedi *prolem sine matre creatam* (usp. Ovid. *Met.* II, 553) i upravo se u tom kontekstu poziva na Leibnizove spise iz *situacijske* to jest *geometrijske analize* (*analysis situs*) sljedećim riječima: „Leibniz, najveći filozof i matematičar, također se s puno ljubavi bavio našim problemom [sc. osnovama geometrije]."[16] Veza između Veroneseova pristupa iz *Fondamenti* i Leibnizove *analysis situs* (poznate još i kao

---

[13] O tome svjedoči već i sam naslov: *Principien der Metaphysik. Erster Band, erster Abteilung: Allgemeine Ontologie und die formalen Kategorien. Mit einem Anhang: Elemente der neuen Geometrie*, Heidelberg: Carl Winters Universitätsbuchhandlung, 1904. Apendiks s „elementima nove geometrije" sadrži Petronijevićevu aksiomatizaciju jedne nove diskretne (finitne, odnosno konačne) geometrije.

[14] Riječ je o sljedećim raspravama: „Sur les nombres infinis de Fontenelle", *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, Vol. XXVI, 1917, str. 309–316; „N. Lobatschewsky et J. Bolyai: Étude comparative d'un cas spécial d'inventeurs simultanés", *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, T. 108, 1929, str. 190–214; „Über Leibnizens Methode der direkten Differentiation", *Isis*, Vol. XXII, 1934, str. 69–76. Pored ovih triju rasprava naročito se ističe i monografska studija *Die typischen Geometrien und das Unendliche* (Heidelberg: Carl Winters Universitätsbuchhandlung, 1907) o kojoj će biti više riječi u nastavku. Za ostale Petronijevićeve studije iz povijesti matematike v. *Résumé des travaux philosophiques et scientifiques de B. Petronievics* (Belgrade: Académie Royale Serbe, *Bulletin de l'Académie des Lettres*, № 2, 1937).

[15] „Ma metaphysique est toute Mathematique pour dire ainsi, ou la pourroit devenir." (A III, 6, 253)

[16] „Leibniz, sommo filosofo, e matematico, si occupò con molto amore anche del nostro problema, cercando di dimostrare alcuni assiomi di Euclide e proponendo varie definizioni per la retta e per il piano." (Veronese 1891: 568)

analysis geometrica propria, *characteristica geometrica* i *characteristica situs*) dosad nije podrobnije istražena u literaturi, premda je Vincenzo De Risi još u svojoj doktorskoj disertaciji istaknuo (doduše bez ulaženja u ikakve pojedinosti) da su Veroneseovi *Fondamenti* „knjiga koja na najbolji mogući način predstavlja modernu razradu Leibnizove *analysis situs*“, kao i da je „Veroneseovo stajalište u *Fondamenti* manje-više istovjetno Leibnizovu“ (De Risi 2007: 12–13, nap. 12; usp. i str. 281). Do istoga sam uvida došao i sâm tijekom pisanja magistarskog rada *O jednoj zaboravljenoj alternativi Cantor-Dedekindovoj teoriji kontinuuma: infinitezimalizam od Leibniza do osnivača nearhimedovske geometrije*, pod mentorstvom prof. Miloša Arsenijevića 2016. godine, tada još uvijek ne poznajući ni De Risija ni korpus Leibnizovih geometrijskih spisa (naime, u središtu moga interesa tada su bili Leibnizovi radovi iz područja zasnivanja infinitezimalnoga računa). Upravo je prof. Arsenijević zaslužan za početak moga istraživanja Veroneseova opusa i interesa za povijest, filozofiju i zasnivanje nearhimedovske matematike u 19. i 20. stoljeću; pod njegovim sam mentorstvom započeo rad i na ovoj doktorskoj disertaciji.[17] Kao što ćemo vidjeti u Dodatku C drugoga dijela, ne samo da je De Risi bio u pravu nego se njegovo stajalište može izravno tekstualno potkrijepiti komparativnom analizom *Fondamenti* i još uvijek neobjavljenih spisa iz Forschungsstelle Leibniz-Archiv i G. W. Leibniz Bibliothek u Hannoveru.[18]

Drugo, kada je riječ o vezi između Veronesea i Petronijevića, stvari postaju još zanimljivije. Naime, prema mojim istraživanjima, Petronijević je po svoj prilici bio *prvi filozof* koji se uopće zainteresirao za Veroneseovu nearhimedovsku geometriju, a potom se njome i detaljno bavio. Veronesea prvi put spominje već 1904. godine u prvom tomu *Principa metafizike* (druga glava drugoga odjeljka, „Von Raum und Zahl“), međutim, u studiji *Die typischen Geometrien und das Unendliche* iz 1907. godine posvećuje čitav treći odjeljak („Transfinite Zahlen und das konsekutive Diskretum“) komparativnoj analizi Cantorove i Veroneseove teorije beskonačnih brojeva, i to u kontekstu njihove moguće primjene u geometriji. Kako i sam navodi u *Autobiografskoj skici*, njegova heidelberška studija iz 1907. rezultat je detaljnoga proučavanja *Fondamenti* (isprva u Scheppovu njemačkom prijevodu iz 1894. godine, a potom i u talijanskom izvorniku), a osobito povijesno vrlo važnih Veroneseovih predgovora i uvoda („Principii fondamentali delle forme matematiche astratte“). Upravo je posredstvom te studije Petronijević prvi put stupio u kontakt s Veroneseom, još u razdoblju prije Prvoga svjetskog rata, dok su se osobno upoznali tijekom Petronijevićevih boravaka u Rimu 1915. i 1916. godine (usp. Petronijević 1998: 38). Iz toga poznanstva proizašla je još jedna važna Petronijevićeva studija, „Sur les nombres infinis de Fontenelle“, komparativna povijesno-filozofska analiza Fontenelleove, Cantorove i

[17] Neposredan povod mojemu bavljenju Veroneseom bila su predavanja prof. emerit. Philipa Ehrlicha provokativnoga naslova „Are Points (Necessarily) Unextended?“, čije mi je bilješke u rukopisu, po povratku s konferencije *8th Quadrennial International Fellows of the University of Pittsburgh Center for Philosophy of Science Conference* održane u Lundu u Švedskoj 2016. godine predao prof. Arsenijević. Ehrlich je u međuvremenu objavio znatno proširenu i razrađeniju verziju toga predavanja (v. Ehrlich 2022.).

[18] Zahvaljujem Vincenzu De Risiju, Siegmundu Probstu i njihovim suradnicima što su mi, prije objavljivanja, stavili na raspolaganje prvu radnu verziju transkripcije tih Leibnizovih spisa (*PHILIUMM. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz Akademie-Ausgabe*, Vers. 1–3; usp. Bella *et al.* 2022, 2023 i 2025).

Veroneseove teorije beskonačnih brojeva, objavljena u *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei* na Veroneseov prijedlog, a predstavljena članovima Rimske akademije 1917. godine od strane Tullija Levi-Civite (1873–1941), Veroneseova genijalnog studenta koji je već kao devetnaestogodišnjak (*sic!*) i sâm dao važan doprinos zasnivanju nearhimedovske geometrije.[19] U vezi s rimskom studijom treba napomenuti da je Veronese primjerku koji mu je Petronijević u rukopisu poslao iz Londona krajem 1916. godine pridodao jednu marginalnu bilješku naslovljenu „Note pour M. Petronievics", koju je Petronijević poslije pretiskao u proširenoj inačici teksta objavljenoj na srpskom i, djelomično, francuskom jeziku pod naslovom „Kritičke primedbe na Fontenellovu teoriju beskrajnih brojeva" u *Glasu SKA* (knj. CXXXIV) 1929. godine.

Naposljetku, povijesno je zanimljivo da je Petronijević, najvjerojatnije potaknut, kako i sam kaže, „nepovoljnim prijemom" Veroneseove teorije početkom 20. stoljeća, sugerirao Veroneseu „da bi bilo dobro napisati jedno manje djelo u kojem bi izložio (na jasniji i kraći način nego što je to učinio u glavnom djelu [sc. *Fondamenti di geometria*, 1891]) osnovna stajališta kako svoje teorije beskonačnih brojeva, tako i nearhimedovske geometrije", a Veronese je, prema Petronijevićevu svjedočanstvu, „odmah prihvatio taj prijedlog" (citirano prema Petronijević 1998: 38). Taj se spis, uslijed Veroneseove iznenadne smrti, nažalost nikada nije pojavio, a sâm Petronijević nije uspio utvrditi je li makar ostao sačuvan u obliku nedovršenoga rukopisa, što znači da su *Elementi di geometria* iz 1900. godine nešto najbliže sažetku glavnih rezultata i uvida iz *Fondamenti*. Također, ni prepiska između Petronijevića i Veronesea, nažalost, nije sačuvana; najvjerojatnije je izgubljena tijekom Prvoga svjetskog rata (kao i prepiska s Cantorom, kojega je Petronijević također poznavao i čiji je opus detaljno proučio).[20]

Prethodni pokušaj rasvjetljavanja odnosa Leibniz–Veronese–Petronijević, kao i pregled Petronijevićevih doprinosa proučavanju Veroneseove teorije, trebao je poslužiti kao svojevrsna studija slučaja i ilustracija jednog zanimljivog i po mnogočemu inovativnog *integralnog pristupa* proučavanju povijesti i filozofije matematike s kraja 19. i početka 20. stoljeća. Međutim, Petronijevićev povijesno-filozofski pristup matematici, oličen gorenavedenim citatom iz *Autobiografske skice*, nipošto ne bi trebalo smatrati reprezentativnim za način na koji su, prije svega, povjesničari i, u određenoj mjeri, pojedini filozofi matematike pristupali istraživanju pitanja one vrste kojima se bavio i Petronijević, ne samo početkom nego i tijekom većega dijela 20. stoljeća. Kao što ćemo vidjeti, njegova se historiografska metodologija može smatrati prije iznimkom nego pravilom. Zbog čega to kažem?

Ključna pitanja na koja bismo trebali odgovoriti jesu: *Tko bi trebao pisati povijest matematike?* i, u neposrednoj vezi s ovim prvim, *Kako bi trebalo pisati povijest matematike?* U intervjuu s D. Roweom iz 1987. godine, jedan od najutjecajnijih i najdugovječnijih

[19] Za više pojedinosti o Levi-Civiti i njegovim manje poznatim, ali fundamentalnim doprinosima rigoroznom zasnivanju nearhimedovske matematike s kraja 19. stoljeća v. Odjeljak [2.6.2] ove disertacije.

[20] Kada je riječ o prepisci Petronijević-Cantor, postoji mala vjerojatnoća da je barem jedan njezin dio sačuvan u okviru nedavno otkrivenoga i povjesničarima matematike do sada posve nepoznatoga dijela Cantorova *Nachlassa*, koji je Cantorova praunuka Angelika Vahlen darovala Matematičkom institutu Sveučilišta u Halleu. V. i nap. 518.

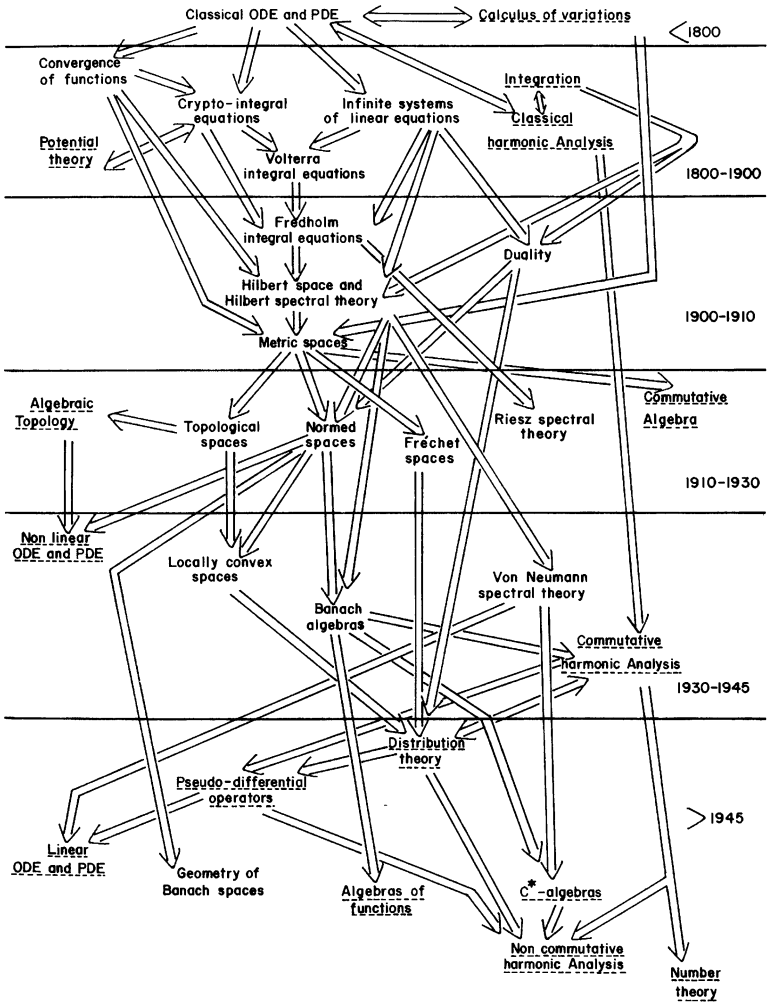
povjesničara matematike 20. stoljeća, Dirk Jan Struik (1894–2000)[21], istaknuo je da je sve do pred kraj 20. stoljeća među matematičarima, povjesničarima i filozofima prevladavalo shvaćanje da je matematika čisto intelektualni pothvat čiji se razvoj najbolje može razumjeti analizom ideja, tehnika, rezultata i teorija neovisno o širem akademsko-institucionalnom, društveno-političkom, ekonomskom pa i filozofskom kontekstu (Rowe 2018: 387). Drugim riječima, svi su *vanjski čimbenici* smatrani potpuno irelevantnima i bez ikakva utjecaja na *unutarnju strukturu* same matematike, na njezin razvoj i napredak (ili stagnaciju). Dominantan *internalistički pristup* u historiografiji matematike ogledao se u takozvanoj *Problemgeschichte* ili *Ideengeschichte* gdje je fokus bio na ekspliciranju i rasvjetljavanju tehničkoga sadržaja specifičnih matematičkih ideja, problema i metoda (Dauben *et al.* 2002: xxv). Jedan od najistaknutijih pobornika internalizma u 20. stoljeću bio je francuski matematičar André Weil (1906–1998). U svojem, s obzirom na kasniju salvu negativnih reakcija (prije svega među povjesničarima), zloglasnom predavanju „History of Mathematics: Why and How", održanom na Osamnaestom međunarodnom kongresu matematičara (ICM) u Helsinkiju 1978. godine, Weil je prethodnim dvama pitanjima pridodao i treće: *Za koga bi trebalo pisati povijest matematike?*, za koje je vjerovao da se na njega može odgovoriti jedino iz „naše perspektive sebičnih matematičara". To će reći, *povijest matematike trebali bi pisati matematičari za druge matematičare*, i to kao strateški razvrstan repozitorij reprezentativnih primjera ili katalog matematičkih činjenica poredanih prema autorima, kronološki i tematski, s osobito istaknutim glavnim problemima, imajući pritom u vidu aktualne istraživačke trendove i dugoročne razvojne ciljeve (Weil 1980: 227–230).

Za internaliste, dakle, povijest matematike predstavlja svojevrsnu kompilaciju apstraktnih rezultata i „filijaciju ideja i ulančavanje otkrića" (*la filiation des idées et l'enchaînement des découvertes*), kako je to formulirao francuski povjesničar matematike Paul Tannery (1843–1904). Samo tako usko koncipirana povijest matematike zadobiva *uporabnu vrijednost* za matematičare (Weil, *op. cit.*, str. 236). Jedna od knjiga koja i danas predstavlja najbolji primjer takvoga pristupa povijesti matematike jest *Éléments d'histoire des mathématiques* (1974), skupine ponajprije francuskih matematičara — među kojima je bio i Weil — koji su objavljivali pod pseudonimom Nicolas Bourbaki; upravo se zbog toga internalizam u literaturi nerijetko naziva i *bourbakizmom*. Općepoznato je da je većinu „povijesnih" tekstova u *Éléments* skicirao Jean Dieudonné (1906–1992), a njegova opsežna studija *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900–1960* iz 1989. godine također dobro ilustrira internalistički pristup[22], kao i

[21] Povijesno je zanimljivo da je „talijanska veza" odigrala presudnu ulogu u Struikovoj karijeri. Naime, njegovo zanimanje za povijest matematike započelo je 1924. godine, kada je kao stipendist Rockefellerove zaklade boravio u Rimu radi studijskog istraživanja, gdje mu je domaćin bio Tullio Levi-Civita, nekoć Veroneseov student.

[22] Primjerice, vremenski raspon koji Dieudonné razmatra odabran je s obzirom na stupanj rigoroznosti (preciznost definicija i korektnost dokaza) i razinu apstraktnosti postignutu u tom razdoblju, pri čemu on u predgovoru i §1 prvoga poglavlja čak i izričito kaže da *manje precizne i intuitivnije ideje* Riemanna, Kleina ili Bettija, pa čak i samoga Poincaréa predstavljaju *pretpovijest* algebarske topologije te da je riječ o „pojmovima i rezultatima […] za koje se ne može reći da konstituiraju matematičku disciplinu" (Dieudonné 1989: 15). „Usredotočio sam se na povijest onih ideja i metoda koje su otvorile nova područja istraživanja", kaže Dieudonné (*op. cit.*, str. v), potvrđujući Grattan-Guinnessovu poentu da su povjesničarima internalistima odnosno heritolozima u fokusu one i samo one matematičke ideje ili rezultati koji su imali *impact factor*.

njegovi pregledi povijesti algebarske geometrije (Dieudonné 1972) i funkcionalne analize (Dieudonné 1981) – v. *Sl. 2*.



Sl. 2. Dieudonnéov shematski prikaz povijesti razvoja funkcionalne analize; strelice označuju veze između ključnih pojmova i rezultata (preuzeto iz Dieudonné 1981: 8)

Osnovni problem s internalizmom jest u tome što, strogo govoreći, tu zapravo uopće nemamo posla s poviješću, nego s onim što je Ivor Grattan-Guinness nazvao *nasljeđem* ili *baštinom* (*heritage*): za razliku od povijesti matematike, koja postavlja pitanje *Što se, kako i zbog čega odnosno pod kojim utjecajem (ili utjecajima) dogodilo u prošlosti?*, „heritologija se bavi pitanjem *Kako smo dospjeli dovde?*, a odgovor je najčešće formuliran u maniri '*the royal road to me*' […] gdje se sadašnjost takoreći *fotokopira* preko prošlosti." (Grattan-Guinness 2004: 165) Povjesničari filozofije takav bi pristup okarakterizirali kao *interpretatio aristotelica* (ili *interpretatio hegeliana*). U posljednjih desetak godina glavni zastupnik internalističke historiografije matematike jest Viktor Blåsjö. U tekstu karakterističnoga naslova „Historiography of Mathematics from the Mathematician's Point of View" on tvrdi da aristotelovska perspektiva promatra sadašnjost i prošlost kao inherentno povezane i isprepletene, „ističući [važnost] povijesti, ali postupajući prema njoj instrumentalno", što znači da povijest matematike nije vrijedna istraživanja kao povijest, nego samo i jedino kao „dio [procesa] artikulacije i analize sadašnjih razmatranja u

matematici“, dodajući da su „matematičari svih vremena smatrali korisnim upotrebljavati povijest na takav način“ (Blåsjö 2021: 3).[23] Dakle, gotovo pola stoljeća nakon Weila, Blåsjö takoreći *à la lettre* ponavlja Weilove „upute“ o tome kako bi se trebalo baviti poviješću matematike, kao i weilovsko shvaćanje povijesti kao „bogatoga skladišta matematičkoga materijala dostupnoga svim matematičarima“ (*op. cit.*, str. 5). Kao što se jasno može vidjeti iz ovih navoda, u fokusu internalističke historiografije zapravo je sadašnjost, a ne prošlost – takvo pojednostavljeno shvaćanje povijesti matematike i sâm Blåsjö naziva prezentističkom internalističkom historiografijom matematike (*op. cit.*, str. 9). Sljedeći citat pregnantno sažima osnovna obilježja, ali i glavne nedostatke ove vrste historiografije:

> „Starije povijesne studije projicirale su suvremena shvaćanja intradisciplinarnih granica, toga što se uopće može smatrati dokazom i što definira [relevantan matematički] problem, kao i suvremene standarde egzaktnosti na matematički sadržaj koji je bio predmet njihova istraživanja. Posljedica takva pristupa bila su ‘objašnjenja’ toga sadržaja anahronim pojmovima i terminologijom, odabir tema proučavanja samo ukoliko su bile u izravnoj vezi s novijim pomacima [u dotičnom području], kao i pohvale i pokude ranijih nastojanja na temelju toga jesu li i u kojoj mjeri anticipirala (bila korak ispred) suvremeno stanje korpusa matematičkih znanja. Samim time, fokus je bio na velikim ‘uspjesima’ […] najvećih matematičara […] čije su anegdotalne biografije u najgorem slučaju bile puke hagiografije. Ti su se autori [sc. internalisti] prije svega oslanjali na vlastite matematičke kompetencije i osobno iskustvo pri prosudbi velikih matematičara, zanemarujući istraživanje i proučavanje šireg korpusa objavljenih i neobjavljenih [tekstova i povijesnih] dokumenata.“ (Kitcher & Asprey 1988: 24)[24]

Dugotrajna popularnost ovakva pristupa među samim matematičarima ne bi trebala čuditi ukoliko imamo u vidu činjenicu da su prvi povjesničari matematike, još u 18. a i kasnije u 19. stoljeću, u pravilu i sami bili matematičari, a povijest matematike shvaćali su kao *matematičku pomoćnu disciplinu* (usp. Weil, *op. cit.*, str. 228).[25] S ciljem prevladavanja brojnih nedostataka koji prezentizam čine neodrživim stajalištem, Blåsjö kao plauzibilniju internalističku alternativu predlaže takozvani *kritički internalizam* čiji je ideal „istinski povijesno mišljenje ujedinjeno s osobnom znanstveno-istraživačkom djelatnošću [u nekom području matematike], *nešto poput povijesti filozofije*.“ (Blåsjö 2021: 10, moj kurziv) Ali, *pace* Blåsjöu, upravo je u tome problem – za razliku od povijesti filozofije, koja jest filozofska disciplina, povijest matematike nije primarno matematička, nego povijesna disciplina (usp. Šikić 1989: 6), što, naravno, ne znači da se njome ne mogu baviti i nepovjesničari, pod uvjetom da (i) razumiju sam matematički sadržaj koji je predmet povijesnog istraživanja i (ii) raspolažu odgovarajućim historiografskim i interpretativnim načelima, metodama i tehnikama, kao i specifičnim znanjima iz područja pomoćnih povijesnih znanosti, nužnima

[23] V. i Blåsjö 2014, programski tekst u kojem autor brani suvremenu internalističku platformu.

[24] Ovo posljednje potvrđuje i Dieudonné koji je rekao da je „literatura o algebarskoj i diferencijalnoj topologiji veoma opsežna, a analiziranje svakoga rada bilo bi neizdrživo dosadno“ (1989: v, moj kurziv).

[25] To vjerojatno objašnjava i činjenicu da su sintagme „povijest matematike“ i „matematička povijest“ nerijetko rabili kao uzajamno zamjenjive, premda nije riječ o sinonimima. Zanimljivo je da se ista omaška može pronaći i kod Weila (1980) i kod Blåsjöa (2021), *passim*.

za nepristran (*voraussetzungslos*), adekvatan i cjelovit opis, objašnjenje ili rekonstrukciju toga matematičkog sadržaja u širem komparativnom kontekstu. Oba su uvjeta nužna jer bez (i) uopće ne može biti govora o povijesti *matematike*, dok bez (ii) također ne može biti govora o *povijesti* matematike.

U razdoblju neposredno nakon Drugoga svjetskog rata dovođenje internalističke historiografije u pitanje postajalo je sve izraženije, osobito nakon uspostave specijaliziranih studija povijesti znanosti i tehnologije. Međutim, takozvana „nova, sofisticiranija historiografija matematike" — više *eksternalistički* usmjerena — postupno se počinje razvijati nakon 1960-ih godina, dok je pravi zamah istraživanja uslijedio tek krajem 1970-ih, pionirskim radovima prve generacije profesionalnih povjesničara matematike — spomenimo samo Ivora Grattan-Guinnessa, Josepha W. Daubena ili Jeremyja J. Graya (usp. Kitcher & Asprey 1988: 21–25). Može se reći da su „matematičari izgubili historiografske ratove u 20. stoljeću i sami su za to krivi. […] *Kada su matematičari okrenuli leđa povijesti matematike*, *filozofi* […] *i autori iz drugih humanističkih disciplina bili su sretni popuniti nastalu prazninu*." (Blåsjö 2021: 6, 19, moj kurziv) Uključivanje filozofa u rasprave o povijesti matematike, premda bi na prvi pogled moglo djelovati neobično, zapravo je posve prirodno i, štoviše, očekivano, pa čak i *nužno*; o tome svjedoči i Petronijevićev citat s početka ovoga odjeljka. Naime, premda je sve do 19. stoljeća moglo izgledati da je razvoj matematike *kumulativan* proces, reformsko-modernizacijske tendencije, osobito u drugoj polovici 19. stoljeća, pokazale su da je taj proces prije svega *konceptualno transformativan*.

Još je uvijek otvoreno pitanje je li prikladno primjenjivati kuhnovsku metodologiju iz *The Structure of Scientific Revolutions* (1962., prošireno izdanje 1970.) u proučavanju povijesti matematike, a prije svega ostaje upitno tumačenje matematičkog progresa u terminima *radikalnih revolucionarnih preokreta*.[26] Jedino oko čega su sukobljeni povjesničari i filozofi matematike uspjeli postići konsenzus jest da odgovor na to pitanje u znatnoj mjeri ovisi o tome kako shvaćamo sam pojam „revolucija" (usp. Crowe 1992: 316), budući da je riječ o, poslužimo li se Galliejevom formulacijom, *u biti spornom pojmu* sa širokim dijapazonom često uzajamno suprotnih značenja (Gallie 1955/56). Primjerice, možemo govoriti o radikalnom ili *ruskom tipu* revolucija, koje se svode na „svrgavanje ili odbacivanje nekoga prethodno postojećeg entiteta [sc. matematičkog pojma, rezultata ili teorije]" (usp. Crowe 1975: 19), ili pak o konzervativnom ili *franko-britanskom tipu* revolucija u kojem „prethodno postojeći entitet" ne biva istisnut, nego opstaje kroz promjenu, ali se ipak postupno potiskuje i gubi na važnosti u svjetlu inovativnih rezultata i tehnika te, općenito uzevši, novih načina bavljenja matematikom (Gillies 1992: 5). Premda bih bio sklon priključiti se Daubenu (usp. Dauben 1984 i 1992) i drugim zastupnicima „revolucionarne" historiografije matematike, uz zapažanje da većina matematičkih revolucija pripada franko-britanskom tipu, za naše sadašnje potrebe nije nužno podrobnije ulaziti u sve nijanse i kontroverze toga spora.[27]

[26] Ključni akteri ove rasprave tijekom druge polovice 1980-ih bili su J. W. Dauben na strani zagovornika matematičkih revolucija (v. Dauben 1984) i M. J. Crowe na strani zagovornika stajališta da se revolucije nikada ne javljaju u matematici (v. Crowe 1975). Za više pojedinosti v. i klasični zbornik *Revolutions in Mathematics* (Gillies 1992a).

[27] Idejno rješenje koje je predložio Grattan-Guinness, da se umjesto o revolucijama govori o *konvolucijama* – konvoluiranju, odnosno „obavijanju i isprepletanju" starih i novih matematičkih pojmova (ili starih i novih

Postoje dvije ključne okolnosti koje nematematičarima, a prije svega filozofima, daju za pravo da se bave poviješću matematike 19. stoljeća. Prvo, povijest moderne filozofije matematike započinje takoreći u samoj matematici, odnosno u raspravama o *osnovama matematike* u drugoj polovici 19. stoljeća. Već je Frege u uvodu u *Grundlagen der Arithmetik* (Frege 1884) istaknuo da je istraživanje osnova matematike *zajednički zadatak matematike i filozofije*. U pozadini toga Fregeova uvida leži činjenica da određeni matematički problemi i rezultati mogu imati brojne krajnje neočekivane, vrlo zanimljive i potencijalno dalekosežne filozofske posljedice. Drugo, i još važnije, prvi filozofi matematike bili su upravo sami matematičari! (Primijetimo da nas to vraća Leibnizovoj rečenici kojom smo započeli ovaj odjeljak.) Jedan od najutjecajnijih europskih filozofa znanosti, Erhard Scheibe (1927–2010), u svojoj knjizi o „filozofiji fizičara" (*Die Philosophie der Physiker*, 2006) istaknuo je da je prva polovica 20. stoljeća razdoblje u kojem je fizika revolucionirana i u kojem su fizičari postali filozofi (*es war auch eine Zeit, in der die Physiker zu Philosophen wurden*), i to iz nužde (*aus Notwendigkeit*): u trenutku kada su same osnove fizike postale nesigurne i problematične, pitanje zasnivanja nije moglo biti prepušteno filozofima jer su, prema Einsteinu, „jedino fizičari najbolje znali gdje ih žulja cipela". Prema Scheibeu, upravo je ta nova kategorija „filozofirajućih fizičara" (*philosophierenden Physiker*) oblikovala suvremenu fiziku kakvu danas poznajemo.

Potpuno paralelno, u drugoj polovici 19. stoljeća, otprilike od 1870-ih godina, i u matematici se pojavljuju *philosophierenden Mathematiker* kao čelne figure procesa modernizacije koji je rezultirao suvremenom matematikom kakvu danas poznajemo. *Contra* Weilu koji se krajem 1970-ih čudio tome što su „pojedina sveučilišta osnovala katedre za 'povijest i filozofiju matematike'", ističući kako mu je teško zamisliti što bi te dvije discipline uopće mogle imati zajedničko (*sic!*) (Weil 1980: 230), ukoliko doista pretendiramo adekvatno rekonstruirati i objasniti razvoj i transformaciju matematike krajem 19. i početkom 20. stoljeća, *integrativni historijsko-filozofski pristup* matematici i pitanju njezina zasnivanja kakav je zagovarao još Petronijević apsolutno je ključan. Dakle, *i* filozofija *i* povijest matematike zajedno, *a ne ili* filozofija *ili* povijest matematike. Isto tako, dilemu internalizam *ili* eksternalizam također treba odbaciti kao lažnu. Ne samo da ta dva pristupa historiografiji matematike nisu uzajamno isključiva nego su, naprotiv, *komplementarna – i* unutarnji *i* vanjski čimbenici relevantni su za cjelovit opis povijesti određenoga područja matematike. Tu poantu možda najbolje sažima sljedeći citat:

značenja tih pojmova) tijekom formiranja i razvoja neke (djelomično) nove matematičke teorije – čini se u znatnoj mjeri zadovoljavajućim utoliko što nam omogućuje kombiniranje dinamičkih konotacija pojmova „revolucija", „inovacija" i „evolucija". Po njemu, „tijekom 'tranzicijskih' razdoblja u znanosti [i u povijesnom razvoju matematike – prim. S. P.] nove se ideje isprepleću i bore sa starima sve dok se neka nova 'normalna znanost' ne pokaže dominantnim pristupom, pri čemu, međutim, prethodna znanost u pravilu uvijek ostavlja nekakav trag." (Grattan-Guinness 1992: 280) Zanimljivo je i Grattan-Guinnessovo tumačenje dinamike novo-staro u povijesti matematike u terminima sukoba između *autsajderskih ideja* koje najčešće *ne predstavljaju napad* na same osnove uspostavljene matematičke ortodoksije *izvana*, nego potječu *iznutra*, od *insajdera* zainteresiranih za produbljivanje ili kritičko preispitivanje nekoga specifičnog detalja ili aspekta te ortodoksije. U drugom dijelu disertacije vidjet ćemo da je upravo to bio slučaj s Veroneseovim ispitivanjem nezavisnosti Arhimedova aksioma.

> „Ono što nedostaje u obama objašnjenjima [razvoja] matematike, kako povjesničarevu tako i filozofovu, upravo je njihovo preklapanje: *činjenica je da su se ti matematičari ponašali kao filozofi matematike i činjenica je da mi moramo biti i povjesničari i filozofi kako bismo to uvidjeli*. […] [B]ilo je razvojnih razdoblja [u povijesti matematike] kada matematičari nisu znali što je matematika i kada su se morali ponašati kao filozofi kako bi to doznali, baveći se analizom samih osnova svoje discipline. […] *Sugeriram da ćemo*, *promatramo li povijest matematike očima filozofa i filozofiju matematike očima povjesničara*, *pronaći zajedničko tlo i otkriti da su neki matematičari iz prošlosti već bili ondje prije nas.*“ (Gray 2009a: 8–9, moj kurziv)

Upravo je ovo metodološki pristup koji sam i sâm nastojao slijediti prilikom pisanja ove disertacije.[28] Publikacija koja danas predstavlja jedan od najboljih primjera takva pristupa jest zbornik *The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosophy*, koji su 2006. priredili J. Ferreirós i J. J. Gray, a čiji je glavni cilj „unapređenje suvremenih istraživanja u pogledu stvaranja čvršćih veza između povijesti i filozofije matematike“ (Ferreirós & Gray 2006a: 1). Međutim, ne bi trebalo zaboraviti da je Imre Lakatos još u svojoj doktorskoj disertaciji „Essays in the Logic of Mathematical Discovery“ (1961), pretočenoj nakon njegove smrti u knjigu *Proofs and Refutations* (1976), među prvima pozivao na „ujedinjenje“ filozofa i povjesničara matematike. Kao što ćemo vidjeti u Odjeljku [1.3], već širi kontekst u kojem je Veronese uveo nearhimedovsku geometriju govori u prilog usvajanju jedne ovakve kombinirane, lakatošovske metodologije. Vjerujem da će kritičko preispitivanje povijesti recepcije Veroneseove nearhimedovske geometrije u nastavku rada pokazati ne samo da se povijest i filozofija matematike *mogu* istraživati *à la fois*, nego i da bi ih tako *trebalo* istraživati, i to na dobrobit i u korist obiju disciplina, barem kada je riječ o *fin-de-siècle* matematici. Međutim, premda se čini da je riječ o interpretativnoj strategiji koja *prima facie* ima najviše izgleda za uspjeh, zanimljivo je da ona još uvijek nije univerzalno prihvaćena, o čemu svjedoči i činjenica da se najveći dio istraživanja u povijesti i filozofiji matematike i dalje odvija takoreći u izolaciji, bez uzajamne suradnje matematičara, povjesničara i filozofa matematike.

Iznimku od toga općeg trenda nesuradnje predstavlja suvremena inačica takozvane *kritičke historiografije znanosti* (poznate i kao *kritička epistemologija znanosti*), čiji su začetnici bili Léon Brunschvicg (1869–1944) i Gaston Bachelard (1884–1962), a koja se prije svega njeguje u Francuskoj, u okviru istraživačkih skupina za povijest i filozofiju matematike pri Francuskom nacionalnom centru za znanstvena istraživanja (CNRS), koje održavaju suradnju s centrima u SAD i ostatku Europe (prije svega u Italiji i Njemačkoj), a s kojima sam i sâm u više navrata imao priliku surađivati tijekom izrade doktorata.[29] „Čitava jedna generacija bila je odlučna podvrgnuti kritičkom preispitivanju nove discipline koje su transformirale tradicionalne koncepcije o prirodi i predmetu matematike: nestandardne

[28] U Popović 2017 istaknuo sam da se takva vrsta pristupa može nazvati i *filozofijom povijesti matematike*, odnosno ispitivanjem filozofskih pretpostavki i matematičkih preferencija koje (najčešće implicitno, a u nekim novijim radovima čak i eksplicitno) oblikuju rekonstruktivne i interpretativne strategije u okviru historiografskoga prezentiranja razvoja određenoga matematičkog problema ili discipline.

[29] Francuskim kolegama mogu donekle zahvaliti i za temu ovoga doktorata, s obzirom na to da su mi tijekom jednoga skupa na Sorboni 2019. godine (*11th French Philosophy of Mathematics Workshop*) skrenuli pozornost na to da je moj pristup veoma srodan kritičkoj historiografiji matematike, sugeriravši mi tada da bi upravo ono što su njemački povjesničari nazivali *Rezeptionskritik* i *Rezeptionsgeschichte* moglo postati fokus mojih istraživanja.

geometrije, aksiomatske metode, algebarske i topološke strukture, itd." (Sinaceur 2006: 311) Cilj je ovih istraživača danas postupno i fleksibilno proširivanje perspektiva u okviru suvremene povijesti i filozofije matematike u smjeru interdisciplinarnih istraživanja, s naročitim fokusom na proučavanje *povijesnih studija slučaja*[30] (usp. Goethe *et al.* 2015: 6) i povijesti *aktualne matematičke prakse* (usp. Mancosu 2008; Franklin 2014: 186), s ciljem produbljenijega razumijevanja one *melange curieux de pensées philosophiques et mathematiques* – čitave mreže složenih međuodnosa i plodonosnih interakcija filozofskih ideja i matematičkih rezultata, kao i njihova tandemskog razvoja u širem povijesnom kontekstu.

Izuzetno je zanimljivo da je i sâm Veronese u apendiksu *Fondamenti* koji je Cassirer smatrao „prvim potpunim povijesnim pregledom svih kritičkih pokušaja reforme teorije geometrijskih principa" (*einen vollständigen geschichtlichen Überblick über alle kritischen Versuche zur Erneuerung der geometrischen Prinzipienlehre*) (Cassirer 1910: 133), također zagovarao kritički pristup historiografiji matematike. Tako, on piše:

> „Nepristrana i pažljiva kritika, kako u matematici tako i u svakoj drugoj znanosti, predstavlja djelotvorno oruđe u potrazi za istinom. […] *Nepristranost* i *oslobođenost od predrasuda* uvijek moraju biti iznad svih drugih osjećaja i svih drugih subjektivnih razmatranja ili osobnih dojmova, stajališta i sklonosti. *Kritika mora biti duboko promišljena*, *jasna*, *britka i savjesna*, *te dobronamjerna* (*coll'animo verso il bene*); *autonomna i neovisna o vanjskim pritiscima i obzirima*, *uvijek u isključivom interesu znanosti*, *dužna prepoznati i istaknuti zasluge*, *važnost i plodonosnost tuđih ideja i rezultata*. Takvu kritiku […] ne samo da treba *poštovati* nego je treba i *poticati*. […] Postoji [međutim] i kritika koja vjeruje da može rušiti tuđa djela samo zato što imaju neki nedostatak, neovisno o njegovoj naravi, te da je to dovoljno da ih proglasi netočnima […]. Takva pretjerana kritika […] može imati samo pogubne posljedice." (Veronese 1891: 565, 567, moj kurziv)

Nažalost, vidjet ćemo da mnogi matematičari, povjesničari i filozofi nisu bili skloni voditi se ovim interpretativnim preporukama kada su pristupali Veroneseovu opusu. Posve nalik Fregeu koji je u prvom tomu svojega *magnum opusa Grundgesetze der Arithmetik* (1893) istaknuo da „hladna ili, bolje rečeno, nikakva" recepcija njegovih spisa počiva na neobičnoj i, prema tadašnjim matematičkim standardima, neprihvatljivoj mješavini usporednih filozofsko-matematičkih istraživanja, odviše filozofskih za matematičare (*metaphysica sunt, non leguntur!*) i odviše matematičkih za filozofe (*mathematica sunt, non leguntur!*) (Frege 1893: xii), i Veronese je, najvjerojatnije pod dojmom pretežno negativne recepcije vlastitoga *magnum opusa Fondamenti di geometria*, u predavanju „La geometria non-archimedea", pripremljenom za četvrti ICM u Rimu 1908. godine, istaknuo da bi „*matematička istraživanja o osnovama trebalo držati odvojenima od filozofskih*" (Veronese 1909: 204). I doista, čini se da su i Frege i Veronese bili u pravu. Izgleda da čak i eksternalistički usmjerenim suvremenim tumačima naprosto smeta bilo kakva mješavina matematike i filozofije te su u pravilu skloniji smatrati je manom nego vrlinom. Pogledajmo samo dva reprezentativna ulomka (a u Odjeljku [2.1] susrest ćemo se s još nekoliko):

[30] V. i zbornik *The Philosophy of Historical Case Studies* (Sauer & Scholl 2016).

> „Knjiga *Fondamenti della* (*sic!*) *geometria* G. Veronesea iz 1891. godine podijelila je publiku više nego ijedna druga knjiga iz toga razdoblja. […] To je postigla *mješavinom nove matematike* koja je bila izrazito protuintuitivna premda je navodno bila zasnovana na intuiciji *i naivnog filozofiranja*." (Gray 2008: 338, moj kurziv)
>
> „Čar Veroneseova teksta počiva na spoju filozofskih razmatranja o prirodi geometrije s praktičnim i temeljnim problemima matematike. Međutim, to predstavlja i ograničenje. S jedne strane, [Veroneseov] pristup izuzetno je napredan, ali je, s druge strane, njegov stil izlaganja veoma staromodan. […] *Konfuzija između matematike* […] *i filozofije uzrok je nedovoljne jasnoće.*" (Avellone *et al.* 2002: 381, 384, moj kurziv)

U nastavku ćemo vidjeti da ova vrsta primjedbi nije nova, te da je bila široko rasprostranjena već krajem 19. stoljeća. Za kraj ovoga odjeljka pogledajmo još samo što je sâm Veronese rekao o recepciji novih matematičkih ideja.[31] Pored čimbenika koji ponajprije ovise o samim matematičarima koji su ih formulirali[32], Veronese je osobito istaknuo

> „*protivljenje s kojim su* [nove] *ideje u početku bile dočekane i s kojim su se suočavale pri sudaru sa starim, već duboko ukorijenjenim uvjerenjima*, *dodatno osnaženima autoritetom eminentnih matematičara*, kao i ravnodušnost onih koji bi, ne želeći se ni najmanje potruditi da o njima uopće razmisle, htjeli isključiti istraživanje osnova znanosti iz domene matematike, ili pak protivljenje onih kojima su inovativni mislioci znanstveni revolucionari (*rivoluzionari della scienza*). Povrh toga, *gašenju rađajućega svjetla novih matematičkih istina pridonose i oni filozofi* koji, uvjereni u ispravnost njima poznatih i već usvojenih matematičkih principa, vide ili vjeruju da vide te nove ideje kao napad na vlastita filozofska preduvjerenja o matematici, [ne uviđajući da] ne samo matematika nego i filozofija mogu imati koristi od novih [matematičkih] činjenica." (Veronese 1909: 204–205, moj kurziv)

Treći dio disertacije trebao bi pokazati u kojoj se mjeri ova Veroneseova „dijagnoza" pokazala točnom, i to upravo u slučaju njegove vlastite teorije. Radi boljega i potpunijega razumijevanja Veroneseova matematičkog stila i atipičnoga pristupa zasnivanju matematike, u sljedeća dva odjeljka rekonstruirat ću glavne epizode iz njegove intelektualne biografije kako bih identificirao moguće utjecaje na njegov matematički razvoj, a potom ukazao i na specifične institucionalne i društvene čimbenike koji su oblikovali način na koji se matematika poučavala i proučavala tijekom 19. i početkom 20. stoljeća.

[1.2] Giuseppe Veronese – izvodi iz biografije, 1854–1889: školovanje, prvi matematički utjecaji i rani rezultati iz projektivne geometrije

Giuseppe Veronese (Chioggia, 7. 5. 1854. – Padova, 17. 7. 1917.) bio je talijanski matematičar – geometar, jedan od najistaknutijih predstavnika takozvane „Talijanske škole"[33]

[31] V. McCleary 1989 za skicu jedne opće teorije recepcije primjenjive u historiografiji matematike.

[32] „L'errore dipende o direttamente dal matematico o dalla indeterminatezza di alcune nuove idee o dalla poca chiarezza colla quale dapprima si presentano." (Veronese 1909: 204)

[33] V. Dodatak A *infra*.

u razdoblju *fin-de-siècle*, nasljednik pionira iz generacije „zlatnoga doba“ talijanske matematike nakon *Risorgimenta*, kakvi su bili Luigi Cremona (1830–1903) i Eugenio Beltrami (1836–1900). Prve godine školovanja Veronese je proveo u kjođanskom sjemeništu, gdje je započeo klasično obrazovanje, no ubrzo se prebacio u tehničku školu, nakon čega je školovanje nastavio na Tehničkom institutu u Veneciji. Ondje mu je mentor i prvi veliki matematički uzor bio *matematico sublime* (sec. L. Luzzatti) Pietro Cassani (1832–1905). Ubrzo nakon prijevoda *Pangeometrije*[34] Lobačevskog i Bolyaijeva *Apendiksa*[35] na talijanski jezik[36], Cassani, Beltramijev prijatelj i korespondent, postao je promicatelj nove hiperboličke geometrije u Italiji, isprva u radovima objavljenima u *Giornale di Matematica*, a potom i u knjizi *Saggio di geometria rigorosa* (1872), dok se usporedno bavio i istraživanjima iz područja sintetičke n-dimenzionalne geometrije i projektivnih metoda.[37] Freguglia ispravno primjećuje da je na Veronesea presudno utjecao Cassanijev *pikturalni* (vizualni) način sagledavanja matematičkih problema, određujući time smjer i pružajući metodu za Veroneseova buduća istraživanja (Freguglia 1998[38]). Pored Cassanija, na Veronesea je tijekom studija u Veneciji po svoj prilici utjecao i filozof Giorgio (Juraj) Politeo koji je razvio *teoriju intuitivnih sposobnosti*, a čijim se opusom bavila Heda Festini.[39] Na maturskom ispitu (*esame di licenza*) Veronese je dobio odličnu ocjenu iz svih predmeta osim – ironično – iz matematike, iz koje je na pisanom dijelu ispita isprva pao, da bi ga iz drugoga pokušaja uspješno položio s ocjenom *eccellente*. U komemorativnom govoru prigodom otkrivanja Veroneseove biste na Sveučilištu u Padov, Bordiga je zapazio da se već „u ovoj maloj epizodi skriva istinsko obilježje života zrela znanstvenika: duge bitke, osujećene pobjede, siguran trijumf (*saldo trionfo*).“ (Bordiga 1931: 66; usp. i str. 71)

---

[34] N. I. Lobachevsky, *Пангеометрия*, 1855 (francusko izdanje, *Pangéométrie*, 1856). Kao što je poznato, *Pangeometrija* je posljednji spis Lobačevskog. Njegova najranija publikacija posvećena zasnivanju neeuklidske geometrije, „О началах геометрии“, objavljena je u vjesniku Kazanskoga sveučilišta još 1829–30, a njegov vjerojatno najznačajniji doprinos predstavlja studija *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* iz 1840. godine.

[35] J. Bolyai, *Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei*, 1832. Bolyaijev se spis doista pojavio kao dodatak knjizi *Tentamen* njegova oca, Farkasa (Wolfganga) Bolyaija. Zanimljivo je da je imprimatur *Tentamena* datiran 12.10.1829, upravo u godini u kojoj se pojavila i prva publikacija Lobačevskoga.

[36] G. Battaglini objavio je 1867. studiju „Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky“, čiji je posljednji dio sadržavao prijevod francuskoga izdanja *Pangeometrije* (usp. *GdM*, T. V, str. 217–231), a već 1868. objavio je i zaseban prijevod *Apendiksa*.

[37] Usp. P. Cassani, „Geometria pura euclidiana ad n dimensioni“, *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, Vol. LII (S. VII – T. V), 1893–94; „Sulla proiezione stereoscopica“, *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, Vol. LXII (S. VIII – T. V), 1902–3. Za više pojedinosti o Cassanijevim matematičkim rezultatima v. G. Ricci-Curbastro, „Commemorazione del prof. Pietro Cassani“, *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti* 66, 1906–7, str. 175–189.

[38] V. i njegov prilog za Edizione Nazionale *Matematica Italiana* na https://matematicaitaliana.sns.it/autori/1302/ (usp. i Freguglia 1998).

[39] V. Festini 1977 i seriju radova „Politeova misaona krivulja“objavljenih u *Prilozima za istraživanje hrvatske filozofske baštine*, 1996–1998.



Sl. 3. Eugenio Bellotto, Busto ritratto di G. Veronese (1933). Pallazo del Bo, Padova.
(Catalogo generale dei Beni Culturali, codice: 0500090759)

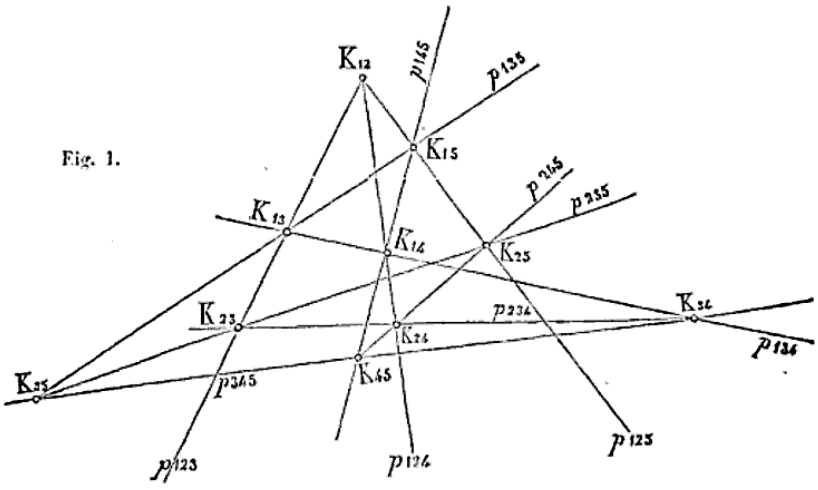
Nakon uspješno položene mature, Veronese se zahvaljujući stipendiji grofa N. Papadopolija 1873. godine upisuje na federalni Politehnički institut u Zürichu (*Polytechnikum*, današnji ETH), isprva na Odjel za mehaniku, potom 1874. prelazi na specijalizirani Odjel za obrazovanje nastavnika (*Fachlehrerabteilung*), no uvidjevši da ga ponajprije zanimaju studiji čiste, a ne primijenjene matematike, nakon nepune dvije godine prelazi na Odjel za matematiku, gdje intenzivno radi pod mentorstvom geometra Wilhelma Fiedlera (1832–1912), suvoditelja Matematičkog seminara (zajedno s Ferdinandom Frobeniusom (1849–1917), Weierstraßovim učenikom i, od 1893, nasljednikom Kroneckerove katedre u Berlinu). Autor niza udžbenika iz deskriptivne, projektivne i algebarske geometrije („Salmon–Fiedler"), Fiedler je odigrao važnu ulogu u osuvremenjivanju i reorganiziranju matematičkog obrazovanja u Italiji, o čemu svjedoči njegova intenzivna epistolarna razmjena s nizom talijanskih matematičara, prije svega s Cremonom.[40] Još važnije, Fiedlerov je utjecaj nedvojbeno bio presudan za Veroneseovo definitivno opredjeljenje za bavljenje geometrijom.

U trećoj godini studija, 1876., potaknut jednim pitanjem u vezi s *Pascalovim teoremom* (o tetivnom šesterokutu) iz Schrötterova izdanja Steinerovih *Vorlesungen über syntetische Geometrie*, Veronese je pripremio izlaganje za Fiedler-Frobeniusov seminar. Pascalovim se teoremom („Essai pour les coniques", 1640) tvrdi da će, ako se odabere šest proizvoljnih točaka A, B, C, D, E i F na nekoj konici (konusnom presjeku – elipsi, paraboli ili hiperboli) $\mathcal{C}$, koje se potom spoje dužinama (ma kojim redoslijedom) tako da tvore šesterokut, sjecišta (produljenih) stranica šesterokuta $G = AB \cap DE$, $H = BC \cap EF$, $I = AC \cap DF$ biti *kolinearna*, odnosno ležati na jednom te istom pravcu koji se naziva *Pascalov pravac* šesterokuta $ABCDEF$.[41] Geometre u 19. stoljeću naročito je zanimalo ispitivanje svojstava konfiguracije

[40] V. Confalonieri *et al.* 2019, naročito str. 171–228. Za prepisku s Veroneseom v. str. 281–326.

[41] Sâm Pascal nije ponudio dokaz ovog teorema. Za različite moguće dokaze v. Conway & Ryba 2012. Zanimljivo je da se John H. Conway (1937–2020), tvorac jedne od najvažnijih suvremenih teorija nearhimedovskih veličina – teorije nadrealnih brojeva (*surreal numbers*) i takozvanoga apsolutnog aritmetičkog kontinuuma („svih velikih i malih brojeva") – i, u određenom smislu, Veroneseov nasljednik i nastavljač,

Hexagrammum Mysticum (HM), koja nastaje od 60 različitih Pascalovih pravaca (dobivenih promjenom rasporeda prvotnih šest točaka) i 60 njima odgovarajućih šesterokuta (što daje 60 različitih instanci Pascalova teorema). Primjerice, u HM-konfiguraciji uočava se sljedeće: 60 Pascalovih pravaca, u skupinama po tri, prolazi kroz 20 točaka („Steinerove točke"); Steinerove točke, u skupinama po četiri, leže na 15 „Plückerovih pravaca"; 60 Pascalovih pravaca može se povezati i sa 60 točaka („Kirkmanova čvorišta") na takav način da svaka točka leži na trima pravcima, a svaki pravac sadrži tri točke; Kirkmanova čvorišta, u skupinama po tri, leže na 20 „Cayleyevih pravaca" (od kojih svaki uvijek sadrži i po jednu Steinerovu točku); naposljetku, Cayleyevi pravci, u skupinama po četiri, prolaze kroz 15 „Salmonovih čvorišta", što sve zajedno govori o „stanovitom reciprocitetu" (prema Hesseu) i „općoj korelaciji" (prema Schrötteru) između navedenih elemenata.[42] Pitanje u vezi s HM-konfiguracijom koje je prije svega zanimalo Veronesea bilo je počivaju li reciprocitet i korelacija o kojima govore Hesse i Schrötter na činjenici da se karakteristične točke i pravci HM-konfiguracije odnose jedni prema drugima kao *polovi* prema *polarama*. Kako bi to utvrdio, Veronese je rastavio *Hexagrammum Mysticum* (60 Pascalovih pravaca + 60 Kirkmanovih čvorišta) na šest međusobno povezanih sastavnica koje je nazvao π-figurama[43], a koje se sastoje od 10 Pascalovih pravaca tipa p, na kojima, tri po tri, leži 10 njima odgovarajućih Kirkmanovih čvorišta tipa K (*Sl. 4*), te je pokazao da su pravci p i točke K *homologni* s obzirom na polarno preslikavanje (koje svaku točku preslikava u njezinu polaru, a svaki pravac u njegov pol) koje čuva *incidenciju*, odnosno relacije poretka.



Sl. 4. Veroneseove π-figure na Pascalovu *Hexagrammum Mysticum* (preuzeto iz Veronese 1876: 660)

Veroneseovih šest π-konfiguracija HM-a tako daje „šest različitih polarnih sustava" (*sei sistemi polari differenti*) odnosno šest različitih polarnih preslikavanja (pri čemu bilo kojih

---

također zanimao za Veroneseove mladenačke rezultate iz područja projektivne geometrije, koje je, kao i njegove uvide o apsolutnom kontinuumu, generalizirao i proširio (v. Conway & Ryba 2013). Za više pojedinosti o Conwayevoj (ili Conway-Ehrlichovoj) teoriji nadrealnih brojeva v. Odjeljak [4.2] ove disertacije.

[42] Za povijesni pregled važnih rezultata u vezi s HM-konfiguracijom v. Veronese 1876: 649–651.

[43] Conway & Ryba (2013: 44ff.) Veroneseove π-figure nazivaju „Veroneseovim dekagramom" ili „Veroneseovim multimysticumom".

pet π-figura određuje šestu), čime se na posve nov, iscrpan i najpotpuniji način rasvjetljuju odnosi između karakterističnih elemenata čitave konfiguracije (v. Teoreme XI i XII u Veronese 1879: 660–661; v. također Veroneseove tablice π-konfiguracija (*op. cit.*, str. 661–662) te usp. s „Multimysticum Picture" koja proširuje standardnu HM-konfiguraciju iz Conway & Ryba 2013: 47). Povrh toga, Veronese je uvidio da standardna HM-konfiguracija od 60 Pascalovih pravaca i 60 Kirkmanovih čvorišta predstavlja „samo polovicu cjelokupne figure", te da zapravo postoji *beskonačan niz sustava* tipa $(60)_3$ sastavljenih od 60 drugih točaka Z i 60 pravaca z *s istim svojstvima* (*mit denselben Eigenschaften*) kao izvorna figura sastavljena od Kirkmanovih čvorišta i Pascalovih pravaca (s kojom dijele zajedničke Steinerove točke i Cayleyeve pravce, kao i „mnoga druga neobična svojstva" (*viele andere curiose Eigenschaften*)), ali te druge figure nisu recipročne u odnosu na *Hexagrammum Mysticum* s obzirom na konusni presjek (v. pisma Fiedleru od 11.09. i 24.12.1876. u Confalonieri *et al.* 2019: 288–289). Naročito valja istaknuti da je Veronese do tih rezultata došao *čisto sintetičkim putem* (najčešće posredstvom razmatranja sličnosti trokuta), a ne analitički ili algebarski, kako je to bilo uobičajeno. U jednom od pisama Fiedleru (od 19.07.1877.) Veronese je skromno istaknuo kako se nada da nije napisao najljepši, nego najpotpuniji rad od svih dotadašnjih o toj temi.

Upravo je ovaj opsežan pionirski rad s čak 64 nova teorema postao Veroneseova prva službena publikacija, „Nuovi teoremi sull'*Hexagrammum mysticum*", objavljena u *Atti della R. Accademia dei Lincei* na Cremonin prijedlog, nakon što je rad prethodno u Akademiji predstavio Giuseppe Battaglini u travnju 1877. godine. I ne samo to, potaknuvši Cremonu da se i sâm pozabavi problemom Pascalova šesterokuta, ovaj je, nakon što je analitičkim (algebarskim) putem (razmatranjem kubnih ploha) verificirao Veroneseove rezultate[44], ponudio Veroneseu u studenome 1876. – tada još uvijek nediplomiranom studentu – mjesto asistenta na Sveučilištu u Rimu, pri Katedri za projektivnu i deskriptivnu geometriju. Veronese je potom apsolvirao te upisao četvrtu godinu studija matematike, gdje je kod Cremone slušao geometriju, a kod Battaglinija teoriju kvadratnih formi; povrh toga, bavio se i mehanikom, ali slijedeći ideje opće projektivne geometrije ili pak neeuklidske geometrije (v. postskript pisma Fiedleru od 01.12.1877.). Cremona je također pristao studiju o Pascalovu šesterokutu prihvatiti kao Veroneseov diplomski rad (*dissertazione di laurea*). O izuzetno pozitivnoj recepciji Veroneseovih najranijih znanstvenih rezultata svjedoči činjenica da je Giusto Bellavitis, čiju će Katedru za analitičku geometriju u Padovi Veronese naslijediti 1881. godine, u svom prikazu iz 1877–78. istaknuo da su oni „uistinu duboki i hvalevrijedni", dok je Veroneseov prvi mentor, Fiedler, već 1878. uvrstio njegove rezultate u četvrto njemačko izdanje Salmonova udžbenika iz analitičke geometrije konika (navedeno prema Segre 1917: 477, nap. 8).[45]

Veronese je bio Cremonin asistent četiri godine, do 1880. Korespondencija iz toga razdoblja, prije svega s Fiedlerom, otkriva nam Veroneseovo zanimanje za *metodiku i didaktiku matematike*, temu kojoj će se vraćati do kraja života (osobito u spisima posvećenima osnovama

[44] Zanimljiva komparativna analiza Veroneseova i Cremonina pristupa Pascalovu šesterokutu može se pronaći u Brigaglia 2023.

[45] Pored toga, Veronese je na Fiedlerov savjet svoj rad poslao i Kirkmanu, Salmonu, Cayleyu, Bauru, Kleinu, Sturmu i Lürothu (v. pisma od 19.07. i 01.12.1877.).

geometrije), a kojom se nesumnjivo počeo baviti pod zajedničkim utjecajem Fiedlera i Cremone. Tako, primjerice, možemo vidjeti da se Veronese s Fiedlerom savjetuje oko *deskriptivnih* i *nacrtnih metoda* (za koje ističe da ih smatra najprikladnijima za rad sa studentima na vježbama), s ciljem što boljega i što neposrednijega (takoreći zornoga) razumijevanja geometrijskih problema koji se obrađuju (v. pismo od 06.04.1878.). Također, posuđujući izraz Benjamina Peircea (1809–1880), oca C. S. Peircea (1839–1914), kod Veronesea u tom razdoblju primjećujemo i jasnu tendenciju prema „geometriziranju matematičkih pitanja" (usp. Klein, „Clebsch Lecture" iz 1911.) i uporabi *vizualnih modela*. Štoviše, Veronese će 1883. postati inicijator i *spiritus movens* ideje o osnivanju u Italiji centra za izradu geometrijskih modela prikladnih za podučavanje i istraživanja, po uzoru na slične ustanove u Francuskoj i Njemačkoj.[46] Na Fiedlerov prijedlog Veronese počinje razmatrati i *projektivne metode* i *konstrukcije*, te se intenzivnije baviti projektivnom geometrijom, o čemu svjedoči i rad „Teoremi e costruzioni di Geometria proiettiva" (*Giornale di Matematica*, 1879), a *Accademia dei Lincei*, na prijedlog Cremone i Battaglinija, 1879–80. i 1880–81. objavljuje Veroneseove opsežne studije o konfiguracijama točaka, pravaca i ravnina konusnih presjeka i ploha drugoga reda.

Veronese 1880. godine odlazi na usavršavanje u Berlin, ali na Cremoninu preporuku ubrzo prelazi u Leipzig, gdje je upravo Felix Klein, tvorac *Erlangenskoga programa* (v. Dodatak B), postao predstojnik Katedre za geometriju. Suradnja s Kleinom trajala je tijekom zimskoga i proljetnoga semestra 1880/81, a Veronese je u tom razdoblju na Kleinovu seminaru najprije održao predavanje iz područja teorije projektivnih grupa (03.01.1881.) utemeljeno na prethodno objavljenim radovima „Notevoli configurazioni" (1879/80. i 1880/81.), a potom i važno predavanje pod naslovom „Über die darstellende Geometrie im Räume von vier Dimensionen" (24.04.1881, na Kleinov rođendan), što svjedoči o njegovu zanimanju za *geometriju višedimenzionalnih prostora*, o kojoj već tijekom 1880. u pismima Fiedleru govori kao o „veoma korisnoj metodi istraživanja" (*sehr nützliche Untersuchungsmethode*). Kruna istraživanja provedenih pod Kleinovim mentorstvom bila je opsežna studija „Behandlung des projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens" objavljena 1882. godine na Kleinov prijedlog u *Mathematische Annalen* (Bd. 19).[47] Već u uvodnom dijelu Veronese ističe da svi drugi radovi posvećeni n-dimenzionalnoj geometriji „imaju analitičku formu", dok se, nasuprot tomu, on prvi put sustavno služi sintetičkom metodom, odnosno „onom metodom koja proizlazi iz fundamentalnih operacija projiciranja i presijecanja", a čak i ondje gdje se oslanja na analitičku metodu, „uvijek je interpretira na intuitivan način (*in anschaulicher Weise*)" (Veronese 1882a: 161). U jednom pismu Fiedleru iz iste godine (od 24.06.), Veronese je iznio uvjerenje da ne može biti geometrije ako izostane čista geometrijska ideja prostora (*reine geometrische Gedanke des Raumes*), te da se njegov rad o n-dimenzionalnoj geometriji razlikuje od radova

[46] V. F. Palladino, *Il fondo di modelli e strumenti matematici antichi dell'Università di Padova e l'iniziativa di Giuseppe Veronese per un Laboratorio nazionale italiano*, Padova: Grafiche Erredici, 1999.

[47] Anticipacija pojedinih uvida iz rada objavljenoga u *Math. Annalen* može se pronaći u Veroneseovu radu „Alcuni teoremi sulla geometria a n dimensioni", koji se nešto ranije pojavio u *Transunti della R. Accademia dei Lincei* (1880-81), kao i u njegovu kraćem, prvotno objavljenom radu u *Math. Annalen* (Bd. 18, 1881).

drugih matematičara, od Cayleya do Riemanna, upravo po tome što polazi od te čiste geometrijske ideje kao osnovne. Štoviše, on i eksplicitno kaže da geometrija od Cayleya do Riemanna „nije ništa drugo doli matematička analiza“.[48]

Prelazeći na heuristička razmatranja, Veronese ističe da n-dimenzionalna geometrija još uvijek nije prepoznata kao pomoćno sredstvo (*Hilfsmittel*) za proučavanje projektivnih relacija i dodaje da je za „proučavanje konfiguracija sastavljenih od n+1 točaka i jedne krivulje ili od jedne dvodimenzionalne ravnine (koje posjeduju određene singularitete[49]) u uobičajenom [trodimenzionalnom] prostoru R^3 često veoma korisno najprije pronaći neku konfiguraciju ili jedno- ili dvodimenzionalnu strukturu u n-dimenzionalnom prostoru R^n iz koje prvotna struktura izranja (*entsteht*) na jedinstven način posredstvom odgovarajuće projekcije ili presjeka.“ (*ibid.*) Štoviše, Veroneseova metoda omogućuje proučavanje ne samo neke zadane zasebne konfiguracije nego, posve uopćeno, proučavanje čitave klase takvih struktura, koje sve zajedno predstavljaju projekcije ili presjeke polazne strukture. Pojednostavljeno, Veroneseova je temeljna ideja da su strukture u prostoru R^n naprosto *uvijek jednostavnije* (*immer einfacher*) za proučavanje od onih u R^3, te da se stoga mogu obrađivati mnogo bolje i učinkovitije.[50] Primjerice, proučavanje složenih ploha u običnom prostoru (*spazio ordinario*) postaje jednostavnije promatramo li ih kao projekcije ili presjeke hiperploha u općem prostoru (*spazio generale*)[51], pojedine singularne krivulje postaju nesingularne ako se promatraju u odgovarajućem projektivnom prostoru, itd. (usp. Slembek 2007: 286, Avellone *et al.* 2002: 381).

Zahvaljujući Veroneseovu radu, projektivna geometrija hiperprostora prvi je put sustavno razvijena i organizirana kao čisto geometrijska disciplina, dakle sintetički, a ne kao neki oblik analize ili algebre. Povrh toga, kako primjećuje Segre – i sâm Kleinov učenik i pionir n-dimenzionalne geometrije – nakon Veronesea upravo je to postala dominantna metoda i način rada, kako u Talijanskoj školi, tako i izvan granica Italije (Segre 1917: 478–9).[52] Sâm Veronese najveću je prednost svoje metode vidio u *izravnom* manipuliranju geometrijskim entitetima *qua* geometrijskima: „najispravnija metoda jest ona koja *figure uvijek tretira kao figure* i koja radi izravno s njihovim elementima“ (Veronese 1891: xix; moj kurziv). Drugim riječima, tu više nije bilo riječi o jednadžbama koje opisuju nekakve „čisto analitičke

[48] „Zum Fundament meiner Abhandlungen gibt's das reine geometrische Gedanke eines n-dim. Raumes, während bei den andern finden wir nur das analytische Gedanke. […] In der That, wenn wir die gewöhnliche analytische Geometrie von den geometrischen Gedanken befreien, so bleibt uns nur Analysis, und daher *nichts anders als Analysis ist die Geometrie von Cayley bis Riemann*.“ (citirano prema Confalonieri *et al.* 2019: 296, moj kurziv)

[49] Točke u kojima se dani matematički objekt ne ponaša na očekivan, dobro definiran i predvidljiv način.

[50] Naravno, to ne znači da su i svi Veroneseovi suvremenici bili skloni prihvatiti to Veroneseovo uvjerenje – s tim u vezi v. Odjeljak [2.3] o sporu Veronese–Peano glede statusa geometrije hiperprostora. *Pace* Veroneseu, iz perspektive suvremene algebarske geometrije, osobito nakon Grothendieckovih *Éléments de géométrie algébrique* (1960-67), strogo matematički promatrano nije točno reći da je rad s višedimenzionalnim strukturama uvijek i po pravilu jednostavniji (kako je to Veronese smatrao).

[51] Za Veroneseovu koncepciju općega prostora v. Odjeljak [2.3] ove disertacije.

[52] V. i Veroneseov osvrt „Sulle definizioni di spazio e di geometria a n dimensioni e del principio di proiezione e sezione“ (osobito napomene u fusnotama) u Veronese 1891: 609–614. Usp. i Segreovu monografsku studiju „Mehrdimensionale Räume“ u Kleinovoj *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 3 (Segre 1921).

entitete“ („točke“ parametrizirane realnim ili kompleksnim brojevima), nego o „točkama upravo onakvima kakve su one u običnom prostoru“ (*op. cit.*, str. 611–12). U odjeljcima [2.4] i [2.5] ove disertacije podrobnije ćemo razmotriti te metodološke napomene u kontekstu zasnivanja *nearhimedovske* to jest *infinitezimalne geometrije*.

Drugi veliki i vjerojatno najznačajniji, a svakako i danas najpoznatiji Veroneseov rezultat, koji je proizašao iz suradnje s Kleinom, a potom ostvario snažan utjecaj u *algebarskoj geometriji* jest uvođenje 1884. godine „vjerojatno najpoznatije hiperplohe u povijesti matematike: *varietà di Veronese*, algebarske plohe u petodimenzionalnom prostoru, među čijim se presjecima i projekcijama[53] mogu pronaći neke od najvažnijih ploha običnoga [sc. trodimenzionalnog] prostora“ (Avellone *et al.* 2002: 381), primjerice Steinerova *Rimska ploha* koja nastaje projekcijom Veroneseove plohe u trodimenzionalni prostor. Baveći se konusnim presjecima odnosno ravninskim krivuljama drugoga stupnja (kao i u svom pionirskom radu iz 1876. godine), Veronese je u radu „La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue projezioni nel piano e nello spazio ordinario“ došao do strukture koja danas nosi njegovo ime – *Veroneseove plohe* – posredstvom preslikavanja ν koje se danas naziva *Veroneseovim preslikavanjem* ili *Veroneseovim utapanjem* projektivne ravnine u petodimenzionalni projektivni prostor:

$$\nu : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5.$$

Takozvani *Veroneseov varijetet* predstavlja poopćenje Veroneseova preslikavanja na više dimenzije. Preciznije, za neku zadanu dimenziju n i pozitivan cijeli broj odnosno stupanj d, Veroneseovo utapanje ν_d predstavlja preslikavanje

$$\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N,$$

gdje je $\mathbb{P}^n$ projektivni prostor dimenzije n (nad nekim poljem K), a $\mathbb{P}^N$ takozvani ciljni projektivni prostor dimenzije N. Dimenzija N ciljnoga prostora $\mathbb{P}^N$ dana je binomnim koeficijentom $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Ako točka ima homogene koordinate $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$, onda je

$$\nu_d([x_0 : x_1 : \cdots : x_n]) = \left[\ldots, x_0^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}, \ldots\right],$$

gdje su koordinate u ciljanom prostoru $\mathbb{P}^N$ svi mogući monomi ukupnog stepena d s varijablama $x_0, x_1, \ldots, x_n$ odnosno svi odabiri nenegativnih cijelih brojeva za koje vrijedi $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = d$. Budući da je broj takvih monoma upravo $\binom{n+d}{d}$, dimenzija ciljnoga projektivnog prostora iznosi $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Neformalnije rečeno, formula $\nu_d([x_0 : x_1 : \cdots : x_n]) = \left[\ldots, x_0^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}, \ldots\right]$ govori nam da uzmemo sve moguće monome stupnja d koji se mogu konstruirati od koordinata $x_0, x_1, \ldots, x_n$, te da ih upotrijebimo kao nove homogene (projektivne) koordinate, pri čemu nam eksponenti $a_0, \ldots, a_n$ govore koliko se puta pojedina koordinata pojavljuje u monomu, a ključno je da njihov zbroj uvijek bude jednak d. Primjerice, u jednostavnom slučaju prostora $\mathbb{P}^1$, gdje je

[53] Zahvaljujući, ponovno, Veroneseovoj metodi iz 1882!

točka određena samo dvjema varijablama odnosno dvjema koordinatama x i y, za Veroneseovo utapanje stupnja $d = 2$ dobivamo preslikavanje $[x: y] \rightarrow [x^2: xy: y^2]$.[54]

Ključno svojstvo ovako definiranoga Veroneseova utapanja jest sljedeće: budući da v_d uzima točku iz $\mathbb{P}^n$ i preslikava je u $\mathbb{P}^N$ koristeći sve monome stupnja d, ono *efektivno linearizira* sve polinomne jednadžbe. Intuitivno promatrano, to nam omogućuje da objekte koji u izvornom prostoru izgledaju složeno i zakrivljeno „ispravimo" i „izravnamo", a time i pojednostavimo. Na taj način možemo proučavati različite algebarske krivulje, plohe i višedimenzionalne varijetete transformacijom nelinearnih problema u linearne posredstvom uvođenja novih koordinata koje omogućuju da izvorne nelinearne jednadžbe ponovno zapišemo kao linearne, čime se njihov matematički tretman znatno olakšava. Osobito je zanimljiv slučaj u kojem je $n = 2, d = 2$ i koji odgovara takozvanomu *kvadratnom Veroneseovu utapanju*, važnom za reprezentaciju i klasifikaciju konika kao višedimenzionalnih hiperploha. Dakle, Veroneseovo se utapanje može promatrati kao svojevrsna *zoom out* metoda (prelazak na višedimenzionalne prostore) koja olakšava analizu i rad sa složenim geometrijskim objektima. Stoga ne iznenađuje da je povodom stopedesete obljetnice Veroneseova rođenja organiziran veliki skup posvećen upravo Veroneseovoj plohi i projektivnim varijetetima (v. zbornik Ciliberto *et al.* 2004).

Nakon što je 1880. uslijed Bellavitisove smrti upražnjena Katedra za analitičku geometriju Sveučilišta u Padovi, Veronese je nakon provedenoga natječaja 1881. postao njegov nasljednik i izvanredni profesor sa svega dvadeset i sedam godina. To je donekle ironično budući da se Bellavitis, za razliku od Veronesea, bavio analitičkom, a ne sintetičkom ili deskriptivnom geometrijom, a povrh toga je bio i izrazito konzervativan i isključiv u pogledu bilo kakvih inovacija u geometriji i, uopće uzevši, područja koja je smatrao dopuštenima za proučavanje. Primjerice, za razliku od Cremone i Beltramija, Bellavitis je „nove" geometrije – geometriju hiperprostora i neeuklidsku geometriju – smatrao „lažnim geometrijama" i „geometrijskim aberacijama". „Tako je baštinik najmodernijih stremljenja u geometriji naslijedio ogorčenoga kritičara upravo tih stremljenja." (Segre 1917: 480, nap. 18) Veroneseovo promaknuće u redovitoga profesora po svoj je prilici bilo obilježeno nizom javnih i novinskih rasprava, skandala i političkih intriga (za pojedinosti v. Goodstein 2018, Chs. 4, 6). Najizgledniji protivnik na nacionalnom natječaju raspisanom 1886. bio mu je Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925), tvorac tenzorskoga računa. Rasprave su okončane nakon što se u izbor umiješao Cremona, otac Talijanske geometrijske škole, uputivši tadašnjem ministru prosvjete M. Coppinu sljedeću preporuku za Veronesea:

> „[N]itko se ne može usporediti s [Veroneseovom] iznimnom briljantnošću, kreativnošću i izrazitom originalnošću. […] Kada bi bilo koja katedra za geometriju, čistu ili analitičku, višu ili nižu, bila raspisana za profesuru, Veronese bi stopostotno bio pobednik. […] Stoga ga predlažem u interesu znanosti i obrazovanja i uvjeren sam da će uvaženi Coppino i ovom prilikom, kao što je to učinio već nebrojeno puta do sada, prihvatiti moju preporuku koja ne počiva ni na kakvim osobnim

[54] Za više pojedinosti v. poglavlje „Regular Functions and Maps" u poznatom Harrisovu udžbeniku *Algebraic Geometry. A First Course*, New York: Springer Science+Business Media, 1992, str. 23–25.

motivima.“ (iz pisma G. Vlahovića, rektora Sveučilišta u Padovi, 1886; navedeno prema Goodstein 2018: 37)

Veronese je postao *professore ordinario* 1887. godine i predavao je geometriju u Padovi do kraja života, 1917. godine. Za naše su potrebe najznačajnija dva desetljeća, od 1889. do 1909, koja predstavljaju najturbulentnije razdoblje Veroneseove znanstvene djelatnosti tijekom kojega je radio na zasnivanju, razvoju i obrani svoje nove, nearhimedovske geometrije. To će razdoblje, odlučujuće za pravilno i cjelovito razumijevanje recepcije njegovih ideja u 20. stoljeću, biti zasebno i podrobno razmotreno u narednim dijelovima disertacije.

Veronese je ostvario i zapaženu političku karijeru: obnašao je dužnost kjođanskoga i padovanskoga *consigliere comunale* (1882–85), bio je član Zastupničkoga doma Talijanskoga parlamenta (*Collegio elettorale di Chioggia*, 1897–1900), te senator Kraljevine Italije (1904–1917). Liberalno-progresivno i demokratski usmjeren, predano se bavio pitanjima od prvorazrednoga javnog interesa, ponajprije u području obrazovanja, „radeći uvijek za opće dobro i boljitak naroda“ (Segre 1917: 483).[55, 56]

Dodatak A. O povijesnom značaju (nacionalnih) matematičkih škola, s posebnim osvrtom na rad „Talijanske matematičke škole“

Jedna od povijesno najznačajnijih i, s obzirom na posljedice, najdalekosežnijih promjena u institucionalnoj (re)organizaciji matematičkoga rada nastupila je u 19. stoljeću, uspostavom isprva relativno malobrojnih, a potom sve brojnijih istraživačkih skupina – modernih matematičkih škola – čija je brza proliferacija tijekom 20. stoljeća rezultirala suvremenom matematikom kakvu danas poznajemo i učimo. Matematičke istraživačke škole u obliku instituta i seminara začete su u Njemačkoj, prije svega u Pruskoj, i to kao reakcija na postrevolucionarnu reformu obrazovnoga sustava i sveučilišnih kurikuluma u Francuskoj. Naime, za razliku od francuskoga pristupa didaktici i metodici matematike i, općenito uzevši, matematičkom obrazovanju, u kojemu je naglasak bio na izradi kvalitetnih udžbenika posredstvom kojih bi se u vodećim nacionalnim središtima, poput pariških École Normale Supérieure ili École Polytechnique (obje osnovane 1794, svega nekoliko godina nakon Revolucije), obrazovala nova tehno-birokratska elita koja bi primjenom stečenih matematičkih znanja u području tehnike, inovacija i financija predvodila proces ubrzane industrijalizacije i opće društvene modernizacije, u Njemačkoj je prevladavao suprotan, *neohumanistički* i neutilitarni pristup obrazovanju u duhu humboldtovske tradicije *Bildunga* i načela *Lehr-und-Lernfreiheit*, s naglaskom ne toliko na čitanju i proučavanju samih

[55] Za više pojedinosti o Veroneseu kao političaru v. Gibin 2004. Stenografski zapisi koji dokumentiraju Veroneseovo djelovanje u Senatu dostupni su na:

http://notes9.senato.it/web/senregno.nsf/bf755893b3fe46fcc1257bec004d7bb0/7064be062517868d4125646f00616c2d?OpenDocument#. V. Odeljak D. bibliografije na kraju disertacije.

[56] Detaljna Veroneseova biografija jest Bullo 1904; v. također Baldassarri Ghezzo 1995. Dodatni biografski podaci mogu se pronaći i u Segre 1917, Severi 1920 i Bordiga 1931. V. Odjeljak C.I bibliografije na kraju disertacije.

matematičkih tekstova koliko na predavanjima (*Vorlesungen*) i seminarima često vrlo utjecajnih matematičara koji su u pravilu bili sveučilišni, a znatno rjeđe gimnazijski profesori. Naročito važna odlika njemačkoga sustava očitovala se u činjenici da su seminari, uz obrazovnu, oduvijek imali i znanstveno-istraživačku funkciju (profesori su studentima predavali ono na čemu su u tom trenutku i sami radili), predstavljajući prirodan poticaj studentima za započinjanje vlastitih matematičkih istraživanja (usp. Mehrtens 1976: 314).

Dakle, kada govorimo o matematičkom obrazovanju, u Njemačkoj je naglasak bio prije svega na usmenoj komunikaciji i *viva voce* artikulaciji i razradi novih matematičkih ideja te uspostavi svojevrsnoga *Vorlesungskanon*-a (Ullrich 1989: 145), što je potom dovelo i do pojave nove vrste matematičkih tekstova – *skripata* i (autoriziranih) *bilježaka s predavanja*. Tako su, primjerice, E. E. Kummer (1810–1893) i K. Weierstraß (1815–1897) nakon osnutka Matematičkoga seminara u Berlinu 1861. nabavili francuske udžbenike za seminarsku knjižnicu koje studenti gotovo uopće nisu koristili, naprosto zato što je umjesto čitanja, primjerice, Cauchyjeva *Cours d'Analyse* (1821) bilo višestruko korisnije pohađati Weierstraßova predavanja iz analize (usp. Rowe 2002: 116–120). Kao što je ispravno primijetio Rowe,

> „[k]ljučni prateći učinak procesa postupnoga gubljenja hegemonije pisane riječi i pojave novoga stila istraživanja, u kojemu se matematičke ideje i norme ponajprije prenose usmeno, jest i novo razumijevanje matematičkih praksi kao zajedničkih, odnosno skupnih pothvata, a ne samostalnih aktivnosti izoliranih pojedinaca [kao što je to bio slučaj u, primjerice, matematici 17. ili 18. stoljeća – prim. S. P].“ (*op. cit.*, str. 118, moj kurziv)

Moderne matematičke škole, poput centara u Königsbergu, Berlinu, Göttingenu, Leipzigu ili Erlangenu, u početku su obilježavale manje, neformalno ustrojene *istraživačke skupine*, uglavnom okupljene oko nekoga istaknutog pojedinca koji je najčešće bio nastavnik ili mentor mlađim članovima skupine, usmjeravajući njihov rad te istodobno oblikujući *istraživački program* i *istraživački profil* same skupine. Te su se skupine postupno povećavale, a zatim i *umrežavale* s drugim centrima, nadilazeći tako lokalne okvire i prilike te ostvarujući ne samo *razmjenu* ideja nego i istraživača i studenata. Dobar primjer za to predstavlja suradnja između istaknutih škola koje povezujemo s C. G. J. Jacobijem (1804–1851), A. Clebschom (1833–1872), Weierstraßom i Kleinom. Takve su aktivnosti dodatno potaknule i osnažile kolaborativne napore matematičara, isprva na nacionalnoj razini, a ubrzo potom, već krajem 19. stoljeća[57], i na području *međunarodne suradnje*, o čemu svjedoči pojava prvih koautorskih publikacija autora povezanih s različitim europskim matematičkim centrima. Uspješne su škole u pravilu održavale bliske veze s drugim centrima, ponajprije radi osiguravanja mogućnosti za daljnje usavršavanje i zapošljavanje znanstveno-istraživačkoga podmlatka, čime se ostvarivala ne samo *znanstvena izvrsnost* nego i *prepoznatljivost* te širenje *područja utjecaja* pojedinih škola, što je naposljetku rezultiralo uspostavom i promicanjem *istraživačkih trendova* karakterističnih pojedine škole. Imajući sve to u vidu, začuđuje činjenica da su matematičke istraživačke škole tek u posljednjih dvadesetak godina postale predmetom sustavnih

[57] Otprilike od prvoga ICM-a održanoga u Zürichu 1897, a nedvojbeno nakon 1900. godine.

istraživanja povjesničara (ali i filozofa) matematike[58], i to kao idealne studije slučaja za proučavanje ne toliko onoga *što* su matematičari proizveli koliko ponajprije toga *kako* odnosno *na koji način*, *u kojim okolnostima* i *pod utjecajem kojih čimbenika* su uopće ostvarili rezultate koje su ostvarili (usp. Rowe 2002: 121).

Jedno zanimljivo pitanje odnosi se upravo na specifične *nacionalne odlike* matematičkih istraživačkih škola. Naime, može li se uopće govoriti o „Njemačkoj", „Francuskoj" ili „Talijanskoj matematičkoj školi"? Svakako ne bi trebalo poistovjećivati matematičke škole s nacionalnim matematičkim društvima, institucionaliziranim profesionalnim udruženjima matematičara s jasno definiranim statutima i programima rada, iako se pojavljuju otprilike u isto vrijeme (premda su društva karakteristična ponajprije za drugu polovicu 19. stoljeća).[59] Formiranje matematičkih škola i društava i pokretanje novih matematičkih časopisa u posve različitim nacionalnim okvirima i sredinama tijekom 19. stoljeća upućuju na to da se u tom razdoblju dogodilo nešto izuzetno važno i u samoj matematici. Oko 1900. godine već su bile uvelike oblikovane uzajamno neovisne istraživačke skupine i zajednice s vlastitom unutarnjom organizacijom u Njemačkoj, Francuskoj, Italiji, Velikoj Britaniji i Sjedinjenim Američkim Državama; ubrzo potom formiraju se i istraživačke matematičke škole u Rusiji, Poljskoj, Švedskoj i drugim zemljama. U svom informativnom osvrtu na tu činjenicu, a osobito na formativno razdoblje od 1875. do 1900. godine, Karen Parshall još je 1996. u *Notices of the AMS* postavila sljedeća pitanja: Kako smo dospjeli dovde? Kako smo postali međunarodna matematička zajednica? Kako smo nadišli nacionalne granice? (Parshall 1996: 287–88). Odgovor na svako od tih pitanja, kao i na ono postavljeno na početku ovoga odlomka, krije se upravo u prethodno navedenim obilježjima matematičkih istraživačkih škola, koje su sve bile ustrojene prema manje-više istom modelu – *njemačkom* – koji je samo bio prilagođavan i primjenjivan na ovaj ili onaj način od zemlje do zemlje. Štoviše, nakon poraza u Francusko-pruskom ratu (1870–71), čak je i Francuska ostavila po strani sumnjičavost prema „stranim utjecajima", implementiravši upravo njemački model u nizu reformi sustava visokoga obrazovanja provedenih između 1876. i 1900. godine.[60]

---

[58] Za razliku od, primjerice, povjesničara i filozofa znanosti koji se proučavanjem istraživačkih škola bave već desetljećima. Izvanredan primjer studija ove vrste, koje bi mogle poslužiti kao uzor i povjesničarima i filozofima matematike, predstavlja tematski broj časopisa *Osiris*, Vol. 8, *Research Schools: Historical Reappraisals* iz 1993. godine (ur. G. L. Geison & F. L. Holmes). Za potrebe naše rasprave u ovom odjeljku osobito v. radove J. W. Servosa „Research Schools and Their Histories", M. J. Nye „National Styles? French and English Chemistry in the Nineteenth and Early Twentieth Centuries" i G. L. Geisona „Research Schools and New Directions in the Historiography of Science".

[59] Primjerice, Московское математическое общество osnovano je 1864, London Mathematical Society 1865, Société mathématique de France 1873, Mathesis – Società italiana di scienze matematiche e fisiche 1895, American Mathematical Society 1888, a Deutsche Mathematiker-Vereinigung 1890. godine. Situacija je u Italiji i ovdje osobito zanimljiva utoliko što je prije osnivanja društva Mathesis već postojao glasoviti Circolo matematico di Palermo (osnovan 1884, doduše od samoga početka zamišljen kao međunarodno, a ne nacionalno društvo čiji je primarni cilj, prema riječima njegova osnivača Giovannija Battiste Guccije (1855–1914), bio *diffondere la produzione matematica del mondo intero*), a 1922. osnovana je i Unione Matematica Italiana na inicijativu S. Pincherlea (1853–1936).

[60] Rowe tako navodi navodnu izjavu Ch. Hermitea (1822–1901): „Weierstrass est notre maître à tous." (2008: 122)

Dakle, premda tijekom 19. stoljeća možemo pratiti proces „individualne nacionalizacije matematike“, kako ga naziva Parshall (*op. cit.*, str. 295), gotovo istodobno i usporedno uočavamo suprotan proces postupne internacionalizacije matematike, upravo zbog činjenice da je jedan te isti model bio oponašan u različitim nacionalnim kontekstima. Drugim riječima, promatrajući razvoj matematike u razdoblju *fin-de-siècle* iz šire i globalne perspektive, možemo uočiti niz *zajedničkih obilježja* pojedinih nacionalnih okvira koja uže i nacionalno usmjerene historiografske studije tipično previđaju (*ibid.*). U konačnici, jedino je na taj način moguće uvidjeti da *univerzalni i transnacionalni karakter matematike* nije nešto što bi se trebalo podrazumijevati, nego je, naprotiv, riječ o ishodu složenih i dinamičnih povijesnih procesa tijekom kojih su se „postupno rastakali i razrjeđivali nacionalni stilovi [David Rowe i Mary Jo Nye nazivaju ih i tradicijama – prim. S. P.] koji su bili dominantni u devetnaestostoljetnim matematičkim ‘školama’.“ (Israel & Millán Gasca 2009: 54, moj kurziv; v. i nap. 57) U vezi s tim procesima osobito je zanimljivo istražiti kako su pojedini „lokalni“ matematički rezultati ostvareni u okvirima pojedine „nacionalne škole“ postupno postajali „globalni“ i „univerzalni“, što, naravno, podrazumijeva analizu i rekonstrukciju *povijesti transmisije* i *povijesti recepcije* tih rezultata u drugim lokalnim sredinama i drukčijim nacionalnim kontekstima, odnosno ispitivanje specifičnih mehanizama (znanstveno-profesionalnih, institucionalnih, društveno-političkih, itd.) koji su doveli do konsenzusa o kvaliteti, značaju i vrijednosti tih rezultata u široj matematičkoj, odnosno znanstvenoj zajednici (citiranost, prikazi u referativnim bazama i časopisima poput nekoć uglednoga *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* ili Neugebauerova *zbMATH*-a, itd.). Uz vanjske čimbenike, poput sve izraženije tendencije širenja mreže korespondenata, ostvarivanja što većega broja studijskih putovanja i istraživačkih boravaka te slobodne razmjene informacija na međunarodnoj razini, snažan su poticaj internacionalizaciji dale i dubinske transformativne promjene unutar same matematike, počevši od standardizacije i unifikacije metoda i tehnika, preko reforme jezika, konceptualnoga okvira i simboličke notacije. Premda su događaji poput Prvoga svjetskog rata ili jačanja nacionalizama u međuratnom razdoblju donekle usporili taj trend, više ga nije bilo moguće zaustaviti (*op. cit.*, str. 55).

Početkom 20. stoljeća „Talijanska škola“ – zbirna odrednica pod kojom se nerijetko nekritički objedinjuju i neoprezno poistovjećuju brojni vrlo utjecajni, ali međusobno posve različiti, pa čak i suprotstavljeni pristupi matematici i problemu njezina zasnivanja – bila je treća nacionalna matematička škola po važnosti i ugledu u međunarodnim razmjerima, odmah uz matematičke škole Njemačke i Francuske. Prema Struikovoj procjeni, „nijedna zemlja, osim Kine, nema dulju tradiciju matematičke djelatnosti [od Italije]; […] razdoblje dulje od tisuću godina.“ (Struik 1981: 9; usp. Bottazzini 2002: 61). Pojedini povjesničari formiranje Talijanske škole povezuju s formativnim utjecajem studijskog putovanja – svojevrsnog matematičkog hodočašća – E. Bettija (1823–1892), F. Brioschija (1824–1897) i F. Casoratija (1835–1890) kroz vodeće matematičke centre Njemačke i Francuske (Göttingen, Berlin i Pariz) tijekom 1858. godine te, slijedom toga, njihovih susreta s vodećim njemačkim i francuskim matematičarima: R. Dedekindom, P. C. L. Dirichletom, B. Riemannom, L. Kroneckerom, K. Weierstraßom i C. Hermiteom. „Prema predaji, to putovanje označava rođenje – takoreći *iz ničega* – talijanske matematike.“ (Guerraggio & Nastasi 2006: 4, moj kurziv).

Zanimljivo je da je Talijansku školu već u najranijoj fazi njezina razvoja obilježavala tendencija ka intenzivnoj međunarodnoj suradnji, dok su postupna institucionalizacija i organizacija matematičkoga rada provedene ponajprije prema njemačkom i, u znatno manjoj mjeri, prema francuskom modelu (Scuola Normale Superiore u Pisi ustrojena je prema uzoru na pariško École Normale Supérieure). Ta se prva faza razvoja matematike u Italiji tijekom 19. stoljeća s pravom može smatrati *analitičkom* s obzirom na primarnu zaokupljenost njezinih glavnih protagonista (Betti, Brioschi i Casorati) različitim problemima iz područja *matematičke analize*, osobito teorije funkcija.[61] Vito Volterra (1860–1940) bio je nastavljač, a potom i glavni predstavnik Talijanske škole analize (osobito u području realne i funkcionalne analize te teorije integracije), kojoj svakako treba pridružiti i školu *matematičke fizike*, koja je svoj vrhunac dosegla s Tulliom Levi-Civitom, studentom i suradnikom G. Veronesea i G. Ricci-Curbastra, s kojim je zajednički zasnovao *tenzorski račun*, u to vrijeme poznat kao „apsolutni diferencijalni račun", *calcul différentiel absolu* odnosno *calcolo differenziale assoluto*.[62]

Druga i, povijesno gledano, vjerojatno najznačajnija faza razvoja talijanske matematike bila je *geometrijska*, a njezini utemeljitelji bili su *sommo geometra* Luigi Cremona (1830–1903) u području *algebarske geometrije* (v. „Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane" iz 1861. i „Preliminari di una teoria geometrica delle superficie" iz 1867.) te Eugenio Beltrami u području *diferencijalne geometrije* i *neeuklidskih geometrija* (v. njegove studije *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* iz 1868. i *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante* iz 1869. godine). Daljnjem razvoju algebarske geometrije u Italiji nakon Cremone ponajviše su pridonijeli Corrado Segre (1863–1924), Guido Castelnuovo (1865–1952), Federico Enriques (1871–1946), Gino Fano (1871–1952) i Francesco Severi (1879–1961). Stoga ne čudi što se u literaturi ustalio naziv *italienische Geometrie* kao sinonim upravo za algebarsku geometriju. Većina navedenih autora bavila se i drugim granama geometrije, od njezinih osnova (Enriques) pa sve do diskretne, odnosno finitne geometrije (Fano). Međutim, gotovo nitko od predstavnika te druge generacije geometara nije dosegnuo toliku širinu istraživačkih interesa kao Cremonin nekadašnji asistent Giuseppe Veronese čiji se radovi, kao što smo vidjeli, protežu od projektivne i n-dimenzionalne geometrije (geometrije hiperprostora), preko algebarske i neeuklidskih geometrija, pa sve do povijesti, filozofije, osnova i didaktike geometrije te, naposljetku, nearhimedovske geometrije koja predstavlja krunu njegova cjelokupnoga opusa. Najznačajniji predstavnik treće, najmlađe generacije bio je vjerojatno Mario Pieri (1860–1913), Segreov (i Peanov) učenik koji je ostvario važne doprinose projektivnoj i enumerativnoj geometriji te aksiomatskom zasnivanju geometrije.

[61] Za zanimljiv povijesni pregled v. V. Volterra, „E. Betti, F. Brioschi, F. Casorati, trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse", *Comptes Rendus du Deuxième Congrès International des Mathématiciens* (Paris, 6–12 Août 1900, publ. par E. Duporcq, Secrétaire Général du Congrès), Paris: Gauthier-Villars, 1902, str. 43–57.

[62] V. referentni rad (objavljen na poziv Felixa Kleina): G. Ricci-Curbastro & T. Levi-Civita, „Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications", *Math. Annalen*, Band 54, 1901.

Pieri je također preveo na talijanski von Staudtovu *Geometrie der Lage* (1847) i dijelove kasnijih *Beiträge zur Geometrie der Lage* (1856–60), dodavši im komentare i kritički aparat.[63]

Treća faza razvoja talijanske matematike bila je *logička*, a njezin je utemeljitelj bio Giuseppe Peano (1858–1932), oko čijega se kapitalnog djela *Formulaire de Mathématiques* (prvo izdanje 1894; posljednje, peto, znatno prošireno i izmijenjeno izdanje pod naslovom *Formulario mathematico*, napisano Peanovim *latino sine flexione*, pojavilo se 1908. godine) okupila takozvana Torinska škola (G. Vailati, M. Pieri, A. Padoa, G. Vacca, G. Fano, C. Burali-Forti, itd.). Uz Fregea, Peano je presudno utjecao na zasnivanje suvremene matematičke logike.[64]

O ugledu Talijanske škole zorno svjedoči i činjenica da je četvrti po redu Međunarodni kongres matematičara, nakon Züricha, Pariza i Heidelberga, održan upravo u Rimu 1908. godine. Službeni predstavnik Italije među plenarnim predavačima po pozivu (među kojima su bili G. Mittag-Leffler, H. Poincaré, H. Lorentz i E. Picard) na četvrtom ICM-u bio je upravo Veronese, čijim je predavanjem „La Geometria non-Archimedea" Kongres i službeno zatvoren. Veronese je prethodno sudjelovao i na prvom kongresu u Zürichu 1897., kao i na znamenitom drugom kongresu u Parizu 1900., sa priopćenjem „Les Postulats de la Géométrie dans l'Enseignement" u okviru sekcije „Enseignement et méthodes". Zanimljivo je da su na četvrtom ICM-u sudjelovali i profesori Sveučilišta u Zagrebu Vladimir Varićak (1865–1942) (kao službeni predstavnik JAZU) i Juraj Majcen (1875–1924).[65] Ovdje ih spominjemo zato što su obojica dobro poznavala Veroneseov opus, o čemu svjedoče, primjerice, njihove studije objavljene u *Radu JAZU* (Knj. 181, 1910).

Kad već spominjemo rimski kongres, ovdje ćemo navesti i jedan važan povijesni dokument (v. *Sl. 5*), po svoj prilici jedinu sačuvanu fotografiju s Kongresa, pronađenu u Arhivu Srpske akademije znanosti i umjetnosti (SANU) (sign. 14197-II-13).[66] Fotografiju je otkrio prof. Dragan Trifunović (1930–2009), utemeljitelj i prvi voditelj Seminara za povijest matematičkih i mehaničkih znanosti (današnjega Seminara za povijest i filozofiju matematike, mehanike i astronomije) Matematičkog instituta SANU u razdoblju od 1981. do 1993. godine.[67]

---

[63] Za detaljan prikaz Pierijeva opusa v. impresivan dvotomni zbornik *The Legacy of Mario Pieri* (Marchisotto & Smith 2007 i Marchisotto *et al.* 2021).

[64] Za procjenu povijesnoga značenja Peanovih doprinosa logici v. Russell 1903, Preface; usp. Part I, Ch. 2 („Symbolic Logic"), §11ff. V. također i Whitehead & Russell 1910, Preface, str. v–ix.

[65] V. *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici* (Roma, 6–11 Aprile 1908; publ. per cura del Segretario Generale G. Castelnuovo), Roma: Tipografia della R. Accademia dei Lincei, 1909.

[66] Zahvaljujem kolegici Mariji Šegan-Radonjić što mi je skrenula pozornost na ovu fotografiju.

[67] Iako je prva sjednica Seminara održana 16. 12. 1981, u Matematičkom institutu SANU proučavanje povijesti matematike njegovalo se još od njegova osnutka u svibnju 1946. godine. O tome možda najbolje svjedoči edicija „Klasični naučni spisi", u kojoj su, počevši od 1949, u prijevodu na srpski jezik objavljeni, među ostalim, Euklidovi *Elementi* (prev. A. Bilimović, stručna redakcija B. Petronijević, stilska redakcija T. Anđelić, korektura V. Mišković; prva knjiga objavljena je 1949, a dvanaesta 1957.), *Geometrijska ispitivanja iz teorije paralelnih linija* N. I. Lobačevskog (prev. i kritički aparat B. Petronijević; drugo, prošireno izdanje iz 1951; Petronijević je još 1928. objavio i prijevod Bolyaijeva *Appendixa*, također s popratnim komentarom (Beograd: Državna štamparija Kraljevine SHS)), Hilbertovi *Osnovi geometrije* (prev. Ž. Garašanin, 1957), Boškovićev spis *O zakonu kontinuiteta* (prev. D. Nevenić-Grabovac, predgovor, komentari i stručna redakcija E. Stipanić, 1975), ključne studije R. Dedekinda i G. Cantora iz područja teorije brojeva i teorije skupova (prev. Z. P. Mamuzić, 1976), te Apolonijevi zadaci o dodirivanju krugova (περὶ ἐπαφῶν, prev. A. Bilimović, 1977). D. Trifunović je 1977. pokrenuo i ediciju



Sl. 5. Fotografija sudionika s Četvrtoga međunarodnog kongresa matematičara (Sezione Meccanica?), Rim, 1908. (Arhiv SANU, sign. 14197-II-13)

Iako je Trifunović isprva smatrao da je fotografija nastala na drugom ICM-u u Parizu 1900. godine, pažljivom analizom fotografije, uz pomoć prof. emer. June Barrow Green i prof. emer. Reinharda Siegmund-Schultzea, utvrdio sam da je izvjesno kako fotografija nije mogla nastati u Parizu, budući da se u sredini gornjega reda nalazi norveški matematičar i astrofizičar Carl Størmer (deseti slijeva), za kojega pouzdano znamo da *nije* sudjelovao na pariškom kongresu.[68] Osim toga, neposredno lijevo od Størmera stoji grčko-njemački matematičar Constantin Carathéodory koji također nije sudjelovao na pariškom, ali jest na rimskom kongresu. Nadalje, pri sredini drugoga reda odozdo nalazi se i predsjednik četvrtoga ICM-a, Pietro Blaserna. Gornju je fotografiju moguće povezati sa Sekcijom za mehaniku[69] rimskoga kongresa, budući da je usporednim uvidom u popis sudionika po sekcijama, objavljen u *Atti del Congresso*, utvrđeno da je još nekoliko uspješno identificiranih matematičara sudjelovalo i održalo izlaganja upravo u okviru Sekcije za mehaniku –

„Istorija matematičkih i mehaničkih nauka“, u kojoj se osobito ističe druga knjiga, *Istorijski spisi iz matematike i mehanike* (Beograd, 1989) u kojoj je objavljen i Trifunovićev informativni prilog „Seminar za istoriju matematičkih i mehaničkih nauka“ (str. 115–126), u kojem je autor naveo impresivan popis od čak 225 predavanja održanih na Seminaru u razmjerno kratkom razdoblju od 1981. do 30.05.1989. godine.

[68] Premda je bio registriran kao sudionik, pa čak i naveden u *liste générale des membres* u *Comptes rendus* (prir. E. Duporcq, Paris: Gauthier-Villars, 1902), jedno pismo švedskoga matematičara E. Ivara Fredholma Størmeru od 27. 12. 1900. predstavlja nepobitan dokaz da se Størmer u Parizu 1900. godine ipak nije pojavio. Naime, u tome pismu Fredholm izražava žaljenje zbog Størmerova nedolaska na Kongres. Zahvaljujem prof. Siegmund-Schultzeu što mi je skrenuo pozornost na to pismo. V. i Siegmund-Schultze 2024, §5.

[69] Preciznije, za mehaniku, matematičku fiziku, geodeziju i različita područja primijenjene matematike. Uvodničari su bili T. Levi-Civita, inženjer L. Luiggi, geodet, geofizičar i astronom P. Pizzetti, te aktuar G. Toja.

primjerice britanski primijenjeni matematičar G. H. Bryan (drugi red, treći slijeva) ili britanski astronom G. H. Darwin (prvi slijeva uz Blasernu). Doduše, na fotografiji se mogu vidjeti i matematičari koji nisu održali izlaganja iz mehanike, poput H. Minkowskog (drugi red pri sredini, deveti slijeva) ili M. Petrovića Alasa (točno u sredini gornjega reda, trinaesti bilo slijeva bilo zdesna), što otežava precizno i nedvojbeno utvrđivanje njezina podrijetla. Primjerice, Petrović je održao izlaganje o redovima potencija (*séries entières*) u okviru Sekcije za aritmetiku, algebru i analizu.

Naposljetku valja spomenuti još jednu razvojnu fazu koja se, međutim, najčešće ne podvodi pod odrednicu „Talijanska škola", premda je riječ o disciplini kojom su se u Italiji još od 18. stoljeća bavili isključivo matematičari, pišući isključivo za druge matematičare (za razliku od, primjerice, Francuske). Riječ je, naime, o Talijanskoj školi historiografije matematike, oblikovanoj u godinama nakon *Risorgimenta*, čiji je utemeljitelj i vodeća figura bio Baldassarre Boncompagni (1821–1894), osnivač glasovitoga *Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche* (1868–1887). Talijanski matematičari poput S. Pincherlea, G. Castelnuova i F. Enriquesa tijekom prve polovice 20. stoljeća objavili su niz pretežno povijesnih studija u publikacijama poput Kleinove monumentalne *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, kao i u trotomnoj talijanskoj *Enciclopedia delle matematiche elementari*, a prvi koraci prema institucionalizaciji povijesti matematike kao istraživačke discipline poduzeti su zahvaljujući naporima F. Enriquesa i njegove „Bolonjske škole". Enriques je pokrenuo časopis *Rivista di Scienza* (1907–1988), u kojem su priloge objavljivali povjesničari matematike poput F. Cajorija, J. L. Heiberga i H. Zeuthena, a nakon prelaska iz Bologne u Rim 1923. godine osnovao je i *Istituto nazionale per la storia delle scienze fisiche e matematiche* (od 1926. poznat pod nazivom *Istituto nazionale di storia delle scienze*). Vjerojatno najutjecajniji talijanski povjesničar matematike bio je Gino Loria (1862–1954), ekspert za povijest geometrije. Loria je predano radio i na obrazovanju budućih naraštaja povjesničara matematike, objavivši *Guido allo studio della storia della matematica* (1916); v. također njegovo priopćenje s četvrtoga ICM-a, „Sur les moyens pour faciliter et diriger les études sur l'histoire des mathématiques", u okviru sekcije „Questioni filosofiche, storiche, didattiche".

U nastavku bi trebalo postati jasno da cilj ovoga dodatka, odnosno sumarnoga pregleda aktivnosti i glavnih istraživačkih pravaca u području matematičkih znanosti u Italiji tijekom 19. i 20. stoljeća nije samo skicirati šire intelektualno ozračje u kojem se Veronese školovao, a potom i ostvario svoje prve važne matematičke rezultate, nego ujedno poslužiti kao temelj (osobito u Odjeljku [2.1]) za kritičko preispitivanje pojedinih uglednih povijesnih tumačenja i procjena značenja ne samo Talijanske škole matematike u cjelini nego ponajprije Veronesea kao jednoga od njezinih najistaknutijih predstavnika.[70]

[70] Za detaljniji prikaz povijesti Talijanske škole v. Bottazzini 1994, Di Sieno *et al.* 1996 i Guerraggio & Nastasi 2006. O povijesti matematike i historiografije matematike u Italiji v. Bottazzini 2002.

[1.3] Rekonstrukcija šireg povijesno-filozofskog i matematičko-filozofskog konteksta: k modernizaciji matematike

U Odjeljku [1.1] već je naznačeno da neki od ključnih matematičkih doprinosa, osobito u razdoblju od 1870. do 1920. godine, nisu bili *filozofski neutralni*. U ovom ćemo se odjeljku osvrnuti na one događaje u matematici 19. stoljeća – osobito u geometriji i analizi – koji su odredili kontekst unutar kojega je Veronese početkom 1890-ih zasnovao nearhimedovsku geometriju. Međutim, bit će potrebno osvrnuti se i na razvojnu fazu koja je prethodila devetnaestostoljetnim uvidima kako bismo razumjeli njihov (trans)formativni značaj.

Potaknuti ponajprije proučavanjem Apolonijevih *Konika*[71] (κωνικών) i nastojanjima da razumiju takozvanu „skrivenu geometriju" (*geometria recondita*) klasičnih grčkih matematičara poput Arhimeda, matematičari ranoga 17. stoljeća – među ostalima Kepler (1571–1630), Desargues (1591–1661), Descartes (1596–1650), Fermat (1607–65) i Pascal (1623–62) – zainteresirani za razvoj *općih metoda za proučavanje i tretiranje krivulja* (prije svega konusnih presjeka, odnosno elipse, hiperbole i parabole), služili su se u tu svrhu neobičnom mješavinom *geometrijskih*, *algebarskih* i *analitičkih tehnika*, pa čak i *fizičkih* (*mehaničkih*, osobito *kinematičkih*) *analogija*, pripremajući na taj način teren ne samo za uvođenje *calculusa* odnosno infinitezimalnog računa potkraj 17. stoljeća[72], nego istodobno dajući snažan poticaj ekspanziji istraživanja u samoj geometriji, osobito projektivnoj. Kao što smo vidjeli u Odjeljku [1.2], čak su i Veroneseovi prvi rezultati iz 1870-ih proizašli upravo iz proučavanja Pascalovih rezultata o konusnim presjecima iz 1639. godine. Matematičari 17. stoljeća bili su zaokupljeni ispitivanjem statusa geometrijskih objekata, ponajprije krivulja, tijekom njihove *kontinuirane promjene* odnosno *transformacije* – gibanja, premještanja ili projiciranja. U tom ih je kontekstu zanimalo ne samo mogu li se i kako krivulje izmjeriti odnosno *rektificirati* ili aproksimirati pravocrtnim dužinama, nego i mogu li se te kako transformirati *jedna u drugu* (primjerice elipsa u parabolu, a zatim i u hiperbolu), kao i možemo li u tom kontekstu govoriti o *kinematičkoj relativnosti oblika* i potpunom *narušavanju identiteta* geometrijskih objekata ili pojedina njihova svojstva ipak ostaju *invarijantna* (Kline 1972: 299–301; usp. Arsenijević 2007: §§123–24).

Za razliku od, primjerice, Desarguesa i Pascala koji su tim problemima još uvijek pristupali ponajprije geometrijski, metodom projekcija i presjeka (v. Odjeljak [1.2]), Fermat i Descartes[73] zagovarali su *analitički pristup* koji se sastojao u primjeni algebarskih jednadžbi za opisivanje geometrijskih objekata (krivulja i ploha), smatrajući da je to jedini način da se *uniformiraju* i *poopće* dokazne metode u geometriji – *općenitost algebre* (*généralité de l'algèbre*) trebala je poslužiti kao uzor i geometriji. Kao što je d'Alembert istaknuo u *Encyclopédie*, „Descartesu dugujemo primjenu algebre na geometriju, na kojoj se zasniva i diferencijalni račun" (v.

[71] Za klasično tumačenje *Konika* u terminima geometrijske algebre v. Zeuthenovu studiju *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (Zeuthen 1886); za alternativno tumačenje Zeuthenova čitanja Apolonijeva teksta v. Fried & Unguru 2001.

[72] Leibnizovi prvi objavljeni radovi potječu iz 1684., a Newtonovi iz 1687. godine.

[73] Zanimljivo je da je Descartesova *La Géométrie* predstavljala jedan od triju dodataka njegovu filozofsko-metodološkom spisu *Discours de la méthode* (1637).

natuknicu „Géométrie“, T. 7, str. 629–39; usp. također „Algèbre“, T. 1, str. 259–62). Jedna važna odlika Descartesove analitičke ili koordinatne geometrije konceptualne je naravi i tiče se *proširenja pojma* krivulje. Naime, za razliku od grčkih geometara, koji su kao legitimne dopuštali samo one geometrijske entitete koje je bilo moguće konstruirati pomoću ravnala i šestara, Descartes je legitimnom smatrao svaku krivulju koja se može izraziti nekom algebarskom jednadžbom, čime je *de facto* eliminirao konstruktibilnost kao *kriterij egzistencije* krivulja. Taj će njegov uvid dodatno poopćiti Leibniz uklanjanjem ograničenja da jednadžbe kojima se opisuju krivulje moraju biti algebarske (usp. *GM* V, 127, 223, 226). Drugim riječima, geometrijski su jednako legitimnima i dopustivima postale sve linije koje se mogu izraziti nekom, *ma kakvom* jednadžbom, što znači da je iste tehnike bilo moguće primjenjivati i pri radu s nealgebarskim odnosno *transcendentnim krivuljama* (cikloida, katenarija ili lančanica (*catena*), traktrisa (*Hundekurve*), logaritamska spirala, itd.).

Međutim, iako je Leibniz došao do toga uvida i premda je svoj diferencijalni račun *ab initio* inkorporirao u kartezijansku analitičku geometriju, ipak će ustrajati na tome da zakon ili jednadžba krivulje predstavlja princip njezine *individuacije*, kao i na tome da je njegov račun ponajprije *geometrijski račun*, takoreći *algebrae supplementum pro geometriam* ili *analysin geometricam* (usp. *GM* V, 172ff.). Štoviše, Leibnizov se „račun ne može ni razumjeti ako se ne uzme u obzir njegova geometrijska interpretacija, jer su njegovi osnovni pojmovi bitno vezani uz svoj geometrijski kontekst“ (Šikić 1989: 52), kao i uz Leibnizovu izvornu geometrijsku motivaciju – pronalaženje rješenja za takozvani *problem tangente* (određivanje nagiba, odnosno koeficijenta smjera tangente u bilo kojoj točki krivulje). Dakle, kao i kod Descartesa, primarni predmet istraživanja bile su krivulje, budući da se smatralo da pogoduju proučavanju čitavoga niza *relacija između varijabilnih geometrijskih veličina* to jest geometrijskih objekata definiranih u odnosu na neku varijabilnu točku na krivulji – ordinate, apscise, duljine luka, promjera, sub- i supratangente, tangente, normale, krivocrtnih područja između krivulje i osi, opisanih i upisanih poligona te obrtnih tijela (volumena) nastalih rotacijom odsječaka oko osi (Bos 1974: 4–5). Kad god je to bilo moguće, te su relacije izražavane jednadžbama. Međutim, analiza je najčešće bila ograničena samo na jednostavne krivulje (*figurae analyticae simplices*) (A VII, 5, 202, 450; usp. *GM* V, 103–4), dok su „neanalitičke“ odnosno nealgebarske krivulje (*curvae non analyticae*) bile interpretirane u geometrijskim ili kinematičkim terminima, i to tako da se opisivao način na koji ih je moguće individuirati odnosno konstruirati (*figurarum geometricarum explicatio per motum puncti*; A VIII, 1, 5; usp. i *GM* V, 183: *linea per motum definiri*). Štoviše, čak je i fundamentalni teorem računa kojim se tvrdi inverznost operacija diferenciranja i integriranja isprva bio formuliran u geometrijskom obliku, naime kao tvrdnja o inverznosti operacija određivanja tangente i izračunavanja površina krivocrtnih područja.[74] Dakle, jasno je da su kod Leibniza analiza i geometrija još uvijek isprepletene, što njemu samome nije moralo smetati budući da je njegova metoda funkcionirala i davala rezultate te je, sa stajališta praktične primjene kao *ars inveniendi*, mogla biti *analysis certa et generalis* (*GM* V, 232ff.), jer, naposljetku, *quicquid exactum est, geometricum esse* (*GM* V, 312).

[74] V. Leibnizove marginalne bilješke uz Barrowove *Lectiones geometricae* (GM V, № 43). Za historiografski kontroverznu tezu o Barrowu kao tvorcu infinitezimalnog računa v. studiju J. M. Childa *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow* (Chicago–London: Open Court, 1916).

Američki povjesničar matematike Carl B. Boyer u svojoj je utjecajnoj knjizi *The History of the Calculus and its Conceptual Development*[75] iz 1939. istaknuo da se razdoblje od otprilike 130 godina nakon uvođenja infinitezimalnog računa može smatrati „razdobljem neodlučnosti" tijekom kojega je niz matematičara, zaveden zapanjujućim uspjehom novoga računa, osobito njegovim primjenama u fizici, bio naveden previdjeti krajnje nezadovoljavajuće stanje „*logike i filozofije* [tog] predmeta. Tijekom čitavoga 18. stoljeća rasla je sumnja u pogledu prirode *osnova* novih metoda." (Boyer 1959: 224ff., moj kurziv) Uz taj skepticizam u pogledu logičko-filozofske utemeljenosti Leibnizova računa, sredinom 18. stoljeća započinje još jedan povijesno važan proces u razvoju matematičke analize, naime, postupno razdvajanje analize *sensu stricto* od geometrije (i mehanike). Taj je proces, koji započinje s L. Eulerom (1707–1783), Bohlmann smatrao ključnim pripremnim korakom za kasniju, povijesno-filozofski najzanimljiviju fazu razvoja koju je Felix Klein 1895. nazvao *aritmetizacijom* (*Arithmetisirung*) *matematike*, a koju obilježava „sve veće logičko izoštravanje (*Verschärfung*)" temeljnih pojmova (sec. Bohlmann 1897, *Vorbemerkung* i §1) i kojoj ćemo se uskoro posvetiti. Promotrimo li samu matematičku praksu, već se u drugoj polovici 17. stoljeća može jasno uočiti porast zanimanja za algebarsku stranu računa – za same jednadžbe – i razmjeran pad zanimanja za geometriju, odnosno za krivulje opisane tim jednadžbama. Algebra koju matematičari 18. stoljeća već uvelike nazivaju analizom (o čemu svjedoči i činjenica da d'Alembert u *Encyclopédie* ta dva pojma rabi kao sinonime – v. gorenavedenu natuknicu o algebri), postaje glavna matematička disciplina čiji su predmet istraživanja apstraktne formule koje izražavaju relacije između simbola koji referiraju na veličine općenito, a ne nužno samo na geometrijske objekte.

Ovaj proceduralni i metodološki napredak očituje se već u Eulerovim raspravama *Introductio in analysin infinitorum* (1748) i *Institutiones calculi differentialis* (1755), pri čemu već prva knjiga *Introductio*, posvećena „čistoj analizi" (*quae ad meram Analysin pertinent*), svjedoči o iznimno važnom konceptualnom pomaku od pojma *varijabilne geometrijske veličine* prema pojmu *funkcije jedne varijable*.[76] Jedan od glavnih razloga napuštanja pojma varijabilne geometrijske veličine kao temeljnoga pojma analize i algebre bilo je uviđanje da je on u suprotnosti s načelom općenitosti algebre. Kao što je istaknuo Bos (1974, §§1.5–1.6 *et passim*), geometrijske veličine nisu bile brojevi i, štoviše, način na koji su ih matematičari shvaćali tijekom 17. i većega dijela 18. stoljeća pokazuje da nisu posjedovale multiplikativnu strukturu ni jedinični element, nego su bile zamišljene kao objekti čije je glavno svojstvo *dimenzionalnost*. Upravo je *dimenzijska homogenost* (kodificirana Leibnizovim *transcendentalnim zakonom homogenosti* – usp. GM V, 377–382) predstavljala glavno ograničenje sustavnoga algebarskog tretmana geometrijskih veličina, utoliko što je onemogućavala neograničeno izvođenje svih

[75] Izvorni naslov glasio je *The Concepts of the Calculus: A Critical and Historical Discussion of the Derivative and the Integral*.

[76] Euler definira funkciju jedne varijable (on kaže „varijabilne veličine") kao „analitički izraz (*expressio analytica*) koji je na bilo koji način sastavljen (*quomodocunque composita*) od te varijabilne veličine i od brojeva odnosno konstantnih veličina (*ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus*)" (*Introductio*, I, §4). Prije Eulera funkciju je na vrlo sličan način definirao i J. Bernoulli (1667–1748) u radu „Remarque sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres" (1718): „*Funkcijom* varijabilne veličine ovdje nazivamo veličinu koja je na bilo koji način sastavljena od te varijabilne veličine i od konstanti."

algebarskih operacija. Smatralo se, naime, da se mogu zbrajati samo veličine iste dimenzije (primjerice, dužina s dužinom), dok množenje nikada nije bilo zatvorena operacija u smislu da bi umnožak dviju homogenih, odnosno istovrsnih geometrijskih veličina iste dimenzije uvijek bio nova veličina iste dimenzije. Naprotiv, umnožak je uvijek bio veličina druge dimenzije, pri čemu je množenje bilo samo *djelomično interpretabilno* – samo u onim slučajevima u kojima je umnožak dviju dužina davao neku plohu.[77] U jednom od svojih predavanja iz teorije funkcija iz 1861. godine, B. Riemann (1826–1866) istaknuo je da „postupno proširenje domene veličina" i, s tim u vezi, osobito proširenje pojma cijelog broja (*Anzahl*), nije bilo proizvoljno, nego motivirano uviđanjem upravo takvih ograničenja i potrebom da se „izvođenje [aritmetičkih] operacija učini uvijek mogućim", što je posljedično dovelo i do „modifikacije značenja samih aritmetičkih operacija" (citirano prema Schubring 2005: 11). U nastavku ćemo vidjeti da su razmatranja ove vrste motivirala ne samo Riemanna i druge pionire moderne analize i teorije funkcija 19. stoljeća nego i pionire nearhimedovskih teorija veličina, kako u 19, tako i u 20. stoljeću.

Međutim, unatoč određenim pomacima, osobito u području razvoja teorije funkcija, matematičari su i u 18. stoljeću još uvijek upotrebljavali diferencijale, odnosno iščezavajuće infinitezimale tipa „sad ih vidiš, sad ih ne vidiš", sam pojam funkcije još uvijek nije bio strogo i precizno definiran[78], počeli su se javljati problemi povezani s proizvoljnom uporabom beskonačnih redova kao i s beskonačnošću uopće, s neprekidnošću, s konvergencijom i divergencijom, itd. Povrh toga, matematičari su se u pravilu vodili geometrijskim ili kinematičkim intuicijama, kao i geometrijskom interpretacijom algebarskih, odnosno analitičkih postupaka, što je predstavljalo svojevrstan korak unatrag u odnosu na trend razdvajanja analize i geometrije. Iz toga razloga tijekom 1780-ih započinje sve intenzivnije zanimanje za *zasnivanje analize*, o čemu svjedoče i odluke akademija znanosti u Berlinu i Sankt Peterburgu da raspišu nagradne natječaje posvećene „metafizici računa i prirodi beskonačnosti" (Fraser 2005: 259). Od kandidata prijavljenih na natječaj očekivalo se da predlože „jasnu i preciznu teoriju [matematički] beskonačnog koja uključuje objašnjenje kako je uopće bilo moguće izvoditi točne rezultate iz tada dostupnih pojmova unatoč proturječnim temeljnim pretpostavkama" (Schubring 2005: 226–227), a natječaj Petrogradske akademije iz 1787. postavio je pred matematičare i zadatak da razjasne i konsolidiraju pojam neprekidnosti (kontinuiranosti).

---

[77] Za više pojedinosti o dimenzijskoj homogenosti v. Odjeljak [2.4], kao i Odjeljak [2.6.3] o Arhimedovu i drugim aksiomima neprekidnosti.

[78] Pomak prema općenitijoj definiciji funkcije nalazimo kod Eulera u predgovoru djelu *Institutiones* (1755, str. vi): „Ako veličine ovise jedna o drugoj na takav način da, kada se promijene jedne, i druge također podliježu promjeni, tada se ove prve nazivaju funkcijama onih drugih. Ova je terminologija posve općenita i obuhvaća sve načine na koje jedna veličina može biti određena drugim [veličinama] (*quae denominatio latissime patet atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur*)." Tu će opću definiciju funkcije preuzeti i dalje razraditi Lobačevski („Об исчезании тригонометрических строк", 1834) i Dirichlet („Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen", 1837). O povijesnom značaju Eulerove definicije vidjeti Youschkevitch 1976, §15: „Eulerova opća (nominalna) definicija funkcije […] otvorila je nove horizonte za razvoj mnogih grana matematičke analize i njihovih primjena. Čak su i poteškoće inherentne toj definiciji imale pozitivnu ulogu u formuliranju i proučavanju brojnih problema u osnovama matematike i matematičkih logika." (plural „matematičkih logika" je iz izvornika Youschkevitcha).

Reprezentativan primjer kasnoosamnaestostoljetnog pokušaja odgovora na te izazove bila je *Théorie des fonctions analytiques* (1797) J. L. Lagrangea[79] (1736–1813), čiji ambiciozni podnaslov vrijedi navesti u cijelosti: *Contenant les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniments petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*.[80] Dakle, Lagrangeova je zamisao bila zasnovati račun na čisto algebarsko-analitičkoj osnovi, *bez infinitezimala i intuitivnih geometrijskih ili mehaničkih pojmova* (usp. Fraser 2015: 261). Upravo se taj Lagrangeov podnaslov može smatrati lajtmotivom potonje reforme matematike koja će uslijediti u 19. stoljeću, a koju su inicirali B. Bolzano (1781–1848) i A. L. Cauchy (1789–1857). Stoga je i Bohlmann istaknuo da s Lagrangeom započinje „kritičko razdoblje" (*Zeit der Kritik*) (Bohlmann 1897: 94–95). Prema Lagrangeu, infinitezimalni je račun, premda posve nerigorozan, funkcionirao samo zahvaljujući vještini prethodnih naraštaja matematičara da *ad hoc* kompenziraju pogreške koje su se neizbježno javljale na svakom koraku – „istinska metafizika toga računa sastoji se u ispravljanju ili kompenziranju pogrešaka koje proizlaze iz pogrešnih temeljnih pretpostavki." (Lagrange 1797: 3; usp. Grabiner 2005: 43–46)[81]

Već je na temelju dosadašnjega sumarnog pregleda moguće uočiti da ključni matematički pojmovi koje smo spominjali tvore čvrsto povezanu *konceptualnu mrežu* ili *polje*, što znači da ih povijesno-filozofska analiza i rekonstrukcija ne bi smjela promatrati izolirano, nego u širem komparativnom kontekstu, s naročitim naglaskom na složene *inter*-, ali i *intrakonceptualne veze* i *interakcije*. Drugim riječima, premda se pojmovi poput funkcije, varijable i broja na prvi pogled čine različitima i neovisnima, oni ipak dijele jednu te istu *Begriffsgeschichte* utoliko što su se počeli „osamostaljivati" i potom manje ili više samostalno razvijati tek zahvaljujući postupnoj i kontinuiranoj diferencijaciji (*Ausdifferenzierung*) „krovnog", odnosno *holističkog pojma* (geometrijske) veličine. Moglo bi se reći da isto vrijedi i za druge temeljne pojmove analize, kao što su granična vrijednost (limes), izvod, integral, neprekidnost i konvergencija (usp. Schubring 2005: 15–16ff.; v. i §§1.1–1.6). Schubringov izraz „holistički" možda bi bilo prikladnije zamijeniti starijim izrazom koji je predložio još J. H. Herbart (1776–1841) te govoriti o *aksijalnim pojmovima* oko kojih se, kao oko svojevrsne osi, određena

[79] Zanimljivo je da je Berlinska akademija na Lagrangeovu inicijativu raspisala nagradni natječaj 1784. godine (Lagrange je u to vrijeme bio predsjednik Akademije), no on sâm, kao predsjednik akademijskog povjerenstva, nije bio posve zadovoljan gotovo nijednim od čak dvadeset i tri pristigla rada (od kojih je jedan u međuvremenu povučen). Premda je pobjednikom proglašen Simon L'Huilier (1750–1840) s radom *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*, Lagrange je smatrao da ta knjiga nije najbolja, nego tek najmanje loša među preostalima (usp. Dugac 2003: 71); plauzibilno je pretpostaviti da ga je upravo ta okolnost dodatno potaknula da predloži vlastito rješenje u obliku *Théorie des fonctions analytiques*. Još jedna povijesno zanimljiva okolnost vezana uz berlinski natječaj jest činjenica da on, po svoj prilici, nije privukao veću pozornost profesionalnih matematičara – uvidom u Arhiv Berlinske akademije (AAdW, *Preisschriften der Akademie*; I-M 838–858) utvrđeno je da je čak petnaest (!) od preostala dvadeset i dva rada podneseno od strane amatera, što je vidljivo i iz njihove kvalitete: riječ je uglavnom o posve kratkim tekstovima, nerijetko potpuno nematematičkog sadržaja, bez stvarnih matematičkih argumenata te jasno i precizno formuliranih ideja; štoviše, u većini priloga nije moguće pronaći ni eksplicitan odgovor na natječajno pitanje odnosno zadatak. Vidjeti Appendix A u Schubring 2005, str. 619 ff., kao i Grabiner 2005: 40–43.

[80] *Teorija analitičkih funkcija koja sadrži principe diferencijalnog računa oslobođene od bilo kakvih razmatranja infinitezimala, iščezavajućih* [*veličina*], *granica i fluksija*, *svedena na algebarsku analizu konačnih veličina*.

[81] Čitav uvod u *Théorie des fonctions analytiques* može se promatrati kao Lagrangeova sustavna i sveobuhvatna kritika svih prethodnih pristupa i pokušaja zasnivanja računa.

matematička disciplina teorijski razvija i konceptualno preobražava (usp. Ferreirós 2006: 72). Herbart je osobito zanimljiv i stoga što je smatrao da bi se filozofija trebala razvijati „sa i uz druge znanosti", od kojih je upravo matematika ona s kojom je filozofija najtješnje povezana, budući da su obje discipline primarno usmjerene na „rasvjetljavanje složenih konceptualnih struktura". Štoviše, Herbart je u spisu „Über philosophisches Studium" (1807) istaknuo da se matematika može smatrati čak i „dijelom filozofije ako se obrađuje na filozofski način" (*philosophisch behandelt, wird sie* [sc. *die Mathematik*] *selbst ein Theil der Philosophie*), odnosno ako se usredotoči na vlastite pojmove.[82] Upravo će taj fokus na proučavanje i razjašnjavanje temeljnih pojmova (*Grundbegriffe*) i na probleme osnova (*Grundlagen*) postati dominantan istraživački trend u matematici druge polovice 19. stoljeća, zbog čega će osobito njemački matematičari govoriti o nastanku jedne nove, *moderne konceptualne matematike* (*begriffliche Mathematik*).

Povijesno se taj proces najčešće poistovjećuje s već spomenutom aritmetizacijom odnosno rigoroznim zasnivanjem analize, pri čemu se kao središnja figura ponajprije ističe Weierstraß (usp. Klein 1895, Poincaré 1898). Kao što je istaknuo Russell, „pokret u prilog korektnosti izvođenja koji je inaugurirao Weierstraß [potom] su briljantno nastavili Dedekind, Cantor, Frege i Peano" (Russell 1903, §107), a svakako bi ovdje valjalo pridodati i Hilberta, koji je vlastiti rad na zasnivanju matematike smatrao „izravnim nastavljanjem djela Karla Weierstraßa" (navedeno prema Dugac 2003: 140). Među povjesničarima vlada konsenzus da moderna matematička analiza započinje s Cauchyjem koji je „već 1820-ih učinio toliko mnogo da je pitanje je li i što je uopće još preostalo učiniti" (Gray 2009b: 671). Naime, upravo je Cauchy u *Cours d'Analyse* (1821) iznio većinu modernih ili barem suvremenom čitatelju lako prepoznatljivih definicija pojmova poput neprekidnosti, diferencijabilnosti i integrabilnosti, kao i strogu teoriju graničnih vrijednosti i konvergencije, zajedno s teoremima koji te pojmove povezuju, formuliranima na danas standardnom i dobro poznatom, ali za prvu polovicu 19. stoljeća apstraktnom jeziku ε, δ metode. Zbog čega se onda u prvi plan toliko stavlja Weierstraß? Što je nedostajalo Cauchyjevu tretmanu računa da bi potaknulo daljnju transformaciju analize?

Kao i Lagrange prije njega, Cauchy je svoj pristup u *Cours d'Analyse* okarakterizirao kao *analyse algébrique*, naglašavajući u uvodu da su njegove metode „rigorozne u onoj mjeri u kojoj se to zahtijeva i u geometriji", čime se „zauvijek izbjegava oslanjanje na argumente izvedene iz općenitosti algebre (*généralité de l'algèbre*)" (Cauchy 1821: ii). Povrh toga, u preglednom odjeljku *Préliminaires*, s ciljem izbjegavanja nejasnoća u pogledu jezika i značenja algebarske notacije, Cauchy je nastojao fiksirati značenje temeljnih pojmova, prije svega pojmova *broj* i *veličina* (*nombre* et *quantité*), ističući da pojam broja „shvaća u smislu u kojem se on upotrebljava u aritmetici", gdje brojevi figuriraju kao „apsolutna mjera veličina" (*mesure absolue des grandeurs*) (*op. cit.*, str. 1–2ff.).[83] Međutim, unatoč tome, Bohlmann je ipak bio u

[82] Za više pojedinosti o Herbartu i njegovu utjecaju na matematiku i filozofiju matematike 19. stoljeća, posredovanom njegovim utjecajem na Riemanna, v. Scholz 1982.

[83] Ovdje može doći do određene terminološke zbrke, ponajprije zbog toga što i *quantité* i *grandeur* prevodimo kao veličina. U francuskom su matematičari pojam *quantité* uzimali kao temeljni opći pojam, dok su *grandeur* nerijetko rabili za označavanje konkretnih brojeva. Međutim, sam je pojam broja dugo bio vezan uz pojam

pravu kada je istaknuo da „ono što njemu [sc. Cauchyju] prije svega nedostaje jest ono što prethodi i leži u osnovi [njegove teorije]: *pojam broja* (*der Zahlbegriff*).“ (Bohlmann 1897, §3, str. 96, moj kurziv). Upravo ta veza između brojeva i (geometrijskih) veličina leži u osnovi široko rasprostranjene prešutne pretpostavke, prisutne i kod Cauchyja, da su nam realni brojevi naprosto geometrijski zadani, kao dužine linearnoga kontinuuma, i to u potpunosti (Schubring 2005, §1.1). Dakle, Cauchyjeva se „mana“ sastoji u tome što je nekritički „upotrebljavao nedefinirani pojam kontinuirane veličine“ (Laugwitz 1999: 317), odnosno što „još uvijek nije jasno izlučio ključne (implicitne) pretpostavke o realnim brojevima koje [njegovim] tehnikama daju punu egzaktnost.“ (Šikić 1989: 75) Takvu temeljnu analizu samoga pojma broja, kao i konačni zaokret prema aritmetici kao fundamentalnoj i paradigmatskoj matematičkoj disciplini stoga ipak dugujemo njemačkim matematičarima. Neslužbeni moto toga pokreta bio je ὁ θεὸς ἀριθμετίζει, a vjeruje se da potječe od samoga *princeps mathematicorum* – Gauba.[84] Pogledajmo stoga kakva je točno priroda veze između aritmetizacije i nove konceptualne matematike.

Vidjeli smo da su se matematičari tijekom 17. i 18. stoljeća, a Gray smatra da to vrijedi i za dobar dio 19. stoljeća, pa čak i za *fin-de-siècle* (usp. 2008: 18), bavili matematikom u kojoj su se različita područja te različiti pristupi, tehnike i metodologije *međusobno preklapali*.[85] Drugim riječima, većina matematičkih područja, uključujući analizu i geometriju, smatrala se takozvanim *mješovitim znanostima* utoliko što su barem djelomično imale *empirijsko podrijetlo*. U drugom ćemo dijelu vidjeti da će taj izraz, *scienza mista*, poslije upotrijebiti i Veronese u *Fondamenti* prilikom objašnjavanja specifičnog statusa geometrije.[86] S druge strane, *čista matematika* je već u Gaußovim radovima i njegovoj sačuvanoj korespondenciji u potpunosti apriorna te pod nju potpada *opća aritmetika* shvaćena kao *čista teorija veličina* (*reine Grössenlehre*) odnosno obuhvatna teorija izrazito složenih brojevnih sustava i svih njihovih relevantnih aspekata – aritmetičkih, algebarskih, topoloških i analitičkih (Ferreirós 2007: 238). Takvo poimanje čiste matematike i njezino poistovjećivanje s općom aritmetikom postat će široko rasprostranjeno u kasnijim devetnaestostoljetnim pristupima rigoroznom zasnivanju matematike, osobito kod Weierstraßa, Kroneckera i Dedekinda. Štoviše, Russell će u *Principles of Mathematics* u istom duhu istaknuti da se „aritmetika proširila u tolikoj mjeri da uključuje sve ono što se u strogom smislu može nazvati čistim u tradicionalnoj matematici.“ (Russell 1903, §149)

Kad je riječ o Weierstraßu, u predavanjima iz uvoda u teoriju analitičkih funkcija iz 1874. godine iznio je uvjerenje da je „uzrok glavnih poteškoća u višoj analizi nejasno i

geometrijske veličine, pa su se praktički sve do početka 18. stoljeća samo cijeli brojevi smatrali brojevima u strogom smislu, dok su racionalni ili negativni brojevi bili shvaćani kao *quantités*. Usp. Schubring 2005: 16–17.

[84] Za tekstualnu potvrdu vidjeti izvatke iz bilježaka Gaußova göttingenskog kolege W. von Waltershausena (1865) te prepisku između Gaußova liječnika Wilhelma Bauma i von Humboldta u Ferreirós 2007: 235–236, nap. 4 i 5. Zanimljivo je da je Dedekind za moto spisa *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888) odabrao varijaciju Gaußove formulacije, naime, ἀεὶ ἄνθωπος ἀριθμετίζει (čovjek uvijek „aritmetizira“).

[85] Gray tako na navedenome mjestu govori o *many overlapping kinds of mathematics*.

[86] „La geometria come noi la consideriamo, si può chiamare una scienza mista.“ (Veronese 1891: viii)

nedovoljno sveobuhvatno izlaganje temeljnih aritmetičkih pojmova i operacija.“[87] Povrh toga, u bilješkama za predavanje Weierstraß je dodao i da nam je „potrebno čisto aritmetičko zasnivanje analize (*eine rein arithmetische Begründung*), koje je već pružio Gauß“ (iz Hettnerove redakcije bilježaka iz 1874. godine). Inzistiranje na čisto aritmetičkom zasnivanju analize kod Weierstraßa je suprotstavljeno geometrijskoj reprezentaciji veličina (*geometrische Darstellung* ili *Repräsentation*), koja se, premda korisna, ipak „ne smije upotrebljavati“ (*nicht anwenden*) zato što „analizu treba očuvati čistom od geometrije“ (*die Analysis von der Geometrie rein erhalten werden muss*), što je, kao što smo već vidjeli, bio trend koji je još u 18. stoljeću inicirao Euler, a koji je, prema Bohlmannu, upravo Weierstraß dosljedno proveo do kraja (*op. cit.*, §4).[88] Najsnažnije formuliran stav u prilog aritmetizaciji nalazimo u Weierstraßovim predavanjima iz 1882/83. godine:

> „Jedino što je potrebno za zasnivanje čiste analize (*reine Analysis*) jest pojam [cijelog] broja (*Begriff der Zahl*), dok geometrija mora posuđivati (*entlehnen*) mnoge pojmove iz iskustva. Ovdje ćemo pokušati konstruirati cjelokupnu analizu iz pojma broja (*die gesammte Analysis aus dem Begriffe der Zahl zu construiren*).“ (iz Killingove redakcije bilježaka za uvodni kolegij iz teorije analitičkih funkcija, citirano prema Petri & Schappacher 2007: 353, nap. 51)

Zanimljivo je da je Bolzano, kojega smo spomenuli kao jednoga od pionira reforme analize[89], u svojem ranom spisu *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* iz 1804. pokušao ustanoviti principe *čiste geometrije* (*reine Geometrie*) ispitivanjem onoga što je nazvao „ispravnom teorijom pravca“ (*eine richtige Theorie der geraden Linie*), koju je smatrao „najtežom materijom u geometriji“ (usp. Bolzano 1804, *Einleitende Vorrede*). U drugom dijelu disertacije (odjeljci [2.4] i [2.6]) vidjet ćemo kako je Veronese osamdeset i pet godina poslije pristupio problemu zasnivanja jedne takve *rectimétrie* (usp. Veronese 1902: 446). Neovisno o Bolzanovim i Veroneseovim pokušajima, „glavna odlika [Weierstraßove] Berlinske škole očituje se u stanovitoj podozrivosti i nepovjerenju prema geometriji; takoreći, *oni ne teže tomu da vide, nego da razumiju*.“ (Poincaré 1898, §17, str. 16, moj kurziv) Na sličan je način Weierstraßovu metodu u matematici (*Weierstraßsche Habitus der Mathematik*), odnosno *Weierstraßsche Strenge*, promatrao i Klein koji je 1895. istaknuo da je „aritmetizacija matematike

---

[87] „Die Hauptschwierigkeiten der höheren Analysis haben nämlich ihren Grund gerade in einer unscharfen und nicht hinreichend umfassenden Darstellung der arithmetischen Grundbegriffe und Operationen.“ (citirano prema Behnke & Kopfermann 1966, str. 78, §1) U jednom od predavanja iz ljetnog semestra 1880. Weierstraß je istaknuo i sljedeće: „Das Endziel aber, welches man stets im Auge behalten muß, besteht darin, daß man über die Fundamente der Wissenschaft ein sicheres Urteil zu erlangen suche.“ (v. Kopfermann 1966: 76)

[88] Treba primijetiti da je Bohlmannova ocjena, promatrano iz historiografske perspektive, pretjerana jer zanemaruje važne doprinose ponajprije Dedekinda i Cantora koji su 1872. objavili svoje konstrukcije realnih brojeva.

[89] V. njegov *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Prag: Hasse, 1817. Kao što je ispravno istaknuo Stolz u radu „B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung“, Bolzanovi rezultati iz *Rein analytischer Beweis* i još nekoliko publikacija [sc. *Beiträge* iz 1810., *Der binomische Lehrsatz* iz 1816. i *Die drei Probleme der Rectification* iz 1817. – prim. S. P.], premda su bili „u skladu s [Cauchyjevima], a u pojedinim točkama čak i potpuniji od njegovih (*vollständiger als er*)“, „ubrzo su pali u zaborav te je tek dugo nakon njegove smrti [1848.] prepoznato značenje njegovih postignuća za infinitezimalni račun“. Međutim, dodaje Stolz, Bolzano je ujedno i „autor teorema [sc. o supremumu – prim. S. P.] koji je dalje razvio Weierstraß“ (Stolz 1881: 255). V. i odjeljak „Weierstrass et Bolzano“ u Dugac 2003: 131ff.

izvorno započela eliminiranjem prostorne [sc. geometrijske] intuicije (*Raumanschauung*)" (Klein 1922: 233), dodavši pritom i sljedeću zanimljivu napomenu o Gaußu:

> „Uzimajući zdravo za gotovo neprekidnost prostora, Gauß je bez oklijevanja upotrebljavao prostornu intuiciju (*sic!*) kao temelj svojih dokaza (*Beweisgrund*); no, pomnijim se ispitivanjem pokazalo ne samo da mnoge pojedinosti još uvijek zahtijevaju dokaz, nego i da je prostorna intuicija vodila preuranjenim pretpostavkama o općenitosti pojedinih teorema koji zapravo nisu opći ni u kojem smislu. Stoga se nametnuo zahtjev za isključivo aritmetičkim metodama dokazivanja (*ausschließlich arithmetischer Beweisführung*). […] Premda dragovoljno i u potpunosti priznajem iznimnu važnost ove tendencije i razvoja koji je iz nje proizašao, ipak odbijam prihvatiti stajalište da se stvarni sadržaj matematike (*der eigentliche Inhalt der Mathematik*), takoreći kao kakav ekstrakt, u cijelosti sastoji od aritmetizirane znanosti." (*op. cit.*, str. 233–34)

Ova Poincaré-Kleinova kvalifikacija, osim što je ispravna[90], omogućuje nam da uvedemo još jednu distinkciju, između *intuitivne* (*anschauliche*) i *pojmovne matematike* (*begriffliche Mathematik*).[91] Teza o intuitivnosti matematike, u literaturi poznata kao *teza o intuitivnosti* (*Anschaulichkeitsthese*, AT), predstavljala je od Kantova vremena pa tako i tijekom 19. stoljeća opće mjesto:

> (**AT**) Matematički iskazi nisu konceptualne naravi, nego bitno ovise o „konstruiranju pojmova u intuiciji" (*Anschauung*); drugim riječima, iskazi aritmetike i geometrije nisu analitički, nego sintetički *a priori*. (usp. Ferreirós 2007: 256)

Međutim, unutar same matematike 19. stoljeća možemo uočiti dva važna momenta koja su ozbiljno dovela u pitanje održivost AT-a, proizvevši svojevrsnu *krizu osnova matematike*, poznatiju pod nazivom *kriza intuicije* (*die Krise der Anschauung*, sec. Hahn 1933).[92] Prvi se odnosi na otkriće neeuklidskih geometrija, a drugi na otkriće neprekidnih nigdje diferencijabilnih

---

[90] Dio Kleinove opaske koji se odnosi na Gauß donekle je neblagonaklon. Naime, premda u Gaußovim *Werke* možemo pronaći mjesta poput *die Arithmetik* […] *der anschaulichsten Versinnlichung fähig* ili formulacije poput *befruchtende lebendige Anschauung*, njih bi prije trebalo tumačiti kao izraz Gaußova uvjerenja da geometrija i aritmetika *nisu nužno suprotstavljene*, nego mogu biti i *komplementarne* (o tome svjedoči njegova ideja *opravdanja* kompleksnih brojeva posredstvom *geometrijske reprezentacije*, odnosno kompleksne ravnine, iz pisma Besselu od 18. 12. 1811.), premda aritmetika svakako ima prednost pred geometrijom. Sličan će stav, doduše ne u kontekstu aritmetizacije nego aksiomatizacije i vizualizacije, kasnije zastupati i Veronese (1891: xvii et passim) i Hilbert (1935: 159). Više o tome u odjeljcima [2.4] i [2.5].

[91] Izraz *begriffliche Mathematik* prvi je put 1935. upotrijebio ruski matematičar Pavel Aleksandrov (Па́вел Серге́евич Алекса́ндров, 1896–1982), tadašnji predsjednik Moskovskog matematičkog društva, u memorijalnom predavanju posvećenom Emmy Noether (1882–1935), kako bi označio njezin specifičan pristup (v. Alexandrov 1936: 256). Zanimljivo je da je sama Noether u pismu Hasseu (12. 11. 1931.) vlastite metode opisala izrazom *Arbeits- und Auffassungsmethoden*. Izbor riječi istodobno je zanimljiv i indikativan: riječ je, naime, o *radnim* i *perceptivnim metodama* (metodama uvida; *Auffassung* je sinonim za *Anschauung*, koji prevodimo kao *intuicija* ili *opažaj*). Za više pojedinosti v. Koreuber 2015.

[92] Vidjeti i danas slabo poznatu knjigu Klausa Volkerta *Die Krise der Anschauung: eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850* (Volkert 1986), u kojoj je razvijen pristup proučavanju povijesti i filozofije matematike srodan onome izloženom u Odjeljku [1.2] *supra*. Volkert je priredio ili napisao još nekoliko iznimnih knjiga posvećenih povijesti geometrije, među kojima se osobito izdvajaju *Das Undenkbare denken* (Volkert 2013) i *In höheren Räumen* (Volkert 2018), posvećene povijesti recepcije neeuklidske geometrije odnosno razvoju geometrije hiperprostora. U objema tim knjigama Volkert referira na Veronesea.

funkcija (funkcija koje nemaju izvod ni u jednoj svojoj točki) odnosno takozvanih znamenitih krivulja bez tangenti.

Sve do otprilike 1800. godine većina je matematičara i filozofa bila uvjerena da euklidska geometrija predstavlja jedini mogući sustav metričke geometrije. To je uvjerenje dodatno učvršćeno Kantovom filozofijom geometrije izloženom u Transcendentalnoj estetici i Transcendentalnom nauku o metodi *Kritike čistoga uma* (1781/87). Glavna odlika kantovskog pristupa epistemologiji matematike, koji će zahvaljujući neokantovcima, osobito Marburškoj školi, postati dominantan tijekom 19. stoljeća, bilo je inzistiranje na tome da matematičko znanje nije konceptualne, nego prije svega intuitivne naravi – ono nije *Erkenntnis aus Begriffen*, nego *aus der Konstruktion der Begriffe*, za koju je (konstrukciju) nužna intuicija.[93] Geometrija je za Kanta sintetička *a priori* znanost o svojstvima prostora koja počiva na čistoj intuiciji prostora (*reine Anschauung*) i uopće je moguća zahvaljujući činjenici da su nam sama svojstva euklidskog prostora neposredno dana u njegovoj predodžbi.[94] Kada je riječ o aksiomima na kojima počivaju konstrukcije euklidske geometrije, oni prema Kantu zapravo kodificiraju ona svojstva prostora koja su nam *kognitivno dostupna*. Stoga ne iznenađuje tvrdnja koju nalazimo u Axiome der Anschauung da „aksiomi geometrije [za razliku od aksioma aritmetike, koji se prije mogu smatrati 'brojevnim formulama', *Zahlformeln* – prim. S. P.] izražavaju uvjete osjetilnog opažanja *a priori*". Dakle, kod Kanta način na koji *predočujemo* prostor i geometrijske objekte, kao i *nemogućnost* da ih predočimo drukčije odnosno da predočimo neko „devijantno" ponašanje prostora (usp. Helmholtz 1878 u Hertz & Schlick 1921/1977: 128) određuje da li prihvaćamo neki dati aksiom.[95]

Otkriće neeuklidskih geometrija 1830-ih predstavljalo je prvi ozbiljan izazov tradicionalnoj intuitivnoj matematici i kantovskoj filozofiji matematike. Ono se može smatrati kulminacijom *longue durée* procesa koji traje još od antike (v. Arist. *An. Pr.* II, 16, 65a4ff., kao i Proklov komentar *In prim. Euclidis*, str. 364–73), tijekom kojega je niz matematičara bezuspješno pokušavao *dokazati* Euklidov peti postulat[96] kao teorem, što je

---

[93] V. *Kritik der reinen Vernunft*, Die transzendentale Methodenlehre (des ersten Hauptstücks, erster Abschnitt), „Die Disziplin der reinen Vernunft im dogmatischen Gebrauche".

[94] *Op. cit.*, Die transzendentalen Ästhetik, §3, Transzendentale Erörterung des Begriffs vom Raume.

[95] Stavovi poput „prostor ima tri dimenzije", „dvije linije ne konstituiraju prostor", „prostor je dana beskonačna veličina", „trokut se ne može konstruirati ako zbroj bilo koje dvije njegove stranice nije veći od treće", itd. koje Kant navodi u Metaphysische Erörterung des Begriffs vom Raume za njega predstavljaju ono što je najbliže pravim geometrijskim aksiomima.

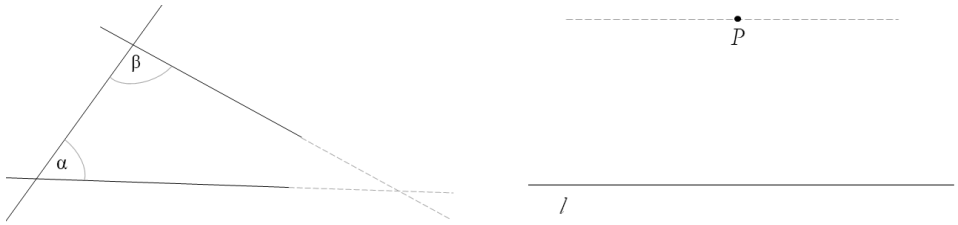
[96] „I da će se, ako pravac pri presijecanju dvaju drugih pravaca s iste strane tvori dva unutarnja kuta [α i β] čiji je zbroj manji od dvaju pravih kutova, ta dva pravca, produžena u beskonačnost, sjeći upravo s one strane na kojoj su ti kutovi manji od dvaju pravih (καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾽ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες)." (Bilimovićev prijevod, edicija „Klasični naučni spisi", Matematički institut SANU, 1949)

Najjednostavniji ekvivalent Euklidovu postulatu jest aksiom koji je John Playfair (1748–1819) formulirao 1795. godine: „Neka je l proizvoljan pravac, a P točka izvan njega. Tada u ravnini određenoj pravcem l i točkom P postoji najviše jedan pravac koji prolazi kroz točku P i ne siječe pravac l." (usp. Kline 1972: 865)

d'Alembert još 1759. okarakterizirao kao „istinski skandal elemenata geometrije" (usp. Gray & Ferreirós 2025, §3.3 i De Risi 2016: 57, nap. 1; v. i natuknicu „Paralleles", koju su za *Encyclopédie* napisali La Chapelle, d'Alembert i Jaucourt).[97] Ključni intramatematički čimbenik koji je, po svoj prilici, bio presudan za postupno prihvaćanje mogućnosti alternativnih geometrija odnosio se na činjenicu da matematičari tijekom toga razdoblja zapravo nisu uspijevali dobiti ono čemu su se nadali – izvođenje proturječnih posljedica iz pretpostavke da je peti postulat pogrešan – nego su, naprotiv, uspješno izvodili i dokazivali sve veći broj novih i, što je najvažnije, neproturječnih teorema.

Po svoj je prilici Gauß u jednom kratkom prikazu objavljenom u *Göttingische gelehrte Anzeigen* 1816. prvi jasno uvidio da je nemoguće dokazati Euklidov postulat te da je zapravo *moguća* jedna nova geometrija *nezavisna* od postulata o paralelama (usp. Bonola 1906, §32).[98] Međutim, on nije želio objaviti vlastita istraživanja kojima se, prema vlastitom priznanju, bavio gotovo pola stoljeća[99], a čak je i u sačuvanoj korespondenciji nerado komentirao problem paralela. U tom se istom prikazu Gauß prvi put otvoreno i kritički osvrće i na Kantovo shvaćanje geometrije (v. tekst reproduciran u Ewald 2005: 299–300). Naime, problemi povezani s osnovama teorije paralela „definitivno su ga učvrstili u uvjerenju" da je aritmetika pouzdanija i izvjesnija disciplina te da stoga mora imati prednost pred geometrijom, koja ne može biti u cijelosti utemeljena na apriornoj osnovi, o čemu svjedoči prepiska s H. W. M. Olbersom (1758–1840) i F. W. Besselom (1784–1846):

> „Postajem sve uvjereniji da se [fizička] nužnost naše [sc. euklidske] geometrije ne može dokazati, ni ljudskim razumom ni za ljudski razum. Možda ćemo u nekom drugom životu steći uvid u pravu prirodu prostora, ali nam je takav uvid sada



[97] Za klasični pregled povijesti ovih pokušaja v. studiju R. Bonole, *Geometria non-euclidea: esposizione storico-critica del suo sviluppo* (Bologna: N. Zanichelli, 1906). V. također i dodatak *Fondamenti*, „Studio storico e critico dei principii della geometria" (Veronese 1891: 566ff.). Zanimljivo je primijetiti da i Boyer i Bonola u svojim studijama primjenjuju *povijesno-kritičku metodu* koju je artikulirao i zagovarao upravo Veronese.

[98] Kline (1972: 868), međutim, smatra da je J. H. Lambert (1728–1777), autor knjige *Theorie der Parallellinien* (napisane 1766.), već imao iznimno napredno shvaćanje geometrije jer je „uvidio da svaki skup neproturječnih hipoteza određuje jednu moguću geometriju". Budući da je poznato kako je Gauß čitao Lambertovu knjigu, moglo bi se tvrditi da je Lambert neposredno utjecao na samoga Gaußa. Međutim, uvidom u *Theorie der Parallellinien* nigdje nisam uspio pronaći nedvosmislenu tekstualnu potporu Klineovu stajalištu, čak ni u vrlo dubokom i filozofsko-metodološki iznimno zanimljivom uvodu. Lambert je bio Kantov suvremenik i redoviti korespondent, a sam je Kant u jednom pismu Johannu III Bernoulliju (od 16.11.1781.) eksplicitno istaknuo Lambertov utjecaj na svoju raspravu o prostoru u *Kritici čistoga uma* (usp. Ewald 2005: 156). U §2 *Theorie* nalazimo jedan zanimljiv Lambertov antikantovski stav, naime, da „za potrebe rigoroznoga dokazivanja u geometriji, kao i za njezino zasnivanje (*festzusetzen*), nije dopušteno ni *vizualizirati* ni stvarati *predodžbu same stvari* [sc. geometrijskog prostora ili geometrijskih objekata] (*weder sehen noch sich von der Sache selbst eine Vorstellung machen dürfe*; citirano prema Ewald 2005: 159).

[99] Vidjeti, primjerice, pisma Besselu od 27.1.1829. (Ewald 2005: 301) te Schumacheru iz svibnja 1831. (Bonola 1906, §33) i od 28.11.1846. (Ewald 2005: 305).

> nedostižan. Dok se to ne dogodi, geometrija se ne smije stavljati u isti koš s aritmetikom, koja je čisto apriorna, nego s mehanikom." (Gauß Olbersu, 1817, citirano prema Kline 1972: 872)
>
> „Moje je najdublje uvjerenje da teoriji prostora [sc. geometriji] pripada posve drukčije mjesto u sustavu znanja od onoga koje pripada čistoj teoriji veličina (*reine Grössenlehre*) [sc. aritmetici]." (Gauß Besselu, 9.4.1830, citirano prema Ewald 2005: 302)

Ovoliko inzistiram na Gaußu zato što je tek objavljivanje njegove korespondencije tijekom 1860-ih skrenulo pozornost matematičara na temeljne doprinose N. I. Lobačevskog i J. Bolyaija[100] u vezi s hiperboličkom trigonometrijom, kao i zbog činjenice da je Riemannovo uvođenje eliptičke geometrije u habilitacijskom predavanju „Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen" iz 1854. godine (objavljenom 1868.) počivalo na generalizaciji Gaußove diferencijalne geometrije, odnosno njegovih istraživanja (mjere) zakrivljenosti ploha, započetih oko 1816, a objavljenih u „Disquisitiones generales circa superficies curvas" 1827. godine. Upravo je Riemann nazivan „najdubljim filozofom geometrije" (sec. Kline 1972: 889), a smatralo se da je Göttingen, zahvaljujući P. G. Lejeuneu Dirichletu (1805–1859) i Riemannu „ostao rasadnik *najdublje filozofske orijentacije u matematičkim istraživanjima* kakav je postao s Gaußom" (iz pisma W. Webera von Warnstedtu od 26.12.1866; navedeno prema Ferreirós 2006: 67, nap. 2, moj kurziv).

S pravom, jer, kao što *Habilitationsvortrag* nedvojbeno potvrđuje, Riemann je bio zastupnik konceptualne matematike[101] i, štoviše, netko tko je pridonio radikalnoj apstraktnoj preorijentaciji konceptualnog pristupa inzistirajući ne samo na rigoroznom i preciznom zasnivanju matematike nego, da posudimo Hilbertovu formulaciju iz „Axiomatisches Denken", i na produbljivanju temelja (*Tieferlegung der Fundamente*, usp. Hilbert 1918: 407)[102], s ciljem stvaranja novih konceptualnih mogućnosti i proširivanja perspektiva u smjeru razvoja novih, dubljih i općenitijih matematičkih teorija, kao i njihovih primjena u fizici (usp. Ferreirós 2006: 68–69; v. i Laugwitz 1999, Poglavlje 4, osobito §4.4). Povrh toga, takav je metodološki pristup kod Riemanna bio popraćen i svojevrsnim obratom u *ontologiji matematike* – primarni objekti matematike za njega postaju *pojmovi*. Tako, primjerice, on govori o „temeljnim pojmovima" (*Grundbegriffe*) kakvi su „pojmovi veličine" (*Grössenbegriffe*), a osobito o „pojmu n-struko protegnute veličine" (*Begriff einer n-fach ausgedehnten Grösse*) i „kontinuirane veličine" (*stetige Grösse*), čije bi „razvijanje" (*Entwicklung des Begriffs*) trebalo dovesti do razrješenja problema u osnovama geometrije (v. „Über die Hypothesen usw.", §1 *et passim*). Zanimljivo je da je Riemann takva konceptualna istraživanja sasvim eksplicitno okarakterizirao kao filozofska (*Arbeiten philosophischen Natur*), posve nalik Fregeu, koji će trideset godina poslije u uvodu *Grundlagen* (1884) istaknuti da temeljito istraživanje pojma

---

[100] Jánosev otac Farkas Bolyai (1775–1856), poznatiji u Njemačkoj pod imenom Wolfgang, bio je Gaußov školski kolega te su zajedno radili na teoriji paralela u razdoblju od 1795/96. do 1799. Usp. Bonola 1906, §29. V. i nap. 35 *supra*.

[101] Po svoj prilici, Herbart je u tom pogledu bio ključni filozofski utjecaj na Riemanna. V. Riemann 1854/1867. („Über die Hypothesen usw."), §1; usp. Laugwitz 1999: 305 i nap. 82 *supra*.

[102] Slikovita formulacija koju rabi Gray (1979: 251) također bi bila prikladna: *digging underneath all the classical concepts*.

broja nužno mora imati filozofski karakter (*gründliche Untersuchung des Zahlbegriffes wird immer etwas philosophisch ausfallen müssen*), kao i da je riječ o zadatku zajedničkom matematici i filozofiji (*diese Aufgabe ist der Mathematik und Philosophie gemeinsam*). Međutim, kod Riemanna je, za razliku od Fregea, Dedekinda, Kroneckera, ali i samoga Gauša, „očito da su brojevi sekundarni i da imaju tek pomoćnu ulogu" (Laugwitz 1999: 308). Drugim riječima, *konceptualizacija ne podrazumijeva nužno i aritmetizaciju*.[103] I ne samo to, o aritmetizaciji se može govoriti na različite načine – primjerice, Ohm-Kroneckerov pristup nije isti kao Weierstraßov, koji se pak razlikuje od Dedekindova i Fregeova (usp. Petri & Schappacher 2007: 343–44).

Može se reći da su Martin Ohm (1792–1872), brat fizičara Georga Ohma, i Dirichlet bili svojevrsni preteče aritmetizacije utoliko što su vrlo srodne ideje artikulirali već tijekom 1830-ih, gotovo pola stoljeća prije nego što je aritmetizacija postala *à la mode* u Berlinu. Dedekind nam svjedoči o Dirichletovu stajalištu (najvjerojatnije već iz 1829.) da je „samo po sebi razumljivo i nipošto novo da se svaki stav algebre i više analize […] može iskazati kao neki stav o prirodnim brojevima."[104] Sličan je stav Ohm iznio već 1819. u spisu „Kritische Beleuchtungen der Mathematik überhaupt und der Euklidischen Geometrie insbesondere", a potom ga razradio u studiji *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik* iz 1822. godine (proširena i izmijenjena izdanja izlazila su tijekom sljedećih trideset godina, sve do 1852.). U „učenju o brojevima" (*gesammten Zahlenlehre*) koje predstavlja središnji dio njegova matematičkog sustava, Ohm ističe da bi se matematika trebala baviti isključivo „apsolutnim cijelim", odnosno prirodnim brojevima (*absoluter ganzer Zahlen*), dodajući da aritmetika (*die Lehre der Zahlen*) prethodi geometriji (*die Lehre der Größen*) te da je od nje u potpunosti neovisna (*unabhängig*) i samodovoljna (*selbstständig*) (usp. Jahnke 1987, §2.2ff.). Dakle, Ohm je predlagao aritmetizaciju kao *radikalno redukcijski program* – osnovna je ideja bila svesti cjelokupnu čistu matematiku na teoriju prirodnih brojeva.

U tome ga je gotovo *à la lettre* slijedio i Kronecker (1823–1891), uzimajući, doduše, Gaußove *Disquisitiones Arithmeticae* kao uzor. Svoje prve ideje o zasnivanju matematike na teoriji brojeva iznio je u spisu „Über den Zahlbegriff" (1887), a potom ih razradio u nizu predavanja *Über den Begriff der Zahl in der Mathematik* tijekom 1891. godine. Za razliku od Riemanna i Fregea, Kronecker je taj zadatak smatrao strogo matematičkim, inzistirajući na nemiješanju drugih disciplina, a ponajprije filozofije, za koju je smatrao da se već i odviše proširila na matematiku, ali i na prirodne znanosti (*die Übergriffe der Philosophie auf Naturwissenschaften und Mathematik*) (Boniface 2007, §3, str. 330ff.). Također je inzistirao na

---

[103] Hilbert će u *Zahlbericht* (*Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, 1897.) istaknuti da se „čitav suvremeni razvoj čiste matematike ponajprije odvija *u znaku broja* (*unter dem Zeichen der Zahl*)", dodajući da „aritmetizacija geometrije predstavlja rezultat suvremenih istraživanja neeuklidskih geometrija, usmjerenih na njihovu rigoroznu logičku konstrukciju (*streng logischen Aufbau*) i na što neposrednije i posve besprijekorno uvođenje broja u geometriju (*die möglichst direkte und völlig einwandfreie Einführung der Zahl in die Geometrie*)" (Hilbert 1998: ix; kurziv u izvorniku). Međutim, sami tvorci neeuklidskih geometrija – Lobačevski, Bolyai i Riemann – nisu bili pobornici aritmetizacije geometrije.

[104] „[E]rscheint es als etwas Selbstverständliches und durchaus nichts Neues, daß jeder auch noch so fern liegende Satz der Algebra und höheren Analysis sich als ein Satz über die natürlichen Zahlen aussprechen läßt, eine Behauptung, die ich auch wiederholt aus dem Munde von Dirichlet gehört habe." (iz predgovora prvom izdanju *Was sind und was sollen die Zahlen?*)

razdvajanju čiste matematike, odnosno opće aritmetike (*allgemeine Arithmetik*), koja je obuhvaćala i algebru i analizu, od mješovitih znanosti poput geometrije i mehanike, ističući da se „cjelokupni sadržaj" (*den gesammten Inhalt*) svih disciplina čiste matematike „doista mora aritmetizirati"[105], odnosno da „mora biti zasnovan samo i isključivo na pojmu broja u najužem smislu" (*einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen*), to jest na prirodnim brojevima (citirano iz Kroneckerova spisa *Über den Zahlbegriff*, navedeno prema Petri & Schappacher 2007: 355, nap. 63). Dakle, za Kroneckera je ključno bilo *utapanje analize i algebre u opću aritmetiku* (uz eliminaciju svih ne-strogo-aritmetičkih pojmova analize, poput pojma ekstenzivne veličine i kontinuiteta), dok je za Weierstraßa ključno bilo upravo suprotno, naime *inkorporiranje aritmetike u analizu* posredstvom definiranja analitičkih pojmova preko aritmetičkih, osobito preko pojma cijelog broja (usp. Boniface 2007: 336).[106] Upravo je to temeljno razilaženje bilo uzrok velikoga i dugotrajnoga sukoba između Kroneckera i Weierstraßa, koji je „zatrovao pozno razdoblje Weierstraßova života" (Kopfermann 1966: 77).

Dedekind i Frege su u *par excellence logicističkom* duhu aritmetiku promatrali kao „samo jedan dio logike" (*nur einen Teil der Logik*) odnosno kao „šire razvijenu logiku" (*eine weiter ausgebildete Logik*), pri čemu je Dedekind, poput Kroneckera, pod aritmetikom podrazumijevao i algebru i analizu (v. Dedekind 1976: 35; Frege 1884, §87).[107] Obojica su također inzistirali na neovisnosti pojma broja o prostornoj, odnosno geometrijskoj intuiciji. Sudeći prema predgovoru spisa *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872), Dedekind je još 1858., dok je predavao analizu u Zürichu, bio svjestan posve neznanstvenog karaktera „geometrijske evidencije" te nužnosti da se „principi infinitezimalne analize postave na čisto aritmetičke i potpuno rigorozne temelje" (*eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung*) (Dedekind 1976: 17). I Frege je već u svojoj habilitacijskoj raspravi „Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Größenbegriffes gründen" (Frege 1874) inzistirao na oštroj razlici između aritmetike i geometrije, smatrajući da ona počiva na dijametralno suprotnim osnovama (*Gründe*) tih dviju disciplina – dok je izvor aksioma geometrije intuicija, aritmetika uopće nije intuitivna, pa slijedom toga ni njezini principi ne mogu proistjecati iz intuicije.[108]

---

[105] „Alles, was nicht zur Mechanik und Geometrie gehört und was ich also unter dem Namen der Arithmetik zusammenfassen möchte, müsste auch wirklich arithmetisiert werden." (Citirano prema Boniface 2007: 332, nap. 53.)

[106] U pismu P. du Bois-Reymondu iz prosinca 1873. Weierstraß je istaknuo da put prema strogo znanstvenom zasnivanju analize vodi preko algebre, odnosno pojma broja i osnovnih aritmetičkih operacija: „je nachdem man von geometrischen und physikalischen Vorstellungen ausgehend, also mit dem Begriff der extensiven Größe, das Gebiet der Analysis betritt oder von der Algebra aus, d.h. dem Zahlbegriff und den mit demselben notwendig gegebenen arithmetischen Grundoperationen. Ich halte den letzteren Weg für den, auf welchem allein sich die Analysis mit wissenschaftlicher Strenge begründen läßt und alle Schwierigkeiten sich beseitigen lassen." (Citirano prema Petri & Schappacher 2007: 352, nap. 49.)

[107] V. Dedekindov predgovor drugom izdanju *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1893.), u kojem eksplicitno ističe „vrlo bliske dodirne točke" (*sehr nahe Berührungspunkte*) između vlastitoga spisa i Fregeovih *Grundlagen* (Dedekind 1976: 40).

[108] „Die Elemente aller geometrischen Konstruktionen sind Anschauungen, und auf Anschauung verweist die Geometrie als Quelle ihrer Axiome. Da das Objekt der Arithmetik keine Anschaulichkeit hat, so können auch ihre Grundsätze aus der Anschauung nicht stammen." (Frege 1874: 1, v. i Tennant 2022: 207, nap. 9)

Povrh toga, Frege je također nijekao da pojam veličine (*Größenbegriff*) potječe iz intuicije. Sljedeći Tennantov komentar u tom je pogledu osobito zanimljiv:

> „Frege je prešutno prihvatio tobožnji uspjeh programa '*deintuicionizacije*' (*de-intuitionizing*) (te stoga, osobito imajući na umu ono što je rekao u habilitaciji, i '*degeometrizacije*' (*de-geometrizing*)) znanosti o veličini (teorije realnih brojeva). Čini se da Frege nije učinio ništa više od Dedekinda kako bi argumentirao u prilog ili barem opravdao *novonastalu dogmu prema kojoj je realnu analizu trebalo emancipirati*, *očistiti ili učiniti potpuno neovisnom o geometrijskoj intuiciji*." (Tennant 2022: 207, moj kurziv)

Pored degeometrizacije, Dedekindu i Fregeu je, kao uostalom i Ohmu, Kroneckeru i Weierstraßu, glavni cilj bio svesti sve ostale brojeve (negativne, racionalne, iracionalne i kompleksne) na prirodne ili, drugim riječima, dobiti sve ostale brojeve njihovim postupnim proširivanjem (*schrittweise Erweiterung*) (ili pak nekim oblikom konstrukcije iz prirodnih brojeva). Međutim, za razliku od Fregea, koji je 1884. nastojao definirati sam pojam (kardinalnog) broja te *contra* Kantu pokazati da su iskazi aritmetike analitički *a priori*, Dedekind će 1888. godine (a Peano godinu dana poslije) pristupiti zasnivanju prirodnih brojeva *aksiomatski*, što će rezultirati danas dobro poznatim Dedekind–Peanovim aksiomima odnosno *Dedekind–Peanovom formalizacijom aritmetike*.

Prethodno smo istaknuli da je glavni nedostatak Cauchyjeva pristupa bio izostanak temeljitoga ispitivanja pretpostavki na kojima počiva kontinuum realnih brojeva koji predstavlja medij u kojem se odvija klasična (realna) matematička analiza. Također smo vidjeli da je radi prevladavanja toga nedostatka pokrenut program aritmetizacije analize, odnosno njezina svođenja na aritmetiku, to jest, preciznije, na teoriju prirodnih (ili cijelih) brojeva. Međutim, time se javlja novi problem, sadržan u Dedekindovu zahtjevu da se „aritmetika razvije iz same sebe" (*daß die Arithmetik sich aus sich selbst heraus entwickeln soll*) (Dedekind 1872, §3, str. 17). Naime, još od Aristotelova vremena veličine se dijele na *kontinuirane* (συνεχές) i *diskretne* (διωρισμένον), pri čemu su paradigmatski primjeri prvih *geometrijski objekti* (linije, plohe i tijela), a drugih *prirodni brojevi* (Cat. 6, 4b20ff; usp. Bošković 1975, §6). Prema Russellu, među tradicionalnim problemima filozofije matematike „malo je koji važniji od odnosa između kontinuiranih veličina i broja" (Russell 1903, §149). U spisu *De continuitatis lege* (1754), Bošković je formulirao stajalište koje je od Aristotela pa sve do 1872. godine predstavljalo opće mjesto u matematici i filozofiji matematike: temelji teorije kontinuuma odnosno kontinuiranih ekstenzivnih veličina (*stetigen extensiven Größen*), kako su se nazivale u 19. stoljeću, počivali su na geometriji, a ne na aritmetici[109] i, povrh toga, geometrijska koncepcija kontinuuma bila je utemeljena na intuiciji. Ernest W. Hobson (1856–1933) će u djelu *The Theory of Functions of a Real Variable* čak ustvrditi da je ta geometrijsko-intuitivna koncepcija zapravo bila jedina koncepcija kontinuuma sve do druge polovice 19. stoljeća, dodajući pritom da je „bila toliko nejasna i neodređena da se nije mogla uklopiti u egzaktno matematičko mišljenje" (Hobson 1921: 52).

[109] Bošković, *op. cit.*, *ad loc.*: „Ut autem ipsius principii Continuitatis notio evadat magis perspicua, continuae quantitatis naturam persequemur primo loco et eam Geometriae ope illustrabimus, tum ad ipsum continuitatis principium explicandum faciemus gradum."

Evo kako su problem kanonski formulirali Fraenkel, Bar-Hillel i Levy u glasovitoj knjizi *Foundations of Set Theory*:

> „Kontinuum je upravo onaj domen na koji referiraju analiza i geometrija. Međutim, u njima se kontinuum pretpostavlja kao *osnova*, dok teorija skupova nastoji *konstruirati* kontinuum. […] Polazišna točka toga postupka jest *diskretni* (diskontinuirani) agregat, odnosno skup svih cijelih brojeva ili izoliranih točaka. […] *Premoščivanje jaza između područja diskretnosti i kontinuiranosti*, odnosno između aritmetike i geometrije, centralni je, štoviše *najcentralniji* je problem u zasnivanju matematike. […] Premošćivanje jaza između ta dva heterogena područja nije samo centralni nego i najstariji problem u zasnivanju matematike i srodnim filozofskim područjima." (Fraenkel, Bar-Hillel & Levy 1973, Ch. IV, §1, str. 211–12)

Godine 1872. u Njemačkoj su objavljena četiri rada u kojima je predstavljena nova aritmetička teorija iracionalnih brojeva – Weierstraßova[110], Cantorova, H. E. Heineova (1821–1881) (koja se temeljila na onome što je Heine naučio od Cantora) i Dedekindova.[111] Charles Méray (1835–1911) objavio je svoju konstrukciju, vrlo sličnu Cantorovoj, još 1869/70. u Francuskoj, međutim nema nikakvih naznaka da su njemački matematičari znali za njegov rad ili da su na bilo koji način bili pod njegovim utjecajem. Za sada ćemo izostaviti tehničke pojedinosti Dedekindove i Cantorove konstrukcije realnih brojeva jer ćemo se s njima susresti u odjeljcima [2.6.1] i [4.2], posvećenima teoriji takozvanih *Veroneseovih brojeva* odnosno *nadrealnih brojeva*. Glavna odlika Weierstraßova, Cantorova i Dedekindova pristupa sastoji se u tome što su konstrukciji iracionalnih brojeva pristupili *infinitistički* i *skupovnoteorijski*. U desetljećima koja su obilježila kraj 19. i početak 20. stoljeća sustav realnih brojeva nazivan je *aritmetičkim kontinuumom* jer se smatralo da je „upravo taj brojevni sustav prikladan za analitičku reprezentaciju svih tipova kontinuiranih veličina" (Hobson 1921, §42). U skladu s tim stajalištem držalo se da je „središnji i najstariji problem u osnovama matematike i srodnim filozofskim disciplinama" riješen, te da je „jaz između područja diskretnosti i kontinuiranosti" premošten proglašenjem *geometrijskog linearnog kontinuuma* izomorfnim aritmetičkom kontinuumu. U čast Cantora i Dedekinda, koji su prvi predložili tu matematičko-filozofsku tezu, tvrdnja o korespondenciji tih dviju struktura naziva se *Cantor–Dedekindovim aksiomom* (usp. Ehrlich 1994a: viii). Prema Russellovu mišljenju, „posljednje utvrde škole koja se može nazvati intuicionističkom" – kontinuitet i iracionalni brojevi – u svjetlu onoga što je on nazvao *purističkom reformom*, „više joj ne pripadaju":

> „Aritmetika, polazeći od cijelih brojeva, uspješno definira sve ostalo što joj je potrebno – racionalne brojeve, granične vrijednosti (limese), iracionalne brojeve,

---

[110] Prema Kopfermannu (1966: 80), moguće je da je Weierstraß već 1841. imao neku teoriju realnih brojeva. Međutim, pouzdano znamo da je danas poznatu konstrukciju iracionalnih brojeva pomoću beskonačnih skupova (Weierstraß ih je nazivao *Aggregate*) u osnovnim crtama izložio na predavanjima tijekom 1860-ih, a konačno ju razvio tijekom 1870-ih (osobito u predavanjima iz 1874.) i 1880-ih. E. Kossak je u djelu *Die Elemente der Arithmetik* (Berlin, 1872.) dao sažeti prikaz Weierstraßove konstrukcije. Za više pojedinosti v. Petri & Schappacher 2007, §2.1.

[111] Dedekind je svoju teoriju formulirao već u jesen 1858., ali ju je objavio tek četrnaest godina poslije, potaknut objavljivanjem Heineova i Cantorova rada u *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, odnosno u *Mathematische Annalen*. Kao razloge za odgađanje objavljivanja naveo je „složenost izlaganja" (*die Darstellung nicht ganz leicht*) i, što je osobito zanimljivo s obzirom na povijesni značaj Dedekindova reza, „neplodnost" rezultata do kojih je došao (*die Sache so wenig fruchtbar ist*). V. Dedekind 1872: 10.

> neprekidnost i tako dalje. […] Upravo je ta znanost, mnogo više nego neeuklidske geometrije, zapravo pogubna za kantovsku teoriju *a priori* intuicija kao osnova matematike.“ (Russell 1903, §149)[112]

I ne samo to, nego je Russell, kao glavni promicatelj nove matematičke filozofije „velikoga trijumvirata“ Weierstraß–Dedekind–Cantor, već 1901. u radu *Recent Work on the Principles of Mathematics* istaknuo da su upravo „ta tri čovjeka u potpunosti razriješila“ tri središnja filozofska problema: *problem prirode infinitezimala*, *problem prirode beskonačnosti* i *problem prirode kontinuuma* (usp. Russell 1917: 82). Zahvaljujući Russellovu autoritetu, Cantor–Dedekindova filozofija kontinuuma tijekom 20. stoljeća nametnula se kao definitivni standard i neprikosnovena „akademska dogma“ (sec. Błaszczyk *et al.* 2013: 58), koja leži u temelju svih standardnih formulacija analize, analitičkih i sintetičkih teorija geometrijskog linearnog kontinuuma te općenito standardnih aksiomatskih teorija kontinuiranih veličina (Ehrlich 1994a, *ad loc. cit.*). Kada je riječ o infinitezimalima,

> „druga važna promjena u općem gledištu za koju su zaslužni tvorci modernoga linearnog [aritmetičkog] kontinuuma bilo je odbacivanje svih infinitezimala, odnosno veličina koje se ne pokoravaju Arhimedovu postulatu. […] Infinitezimali, koji su bili predmet brojnih kontroverzi i za koje su mnogi smatrali da sadrže element misticizma, Weierstraß i Cantor protjerali su iz svojih matematičkih koncepcija. Prethodnih se godina smatralo da su infinitezimali nužni za objašnjenje linearnoga kontinuuma. […] Međutim, ono što je jednoj generaciji nemoguće često postaje moguće onoj koja slijedi. *Weierstraßovo protjerivanje beskonačno malog zadobilo je brojne sljedbenike*; starinski infinitezimali više nisu potrebni za objašnjenje kontinuuma. […].“ (Cajori 1915: 219, moj kurziv)

„Protjerivanje infinitezimala“ o kojem govore Russell, Hobson i Cajori jednostavno se može objasniti činjenicom da je Cantor-Dedekindov aritmetički kontinuum – skup odnosno uređeno polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva – *arhimedovska struktura* (usp. nap. 3 *supra*), a kao što će istaknuti Rodolfo Bettazzi (1861–1941), autor *Teoria delle grandezze* (1890) i, uz Veronesea, jedan od pionira nearhimedovske matematike u 19. stoljeću, *con il postulato d'Archimede l'infninitesimo non esiste* (Bettazzi 1891: 177).[113] Russell će formulirati stajalište koje će tijekom čitavoga 20. stoljeća postati dominantno u historiografiji i filozofiji matematike, naime da se „infinitezimali kao objašnjenje kontinuuma moraju smatrati nepotrebnima, pogrešnima i samoproturječnima“ te, općenito uzevši, „vrlo ograničenom i matematički posve nevažnom koncepcijom od koje su i beskonačnost i neprekidnost potpuno neovisne“ (Russell 1903, §§314 i 324). Kao što ćemo vidjeti u trećem dijelu, filozofi i povjesničari Russella su očito shvatili kao da tvrdi da je infinitezimalizam ne samo matematički nego ujedno *i filozofski i povijesno posve nevažna koncepcija*. Charles Sanders Peirce (1839–1914), također pobornik nearhimedovske matematike, u bilješci „The Question of Infinitesimals“ (s-14), § III, takvo je stajalište nazvao *predrasudom protiv infinitezimala* (Peirce 1976: 123), a John

[112] Iz navedenoga citata jasno je da Russell ovdje nema na umu Brouwerov ili Weylov intuicionizam.

[113] V. i Veronese 1891: 105, nap. 1: „nelle definizioni date da altri [sc. Cantor, Stolz e Du Bois-Reymond] del continuo ordinario è contenuto implicitamente l'assioma suddetto [sc. l'assioma d'Archimede]. In tal caso [la] grandezza infinitesima […] è esclusa a priori come avviene ad es. colla definizione del continuo data dal sig. Cantor stesso.“

Lane Bell, jedan od utemeljitelja takozvane glatke infinitezimalne analize (*Smooth Infinitesimal Analysis*, skraćeno SIA)[114] i autor utjecajne knjige *The Continuous, the Discrete, and the Infinitesimal in Philosophy and Mathematics*, okarakterizirat će ga kao „dogmatsko protivljenje infinitezimalima" (Bell 2019: 128). U trećem ćemo dijelu vidjeti na koji je način ta predrasuda uopće nastala i kako je utjecala na recepciju Veroneseove teorije.

Tijekom prethodnoga izlaganja uspjeli smo detektirati čak *tri dogme* na kojima počiva standardna (arhimedovska) post-trijumviratska matematika i njoj pripadajuća filozofija matematike: dogmu aritmetizacije odnosno degeometrizacije[115], Cantor–Dedekindovu aritmetičko-skupovnoteorijsku dogmu koja uključuje infinitizam i poentilizam u pogledu strukture kontinuuma, te, naposljetku, vajerštrasovsku dogmu protiv infinitezimala. Te tri dogme predstavljaju osi duž kojih se, prema mišljenju većine povjesničara, odvijao proces reforme i modernizacije matematike u drugoj polovici 19. i početkom 20. stoljeća. Međutim,

> „potrebno je naglasiti činjenicu da Weierstraßova škola nije univerzalno prihvaćena i da *postoje suvremeni zagovornici nearhimedovske matematike* i beskonačno malih [veličina], *među kojima je vodeći talijanski matematičar Giuseppe Veronese*. On inzistira na tome da Cantorov kontinuum nije jedini mogući neproturječni kontinuum te daje konstrukciju višega i obuhvatnijega nearhimedovskog kontinuuma." (Cajori 1915: 220, moj kurziv)

Grattan-Guinnessovim riječima, „u Svetom vajerštrasovskom carstvu prakticirala se hereza!" (Grattan-Guinness 2000: 121) Već u svojoj prvoj publikaciji posvećenoj nearhimedovskoj matematici, „Il continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede" (1889), Veronese je odlučio izravno dovesti u pitanje sve tri dogme: (a) matematičko-filozofskom tezom o neovisnosti pojmova linearne veličine (*lineare Größenbegriff*) i neprekidnosti o arhimedičnosti (*Archimedizität*), (b) pokazivanjem da je infinitezimale moguće uvesti na konzistentan i rigorozan način te (c) formuliranjem specifične nearhimedovske, a ujedno i aristotelovske, dakle nepoentilističke teorije geometrijskog linearnog kontinuuma (Veronese ga je u *Fondamenti* (1891) nazivao *continuo intuitivo*). U svemu tome Veronese se, kao geometar, ali i kao jedan od *metageometara*[116] odnosno filozofa geometrije zalagao za autonomiju svoje discipline, inzistirajući na tome da, kada je riječ o osnovama geometrije, čisto geometrijsko stajalište (*punto di vista puramente geometrico*) mora prethoditi analitičkomu, bilo ono aritmetičko, skupovnoteorijsko ili logičko (usp. Veronese 1891: xxii).

---

[114] Terence Tao nazvao je Lawvere–Bellovu SIA „jeftinom verzijom [Robinsonove] nestandardne analize (NSA), jer je slabija od njezine punokrvne inačice, ali nije u tolikoj mjeri infinitarna budući da je konstruktivna (u smislu da ne zahtijeva nikakvu varijantu aksioma izbora)" (Tao 2012).

[115] Prva bi se dogma mogla nazvati i dogmom formalizacije ili „logicizacije" matematike (izraz potječe od Hahna; usp. 1954: 87), budući da se već kod Dedekinda, a posve eksplicitno kod Fregea i Russella, aritmetizacija počela shvaćati kao logičko zasnivanje matematike koje je s Hilbertom preraslo u novi trend *aksiomatizacije* (usp. Laugwitz 1999, §4.5.2, osobito str. 318–321), što se od Mehrtensa (1990) smatra određujućom značajkom matematičkog modernizma (usp. Gray 2008, I.1.2).

[116] Izraz „metageometrija" (*Metageometrie*) tada je imao pretežno pejorativnu konotaciju (nalik „metafizici") i bio je rezerviran za istraživače osnova geometrije. Tako, primjerice, Cantor govori o Veroneseu, Helmholtzu i Riemannu kao o metageometrima. V. Cantorovo pismo Veroneseu od 17.11.1890. u Meschkowski & Nilson 1991: 129, kao i Odjeljak [2.5] ove disertacije.

Analizirajući proces modernizacije matematike, Mehrtens je predložio zanimljiv eksplanatorni model. Njegova je ideja bila promatrati taj proces kroz sukob između *modernista* (*die Moderne*) i *kontramodernista* (*die Gegenmoderne*) (Mehrtens 1990). S obzirom na Veroneseov kritički odnos prema ustaljenim matematičko-filozofskim dogmama, prema Mehrtensovoj klasifikaciji morali bismo ga svrstati među kontramoderniste i kontrareformiste, zajedno s Kleinom i Poincaréom, koje je Mehrtens također tako okarakterizirao (usp. Gray 2008: 10). Već sam ukazao (usp. Popović 2017, §5) na to da su takva tumačenja opravdana jedino ako, *à la* Fraser, smatramo da je historiografski dopušteno uzimati suvremenu standardnu – kantorovsku – matematiku kao „primarnu referentnu točku za razumijevanje" starijih teorija, uključujući i nearhimedovske teorije poput Veroneseove. Međutim, kao što ćemo vidjeti u nastavku, osobito u trećem dijelu, vrednovanje infinitezimalističkih teorija teorijom koja je eksplicitno *antiinfinitezimalistička*[117] neminovno mora rezultirati *historiografski i metodološki upitnom* rekonstrukcijom recepcije nearhimedovske matematike druge polovice 19. stoljeća, *iskrivljavanjem slike* o stvarnim razmjerima Veroneseova *Nachlebena* te *previđanjem* kontinuiteta između Veroneseove teorije i suvremenih nearhimedovskih teorija poput Robinsonove ili Conway–Ehrlichove.[118] Također ćemo, *contra* Mehrtensu, koji je Hilberta smatrao središnjom figurom matematičkog modernizma, pokazati da je već Veronese razvio „savršen prehilbertovski stil" (Avellone *et al.* 2002: 382) te da se ne samo može nego i mora smatrati „pretečom matematike dvadesetoga stoljeća i, osobito, Hilbertovih *Grundlagen der Geometrie* (1899)" (Laugwitz 2002: 116). A sve što je potrebno kako bismo to uvidjeli jest *iznijansiraniji* i *manje dogmatski pristup* kakav je skiciran u Odjeljku [1.1] (v. i Blåsjö 2019: 85). Prije nego što pristupimo rekonstrukciji Veroneseove teorije iz *Fondamenti*, pogledajmo još na koji je način trijumviratska matematika oblikovala istraživačke pravce i trendove u filozofiji matematike dvadesetoga stoljeća.[119]

[117] Za Cantorovu kritiku Veronesea v. Odjeljak [3.1] i Dodatak D *infra*.

[118] Tako, primjerice, Fraser smatra da su se „nestandardna analiza i druge nearhimedovske inačice računa pojavile tek relativno nedavno, i to u nejasnim matematičkim okvirima koji *teško da imaju ikakve veze* s [fazama] povijesnog razvoja [analize] od prije jednog, dva ili tri stoljeća." (Fraser 2015: 27, moj kurziv) Valja istaknuti da je Lakatos za opis takvoga postupanja rabio još snažniju formulaciju – *falsificiranje povijesti* (v. Odjeljak [2.1]) – koja se, međutim, može pokazati posve opravdanom, osobito u svjetlu analize koju ću iznijeti u trećem dijelu disertacije.

[119] Blåsjö 2019 predstavlja vrlo zanimljivo preispitivanje „trijumfalističkog narativa", prema kojem je suvremena kantorovska matematika „neizbježan ishod racionalnog progresa" (str. 84). *Ad loc.*, Blåsjö ističe da „val antiintuicijskih sentimenata koji su prevladavali tijekom većega dijela 20. stoljeća *ne predstavlja kraj povijesti* niti definitivno 'ispravno' shvaćanje matematike; prije je riječ o *ideologiji* koja je spletom okolnosti odgovarala potrebama jednoga određenog razdoblja." (moj kurziv)

Dodatak B

Kao što smo vidjeli u prethodnom odjeljku, tijekom 19. stoljeća uveden je niz novih ideja koje su otprilike od 1880. godine dospjele u središte rasprava o osnovama matematike. U nastavku donosimo sažet tablični prikaz pojedinih *Hauptmomente* – ključnih ideja, rezultata i pomaka – u razvoju moderne geometrije i analize u drugoj polovici 19. stoljeća (*Tabl. 1* i *Tabl. 2*, izrađeno djelomično prema Gray 2008, I.2, str. 16). Navedeni pregled, naravno, nije iscrpan, nego tek indikativan s obzirom na tematski raspon i glavne pravce teorijskoga razvoja i istraživanja; pritom su naznačeni vodeći akteri i neke od najvažnijih publikacija (ne nužno kronološki poredane).

Tablica 1. Pregled nekih ključnih ideja i rezultata u razvoju moderne geometrije

NEEUKLIDSKA GEOMETRIJA	Konzistentna metrička geometrija razvijena neovisno o Euklidovu petom postulatu, odnosno Playfairovu aksiomu o paralelama; njezino je otkriće pokazalo da euklidska geometrija nije jedina logički moguća geometrija te da fizički prostor nije nužno euklidski.	Iako su Lobačevski i Bolyai svoje prve radove objavili 1829. („О началах геометрии“) odnosno 1833. godine (*Appendix*), matematičari su za njih doznali tek nakon objavljivanja Gaußove cjelokupne korespondencije u razdoblju 1860–63. Ubrzo potom, 1868. godine, objavljeno je i Riemannovo habilitaciono predavanje „Über die Hypothesen usw.“ iz 1854. u kojoj je Riemann poopćio Gaußova istraživanja zakrivljenosti ploha iz 1827. (= prvi rezultati diferencijalne geometrije). Iste je godine Beltrami u djelu *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* ponudio i prvi model neke neeuklidske (hiperboličke) geometrije.
PROJEKTIVNA (NEMETRIČKA) GEOMETRIJA	Geometrija u kojoj ne figuriraju metrički pojmovi (kutovi, dužine, površine, itd.), nego samo pojmovi koji se odnose na incidenciju (pripadanje); bazičnija i od euklidske i od neeuklidskih geometrija.	Iako su prvi važni rezultati ostvareni još u 17. stoljeću (Desargues, Pascal), prva važna publikacija u 19. stoljeću jest Carnotova *Géométrie de position* (1803), dok se kanonskim djelima smatraju Ponceletov *Traité des propriétés projectives des figures* (1822), kao i von Staudtova *Geometrie der Lage* (1847).

***n*-DIMENZIONALNA GEOMETRIJA (GEOMETRIJA HIPERPROSTORA)**	Geometrija prostora proizvoljnoga broja dimenzija, uključujući standardni euklidski, neeuklidske, projektivne, afine i druge tipove prostora.	Graßmann, *Die lineale Ausdehnungslehre* (1844; drugo, revidirano izdanje 1862); Veronese, „Behandlung des projectivischen Verhältnisse der Räume usw." (1882), „La superficie omaloide normale a due dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario" (1883/84), *Fondamenti di geometria* (1891); Segre, *Mehrdimensionale Räume* (1921).
ERLANGER PROGRAMM	Prvi sustavni pokušaj hijerarhijske klasifikacije geometrija unutar projektivne geometrije kao bazične; prvo jasno povezivanje grupa transformacija s geometrijom kako bi se razjasnila ideja o različitim vrstama geometrije.	Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen* (1872); Russell, *An Essay on the Foundations of Geometry* (1895/1897).
AKSIOMATSKA GEOMETRIJA	Implicitno definiranje osnovnih geometrijskih pojmova preko skupova aksioma; aksiomatizacija kao kreativna metoda za konstruiranje novih matematičkih struktura. Iz aksiomatskog pristupa geometriji postupno se razvijaju meta-matematička istraživanja formalnih sustava, kao i *teorija modela* i *teorija dokaza*.	Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882); Peano, *I principii di geometria logicamente esposti* (1889); Veronese, *Fondamenti di geometria* (1891) i *Elementi di geometria* (1897); Pieri, *I principii della geometria di posizione composti in sistema logico-deduttivo* (1898), „Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo" (1899) i *La geometria elementare istituta sulle nozioni di 'punto' e 'sfera'* (1900); Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (1899).

Tablica 2. Pregled nekih ključnih ideja i rezultata u razvoju moderne analize

ARITMETIZACIJA ANALIZE	Reformski pokret u matematici započet radovima Bolzana, Cauchyja i M. Ohma početkom 19. stoljeća, a nastavljen djelovanjem Weierstraßa (otprilike od 1857. do 1890. godine), Kroneckera, Dedekinda i Cantora.	Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Satzes usw.* (1817); Ohm, „Kritische Beleuchtungen der Mathematik usw." (1819), *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik* (1822); Cauchy, *Cours d'Analyse* (1821); Weierstraß, *Gesammelte Werke*, Bd. I–III, 1894–1903 (v. posebno *Vorlesungen zur Functionentheorie* i *Abhandlung aus der Functionenlehre*); Kronecker, „Über den Zahlbegriff" (1887), *Über den Begriff der Zahl in der Mathematik* (1891). Također, usp. S. Pincherle, „Saggio di una introduzione alle theoria delle funzioni analytiche secondo i principii di Prof. C. Weierstrass" (1880) i Stolz, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* (1885). Usp. Klein, "Über Arithmetisierung der Mathematik" (1895) i Poincaré, „L'Oeuvre mathématique de Weierstraß" (1898).
PRIRODNI BROJEVI (ℕ)	Frege daje prvu strogu i preciznu definiciju pojma „broj" (*Anzahl*), dok Dedekind i Peano prvu aksiomatizaciju i logičko zasnivanje prirodnih brojeva (tzv. *Dedekind-Peanova aritmetika*).	Frege, *Grundlagen der Arithmetik* (1884); Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888); Peano, *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (1889). Usp. i Husserl, *Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchungen* (1891) i Russell, *Principles of Mathematics* (1903). a

	Skupovnoteorijsku konstrukciju realnih brojeva neovisno razvijaju Cantor i Dedekind: Cantor pomoću *Cauchyjevih nizova racionalnih brojeva*, a Dedekind pomoću *Dedekindovih rezova* (koje je razvio još 1858., ali objavio tek 1872. godine).	Dedekind, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* (1872). Cantor, „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“ (1872).
REALNI BROJEVI (ℝ)	Obojici je prethodio Weierstraß, koji je već početkom 1860-ih godina u svojim berlinskim predavanjima iz teorije funkcija izložio vlastitu konstrukciju realnih brojeva kao beskonačnih nizova odnosno suma jedinica (tzv. *Zahlengrößen*). Tridesetak godina kasnije, Hilbert je dao aksiomatizaciju uređenog polja ℝ realnih brojeva.	[**N.B.** Cantorova je konstrukcija u biti ekvivalentna onima koje su pružili Ch. Méray u *Remarques sur la nature des quantités* (1869) i E. Heine u „Die Elemente der Functionenlehre“ (1872)]; Hilbert, „Über den Zahlbegriff“ (1900).
SKUPOVNO-TEORIJSKO ZASNIVANJE ANALIZE (*u vezi s preth. točkom*)	Prve ideje o zasnivanju analize i algebarske teorije brojeva posredstvom teorije skupova iznio je Dedekind, dok je Cantor otkrićem prebrojivih i neprebrojivih skupova omogućio rigorozan matematički tretman beskonačnosti te utemeljio transfinitnu aritmetiku. Skupovnoteorijske metode osobito su se razvile u francuskoj matematici, ponajprije u realnoj, kompleksnoj, funkcionalnoj i stohastičkoj analizi te u teoriji mjere, integracije, dimenzije i vjerojatnosti (É. Borel, H. Lebesgue, M. Fréchet, P. Montel, R.-L. Baire, J. Drach i A. Denjoy).	Dedekind, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* (1872); Cantor, „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten“ I–VI (1879–1884). Usp. i: Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (1883). V. i Borelovu ediciju *Collection de Monographies sur la théorie des fonctions* (prvi naslov pojavio se već 1890. godine).

NEPREKIDNE, NIGDJE DIFERENC-IJABILNE FUNKCIJE (i s njima povezane **ZNAMENITE KRIVULJE** i **FRAKTALI**)	Izrazito protuintuitivni, odnosno „patološki" matematički objekti; pokazuju da postoje matematički objekti koji se mogu strogo analitički definirati na neproturječan način, premda se u naivnoj predweierstraßovskoj (nerigoroznoj i geometrijskoj) analizi držalo da su takvi objekti nemogući.	Weierstraß, „Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen" (pročitano na sjednici Berlinske akademije znanosti 18.7.1872; du Bois-Reymond priopćio rezultat 1875. u radu „Versuch einer Klassifikation der willkürlichen Funktionen reeller Argumente" (Crelles *Journal*, Bd. 79); v. i Weierstraß, *Math. Werke*, Bd. 2, Abh. II, 1895). [**N.B.** Prije Weierstraßa, također su ih definirali i B. Bolzano (sredinom 1820-ih), B. Riemann (oko 1861.) i Ch. Cellérier (1860-ih, objav. posthumno 1890.).]
KONTINUIRANA KRIVULJA (*u vezi s preth. točkom*)	Naivan intuitivni pojam podložan različitim definicijama i koji dopušta kontraintuitivne primjere (krivulje bez duljine ili krivulje koje imaju površinu – v. von Kochovu, Peanovu, Hilbertovu ili krivulju Sierpińskiog). Glavni izazov: uskladiti geometrijsku intuiciju s onim što se o kontinuiranim krivuljama moglo matematički dokazati	Jordan, *Cours d'Analyse* (1887, §§39–45, „Courbes continues"); Peano, „S" (1890); Hilbert, „Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück" (1891); von Koch, „Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes" (1906); Menger, *Kurventheorie* (1932). Usp. i Hahn, „Die Krise der Anschauung" (1933); Waismann, *Einführung in das mathematische Denken* (1936).

[1.4] O povijesti filozofije matematike: dvije tradicije

Na inicijativu Garretta Birkhoffa (1911–1996), Američka akademija znanosti i umjetnosti organizirala je 1974. godine interdisciplinarnu radionicu „Historical Evolution of Modern Mathematics" koja je okupila neke od tada vodećih matematičara te povjesničara i filozofa matematike, a prilozi s popratnim raspravama, „usredotočenima na brojna historiografska i filozofska pitanja", objavljeni su sljedeće godine u *Historia Mathematica* (Vol. 2, Iss. 4) (v. Voss 1975). Tvorac konstruktivne analize Errett Bishop (1928–1983) bio je jedan od sudionika. U svom prilogu naslovljenom „The Crisis in Contemporary Mathematics" napomenuo je da ga „obuzima neodoljiv dojam da je *povijest filozofije matematike veoma opasna*" te da smatra kako bi „povjesničari [matematike] trebali biti temeljno zabrinuti zbog *potencijalne opasnosti* onoga što rade" (Bishop 1975: 508, moj kurziv). Tu naizgled dramatičnu izjavu trebalo bi shvatiti u kontekstu Bishopova kritičkog stava prema filozofiji matematike, odnosno, preciznije, prema filozofiji matematike kakva se dominantno prakticirala – kao disciplina isključivo usredotočena na probleme zasnivanja matematike – praktički sve do kraja 1970-ih i početka 1980-ih. Prema Bishopu, kriza suvremene matematike očituje se u *zanemarivanju filozofskih pitanja* zbog usmjerenosti na tehničke aspekte i matematičku analizu problema zasnivanja nauštrb onoga što je filozofski supstantivno: „zbog toga se filozofija izjednačuje s proučavanjem formalnih sustava […] što za posljedicu ima da mi [sc. matematičari] dokazujemo teoreme ne znajući što oni znače" (*op. cit.*, str. 507). Kako, kada i zbog čega filozofija matematike biva izjednačena s zasnivanjem matematike?

Philip Kitcher i William Aspray u uvodu danas već klasičnoga zbornika *History and Philosophy of Modern Mathematics*[120] ističu da „iako se filozofi matematike možda ne slažu u pogledu mnogih stvari, ipak se iznimno slažu u pogledu toga kada je njihova disciplina započela. Prema prevladavajućoj ortodoksiji, povijest filozofije matematike započinje s Fregeom […] koji se najčešće promatra kao *fons et origo* prave filozofije matematike." (Kitcher & Aspray 1988: 3). Pod „pravom" filozofijom matematike ovdje se misli na *zasnivanje* kao središnji problem filozofije matematike, pri čemu se smatra da je upravo Frege prvi identificirao taj problem i stavio ga u središte filozofskih istraživanja matematike. *Locus classicus* potječe iz *Grundlagen der Arithmetik*: „ako pojam koji leži u osnovi jedne velike znanosti zadaje teškoće, zacijelo je neizbježna zadaća taj pojam što preciznije istražiti i te teškoće prevladati", jer će, u protivnom, „uvid u temelje čitave građevine aritmetike biti manjkav".[121] Međutim, u Odjeljku [1.3] vidjeli smo da Fregeov pothvat u *Grundlagen* predstavlja tek dio šireg matematičko-filozofskog programa aritmetizacije i rigoroznoga zasnivanja analize, čiji su ciljevi artikulirani već u Bolzanovu spisu *Beyträge zu einer begründeteren*

[120] U kontekstu rasprave i glavne poante iz Odjeljka [1.1] zanimljivo je spomenuti da je primarni cilj ovoga zbornika „razumjeti kako se rad povjesničara, filozofa i matematičara može integrirati u interdisciplinarno istraživanje matematike." (usp. *op. cit.*, str. vii)

[121] „Wenn ein Begriff, der einer grossen Wissenschaft zu Grunde liegt, Schwierigkeiten darbietet, so ist es doch wohl eine unabweisbare Aufgabe, ihn genauer zu untersuchen und diese Schwierigkeiten zu überwinden, besonders da es schwer gelingen möchte, über die negativen, gebrochenen, complexen Zahlen zu voller Klarheit zu kommen, solange noch die Einsicht in die Grundlage des ganzen Baues der Arithmetik mangelhaft ist." (Frege 1884, Einleitung)

Darstellung der Mathematik (1810), a koje je u određenom smislu ostvario već Weierstraß sredinom 19. stoljeća. Isto smo tako vidjeli da je Frege bio samo jedan od brojnih zagovornika nove, moderne konceptualne matematike usredotočene na analizu temeljnih pojmova, primjerice pojma broja. Fregeov bi utjecaj stoga trebalo promatrati ne toliko u kontekstu onoga što je pokušao ostvariti u *Grundlagen* (i kasnijim *Grundgesetze*), koliko u kontekstu ranijega *Begriffsschrifta* (1879), koji predstavlja „možda najvažnije pojedinačno djelo iz logike ikada napisano", a čiji su temeljni doprinosi „istinosno-funkcionalni iskazni račun, analiza iskaza u terminima odnosa između funkcije i argumenta umjesto subjekta i predikata, teorija kvantifikacije", i tako dalje (usp. van Heijenoort 1967: 1). U predgovoru *Principia Mathematica* Russell i Whitehead (1861–1947) istaknut će da „u svim pitanjima logičke analize ponajprije smo Fregeovi dužnici" (Whitehead & Russell 1910: ix), dok je u Dodatku B ranijih *Principles of Mathematics* Russell naglasio da se i Fregeov logički simbolizam temelji na analizi logičkih pojmova koja je mnogo dublja i filozofski superiornija od Peanove iz *Formulario mathematico* (Russell 1903, §475). Dakle, s povijesnoga gledišta, Fregeov značaj za suvremenu filozofiju matematike ponajprije se sastoji u uvođenju matematičke logike kao moćnoga i nezaobilaznoga alata za provođenje filozofske analize problema koji se tiču osnova matematike[122] te, posljedično, u formuliranju *logicizma* kao jednoga od triju glavnih programa zasnivanja matematike u 20. stoljeću, uz Brouwerov *intuicionizam* i Hilbertov *formalizam* (i *metamatematiku*).[123]

Većina suvremenih pozicija u filozofiji matematike (nominalizam, strukturalizam, neologicizam) razrađena je u vezi s ovim klasičnim programima zasnivanja ili u (kritički intoniranom) dijalogu s njima (Mancosu 2008: 3). Stoga bi se moglo reći da je, promatrano iz povijesne perspektive, *fin-de-siècle* matematička filozofija[124] tematski usmjerila suvremenu filozofiju matematike prema problemima zasnivanja, jednoznačno odredivši smjer njezina budućeg razvoja od kojega nije bilo značajnijih odstupanja. Sljedeći navod dobro ilustrira ovu poantu:

> „[S]lika se nije mnogo promijenila tijekom posljednjih 50 godina. *Frege-Russell-Hilbertova strategija pretvaranja filozofskih pitanja o matematici u logičko-matematička pitanja* [usp. s prethodno navedenim Bishopovim napomenama – prim. S. P.] bila je veoma uspješna u dvadesetom stoljeću, iako postoji opća suglasnost da nije dovela do konačnoga rješenja tih pitanja. Ta je strategija za mnoge definirala sam izraz 'filozofija matematike'." (Ferreirós & Gray 2006a: 4–5, moj kurziv)

[122] Mancosu tako govori o matematičkoj logici kao o „kanonu filozofije matematike" (Mancosu 2008: 4).

[123] Ideološki i filozofski Fregeovu programu najbliži su bili Dedekind (za kojega se s pravom može reći da je omogućio da trend aritmetizacije kulminira logicizmom – usp. Tennant 2023, §1.1), Russell i Whitehead te, u određenom smislu, čak i Zermelo (usp. Pogonowski 2021). Za suvremenu inačicu logicizma, takozvani *neologicizam*, v. *The Arché Papers on the Mathematics of Abstraction* (Cook 2007). Intuicionizam L. E. J. Brouwera (1881–1966) bio je djelomično motiviran Kantovom filozofijom matematike, dok su prethodnici Hilbertova formalističkog programa ponajprije bili H. E. Heine, H. Hankel (1839–1873) i C. J. Thomae (1840–1921) (usp. Lawrence 2023).

[124] Ovim se izrazom služim u značenju koje mu daju Ferreirós & Gray 2006a, §2.1, za označavanje strategije rješavanja filozofskih problema ili pitanja povezanih s matematikom posredstvom logike i/ili matematike.

To potvrđuje i Robinsonov tekst „Concerning Progress in the Philosophy of Mathematics“ iz 1975. godine u kojem pod „matematičke filozofije (*sic!*) koje su od centralne važnosti u našem vremenu“ podvodi teoriju skupova, teoriju dokaza, teoriju rekurzije i teoriju modela, odnosno one teorije čiji je cilj „eksplikacija [fundamentalnih] pojmova (i) kardinalnoga broja, (ii) dedukcije ili izvođenja, (iii) izračunljivosti i (iv) istine“ (Robinson 1975, navedeno prema Luxemburg & Körner 1979: 558, 561). Alternativna, odnosno „disidentska“[125], strujanja u filozofiji matematike 20. stoljeća pojavljuju se 1960-ih, ponajprije zahvaljujući Lakatosu, potaknuta uvidom da se filozofija matematike ne može niti treba svesti isključivo na probleme zasnivanja, nego da bi se trebala baviti i objašnjenjem fenomena kao što su rast matematičkoga znanja, odnos između konteksta otkrića i konteksta opravdanja, napredak u povijesnom razvoju matematike, aktualna matematička praksa, te artikulacijom metodologije matematike.[126] Abraham Robinson, koji je i sam bio lakatošovac, smatra da su takve „filozofske teorije razvijene u vezi sa samom biti i prirodom matematike“, te da su povezane s proširenjem opće filozofske osnove dotadašnjih filozofija matematike koje su bile ponajprije usmjerene na razmatranje čisto matematičkoga sadržaja i tehničkih pitanja, dok novije filozofije matematike uključuju razmatranje ne samo metodoloških nego ponajprije ontološko-epistemoloških pitanja (*op. cit.*, usp. §8). „Ono na što su ovi filozofi pozivali“, ispravno primjećuje Mancosu, „jest analiza matematike koja je vjernija njezinu povijesnom razvoju.“ (*op. cit.*, *ad loc.*). On također primjećuje da „disidentska tradicija“ nije uspjela bitnije preusmjeriti razvoj suvremene filozofije matematike niti dovesti do ozbiljnije preorijentacije unutar same discipline (*op. cit.*, str. 5). Međutim, tijekom posljednjih desetak godina „disidenti“ postaju sve glasniji i vidljiviji (usp. Goethe *et al.* 2015: 6–7), pa bi se moglo reći da su filozofi matematike danas manje-više podijeljeni na pripadnike *mainstreama* (koji se nadovezuje na Fregea) i na *disidente* ili *avangardu*, odnosno zagovornike integriranoga, interdisciplinarnoga povijesno-filozofskog i sustavnog proučavanja matematike, kojima i sâm pripadam (usp. Ferreirós & Gray 2006a, §2.2).

Za naše potrebe u nastavku disertacije podsjetio bih čitatelja na Veroneseovo upozorenje (citirano u Odjeljku [1.1]) da povijest recepcije matematičkih ideja ne ovisi samo o matematičarima nego *i o filozofima* koji, „uvjereni u ispravnost njima poznatih i već naučenih matematičkih principa, vide ili vjeruju da vide nove ideje kao napad na vlastita filozofska preduvjerenja o matematici“. Možda najbolji primjer filozofskoga utjecaja te vrste na recepciju matematičkih ideja predstavlja Bertrand Russell. S jedne strane, upravo je Russell zaslužan za to što je šira filozofska zajednica uopće upoznala rezultate, među ostalima, Weierstraßa, Dedekinda, Cantora, Kleina, Peana i Fregea.[127] Ali, s druge strane, Russella

[125] Izraz *disidentska* (engl. *maverick*) preuzet je iz Aspray & Kitcher 1988: 17, a rabi ga i Mancosu (*op. cit.*, *ad loc.*).

[126] Još jedna postlakatošovska publikacija ove vrste, uz već spomenuti zbornik Aspraya i Kitchera, jest i *New Directions in the Philosophy of Mathematics. An Anthology* (Tymoczko 1985 i 1998).

[127] V. ponajprije Russellovu disertaciju *An Essay on the Foundations of Geometry* (1895), kao i „Recent Work on the Principles of Mathematics“ (1901). *Principles of Mathematics* (1903) sadržava svojevrstan enciklopedijski pregled nekih od filozofski najzanimljivijih rezultata u matematici i logici (pa čak i fizici) druge polovice 19. i početka 20. stoljeća, dok je *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919) bila zamišljena kao pregled i uvod u ključne matematičke probleme i rezultate za koje se, međutim, prema Russellovu vlastitom mišljenju (a što je u

možemo promatrati i kao „glavnoga krivca“ za *dogmatsko* (v. Odjeljak [1.3]) promoviranje Weierstraßovih, Dedekindovih i osobito Cantorovih matematičkih rezultata, što je dovelo do *kanonizacije* „velikoga trijumvirata Weierstraß–Dedekind–Cantor“ i njegova gotovo univerzalnog prihvaćanja ne samo među suvremenim filozofima nego i među povjesničarima matematike, koji uvelike slijede Russellov primjer. Stoga ne iznenađuje što su filozofi danas ponajprije usredotočeni na probleme zasnivanja logike, aritmetike i teorije skupova, a povjesničari na dokumentiranje više ili manje uspješnih pokušaja njihova rješavanja, dok je zanimanje za filozofske aspekte geometrije gotovo u potpunosti opalo ili je pak postalo predmet drugih disciplina, poput filozofije prostora i vremena ili filozofije fizike. Razlog tomu, smatraju P. J. Cohen, R. Hersh i Robinson, jest činjenica da je u 20. stoljeću teorija skupova zauzela mjesto koje je prethodno pripadalo geometriji, „koja je bila smatrana temeljnom matematičkom disciplinom u koju se sve druge grane matematike mogu utopiti“ (Cohen & Hersh 1967; Robinson 1968: 192–93; usp. Rašković & Ikodinović 2010, poglavlje „Nove geometrije“). Ta činjenica, povezana s jednim Weierstraßovim uvjerenjem[128], najvjerojatnije objašnjava stanovitu dozu razočaranja s kojom je povjesničar matematike Gert Schubring napisao sljedeće: „*Čak se i Giuseppe Veronese* […] kojemu se u literaturi pripisuje uvođenje beskonačno malih brojeva, u svojim konceptualnim formacijama *ograničio na geometriju*.“ (Schubring 2005: 613, moj kurziv). U nastavku ćemo vidjeti je li i u kojem smislu geometrija doista predstavljala ikakvo ograničenje samomu Veroneseu.

neposrednoj vezi s Bishopovim rezervama s početka ovoga odjeljka), „teško može tvrditi da predstavljaju dio filozofije“ (Russell 1919: v–vi).

[128] V. nap. 106 *supra*. U dijelu pisma od 21.12.1873. koji prethodi gorecitiranom, Weierstraß svom prijatelju P. du Bois-Reymondu (1831–1889) kaže da bi „u pogledu beskonačno maloga“ želio samo napomenuti „da će pogledi na njih [sc. infinitezimale] biti bitno različiti“ (*inbetreff des Unendlichkleinen will ich nur bemerken, daß sich die Ansichten darüber wesentlich verschieden gestalten*) ovisno o tome pristupa li im se geometrijski ili pak algebarski odnosno aritmetički, dodajući da sâm daje prednost *den letzteren Weg*. Za prepisku između Weierstraßa i du Bois-Reymonda v. Mittag-Leffler 1923.

DRUGI DIO

[2] Uvod

U ovom dijelu disertacije prije svega ćemo se usredotočiti na izuzetno važno razdoblje od dva desetljeća, od 1889. do 1908/9. godine[129], tijekom kojeg je Veronese uveo i zasnovao nearhimedovsku geometriju, a potom dalje razvijao, razjašnjavao, ali i pokušavao obraniti neke od najvažnijih matematičkih rezultata i metamatematičkih (proto-modelnoteorijskih) i logičko-filozofskih uvida na kojima je njegova nova teorija počivala. Vidjet ćemo da su fundamentalna nerazumijevanja i pogrešna, pa čak i posve iskrivljena tumačenja pojedinih aspekata Veroneseove infinitezimalne geometrije – osobito onoga oblika u kojem je ona bila izložena u monumentalnoj knjizi *Fondamenti di geometria* iz 1891. godine – nastupila vrlo rano, praktički već u inicijalnoj fazi recepcije u 19. stoljeću. Iz toga razloga u Odjeljku [2.1] bit će ukazano na niz interpretativnih izazova s kojima se neminovno suočava historiografija nearhimedovske matematike i, osobito, svaki pokušaj historiografske rekonstrukcije, analize i evaluacije recepcije Veroneseove teorije. Također će biti pružen obuhvatan pregled i kritički osvrt na nedostatke dosadašnje literature o Veroneseu, praćen formuliranjem jedne nove interpretativne strategije.

Usporedno s razilaženjima i nedoumicama u tumačenju (ili, preciznije rečeno, upravo *zbog* njih), postupno su se počele javljati i oštre kritike na račun utemeljenosti, kao i sve ozbiljnije rezerve u pogledu same konzistentnosti Veroneseove teorije, zanemarujući činjenicu da je već sâm Veronese u *Fondamenti* pokušao pružiti aritmetički model aksioma nearhimedovske geometrije uvođenjem takozvanih *Veroneseovih brojeva* (usp. Veronese 1891, Cap. VI, naročito §2–3) (Odjeljak [2.6.1]). Dodatnu, neovisnu potvrdu neproturječnosti geometrije izložene u *Fondamenti* još je kao student pružio Levi-Civita u pionirskom radu „Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici“ (1892/3), u kojem je „s apsolutno analitičke točke gledišta“ (za razliku od „u biti geometrijske“ Veroneseove) konstruirao takozvane *numeri monosemii del continuo numerico di seconda specie*, koji sačinjavaju strukturu koju danas nazivamo *Levi-Civitinim poljem*, a koja predstavlja model aksioma nearhimedovske geometrije (Levi-Civita 1892/3, §1ff.) i u sebi sadrži, kao potpolje, izomorfnu kopiju uređenoga polja $\mathbb{R}$ realnih brojeva (v. Odjeljak [2.6.2]). Štoviše, i Hilbert je u *Grundlagen der Geometrie* (1899, §12) utvrdio nezavisnost Arhimedova aksioma i neproturječnost nearhimedovske geometrije služeći se u osnovi istom tehnikom kao Veronese i Levi-Civita prije njega, a Veroneseov student Bindoni u malo poznatom je radu „Sui numeri infiniti ed infinitesimi attuali“ iz 1902. pokazao da Hilbertovo nearhimedovsko polje algebarskih funkcija $\Omega(t)$ iz *Grundlagen* predstavlja samo potpolje Veroneseova polja iz *Fondamenti*.[130]

[129] Uz dodatak dviju kasnijih, ali važnih publikacija iz razdoblja neposredno prije Veroneseove smrti, polemičkog osvrta iz 1914. i udžbenika iz algebre i geometrije iz 1915. godine (napisanog u koautorstvu s P. Gazzanigom).

[130] Sâm Levi-Civita je u radu iz 1892/3. ustanovio da je njegovo polje također samo potpolje Veroneseova polja.

Unatoč ovim rezultatima, napadi na Veroneseovu geometriju nisu jenjavali, osobito iz tabora tvrdokornih antiinfinitezimalista na čijem je čelu stajao Cantor. Ustrajući na tvrdnji da svako odstupanje od Arhimedova aksioma predstavlja „odstupanje od istine" (*Abweichung vom Wahren*), Cantor je svaki pokušaj uvođenja i rehabilitacije infinitezimala smatrao nedopustivim. Budući da je upravo Veronese 1890-ih razvio najelaboriraniju nearhimedovsku teoriju koja je uključivala i nekantorovske beskonačne brojeve, postao je prirodnom metom Cantorovih kritika i napada:

> „[P]rihvaćanje […] Veroneseovih radova značilo bi poricanje savršenosti Cantorove vlastite tvorevine. Razumljivo, *pokrenuo je sustavnu kampanju diskreditacije Veroneseovih radova*, koliko je god energičnije mogao." (Dauben 1990: 233, moj kurziv)

Kao što ćemo vidjeti u drugom dijelu ovoga poglavlja, „veliki spor" (*ein großer Streit*) između Cantora i Veronesea te njihovih pristaša nije bio samo matematički; naprotiv, ponajprije je bio filozofski, utoliko što se ticao strukture kontinuuma[131] i (načina) egzistencije matematičkih objekata[132] (odjeljci [2.4] i [2.4.1]). Doduše, Cantor i, zajedno s njim, Vivanti, Peano i Russell bili su uvjereni da je „problem infinitezimala" (usp. Odjeljak [1.3] *infra*) moguće razriješiti isključivo matematičkim sredstvima (*coi soli mezzi fornitici dalla matematica*), i to formuliranjem *dokaza* kojim se utvrđuje njihova samoproturječnost. Rekonstrukciji, analizi i kritičkoj reevaluaciji tih „dokaza" bit će posvećen najveći dio sljedećega poglavlja ove disertacije (posebno odjeljci [3.1] i [3.1.1]). Iako je većini matematičara još krajem 19. stoljeća bilo jasno da su Cantorov izvorni „dokaz", kao i Peanova „poboljšana" verzija iz 1892. godine, pogrešni i cirkularni, na što su izričito ukazivali, između ostalih, Stolz, Veronese i Bettazzi, oni su povijesno značajni jer su poslužili ne samo kao osnova za kritiku, nego zapravo za potpunu diskvalifikaciju i diskreditaciju infinitezimalizma kakvu je, primjerice, preuzeo Russell već 1901. u „Recent Work on the Principles of Mathematics", a potom dodatno razvio u oba izdanja *The Principles of Mathematics* (1903, 1937). Ehrlich s pravom ističe da su upravo ti Russellovi radovi, više nego bilo koji drugi, pridonijeli uspostavljanju i širenju uvjerenja među povjesničarima i filozofima matematike da su infinitezimali već u 19. stoljeću definitivno protjerani iz matematike (Ehrlich 2006: 2).

Povijesno promatrano, za negativnu percepciju kao i kasniju recepciju Veroneseove teorije najvjerojatnije je najzaslužnije, i zapravo presudno, bilo uporno poistovjećivanje Veroneseovih beskonačnih brojeva s Cantorovim transfinitnim ordinalima – pogreška koja je *ad nauseam* ponavljana u službenim matematičkim publikacijama i korespondenciji vodećih matematičara: samoga Cantora, Peana, Poincaréa, Vivantija, Killinga, Schönfliesa i mnogih drugih (usp. Laugwitz 1992: 146). U Odjeljku [3.2] trećega dijela bit će pokazano da je najveću konfuziju u tom pogledu proizveo jedan Poincaréov izvještaj iz 1904. godine, a dvostruko ogriješenje o Veronesea sadržano u tom izvještaju – ono što ja nazivam *Poincaréovom dvostrukom pogreškom* – pokazalo se iznimno štetnim budući da se pogrešna tumačenja u Poincaréovu stilu takoreći *ad verbum* nekritički ponavljaju čak i u najsuvremenijim povijestima

---

[131] „Tutto si riduce a stabilire se la retta sia composta di punti oppure di segmenti infinitesimi." (Vivanti 1891b: 250).

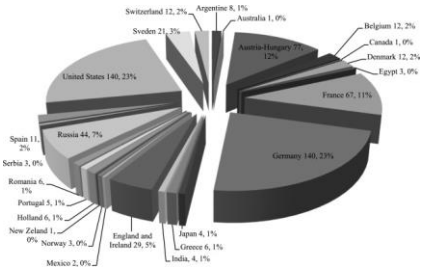
[132] Sukob se prelio i na stranice Peanova časopisa *Rivista di Matematica*, čiji je prvi broj čak inauguriran raspravom o ontološkom statusu infinitezimala, „Esiste l'infinitesimo attuale?" (usp. Vivanti 1891a: 137, §2).

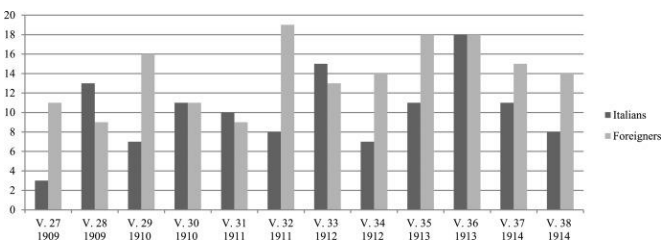
matematike, unatoč tomu što se danas, kao povjesničari matematike, nalazimo u povlaštenom položaju jer raspolažemo znatno opsežnijim korpusom primarne i sekundarne povijesne građe, koji bi morao predstavljati svojevrstan *lakmus-test* za svako ponuđeno tumačenje ili povijesnu rekonstrukciju.

[2.1] Specifični interpretativni izazovi, Veroneseovi tumači i skica nove interpretativne strategije

Prvi problem s kojim se suočava svatko tko namjerava proučavati matematički opus G. Veronesea jest *nedostupnost primarnih izvora*, odnosno samih Veroneseovih publikacija. Od četrdesetak radova i knjiga, više od 80 % Veronese je napisao i objavio na talijanskom jeziku (v. *Sl. 6 infra*), radove najčešće u zbornicima Akademije u Rimu (Reale Accademia dei Lincei, ukupno dvanaest radova) ili Venecijanskoga instituta (Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, četiri rada), a knjige i udžbenike kod veronsko-padovanskoga izdavača Drucker (odnosno Drucker e Tedeschi). Po dva rada pojavila su se u uglednim talijanskim matematičkim časopisima koji još uvijek redovito izlaze, *Annali di matematica pura e applicata* (osnovan 1850.) i *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (osnovan 1885., prva sveska pojavila se 1887.), službenom glasilu jednog od najvažnijih međunarodnih matematičkih društava, u čijem su uredničkom odboru bili, između ostalih, Henri Poincaré i Gösta Mittag-Leffler (1846–1927), osnivač *Acta Mathematica*. Naime, *Circolo* je u razdoblju od svojega osnutka 1884. godine pa do Prvoga svjetskog rata imao gotovo tisuću članova, a čak 92 % ukupnoga članstva činili su inozemni matematičari i Talijani koji nisu bili rezidenti Palerma; sâm Veronese postao je član još 1888. godine, nakon promjene statuta koja je nerezidentima Palerma omogućila pristupanje društvu. *Rendiconti* su bili pravi međunarodni časopis koji se distribuirao diljem svijeta, a radove su u njemu objavljivali ponajprije inozemni matematičari; ne čudi stoga što je Edmund Landau (1877–1938), povodom tridesete obljetnice *Circolo* 14. travnja 1914., izjavio da je „Palermo centar matematičkog svijeta", i to prije svega „zbog časopisa *Rendiconti* […] koji predstavlja najbolji matematički časopis na svijetu."[133] Kao što je već spomenuto u Odjeljku [1.2], Veronese je objavljivao i u jednom od najuglednijih njemačkih časopisa, *Mathematische Annalen* (osnovanom 1868.), i to čak tri rada – dvije izuzetno utjecajne i opsežne studije iz projektivne geometrije hiperprostora proistekle iz

[133] Citirano prema Cerroni & Brigaglia 2021, str. 67. Za više pojedinosti o strukturi članstva u *Circolo*, kao i o radovima objavljenima u *Rendiconti*, v. *op. cit.*, Odjeljak 2 (str. 65ff.). Odatle su preuzeti i sljedeći ilustrativni grafikoni – slijeva se može vidjeti distribucija inozemnih članova društva 1914. godine, a zdesna distribucija radova koje su objavljivali talijanski i inozemni matematičari u razdoblju 1909–1914.





suradnje s Kleinom u Leipzigu na njemačkom jeziku te polemički tekst iz područja nearhimedovske geometrije na talijanskom jeziku. Naposljetku, Veronese je kao sudionik i pozvani predavač na Međunarodnim matematičkim kongresima u Parizu 1900. i Rimu 1908. godine objavio svoja priopćenja u zbornicima ICM-a, jedno na francuskom, a drugo na talijanskom jeziku (potonje je zatim pretiskano u francuskom prijevodu u uglednom časopisu *Bulletin des sciences mathématiques*, koji je Gaston Darboux (1842–1917) osnovao 1870. godine).

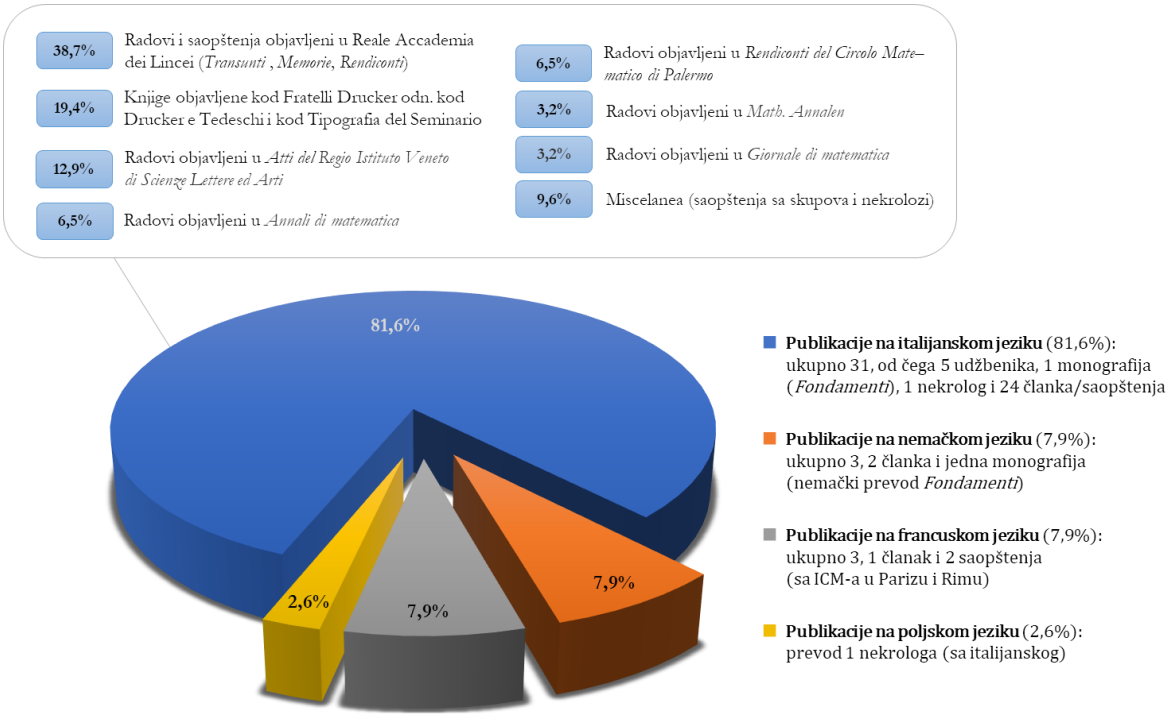
Unatoč činjenici da svi navedeni časopisi u kojima su se pojavljivali Veroneseovi radovi još uvijek redovito izlaze, starije serije s kraja 19. stoljeća teško su dostupne, čak i u specijaliziranim matematičkim knjižnicama poput, primjerice, The Moore Library Centra za matematičke znanosti Sveučilišta u Cambridgeu. Štoviše, čak ni Edizione Nazionale *Mathematica Italiana*, posvećena „prikupljanju, dijeljenju i distribuciji radova koji su pridonijeli izgradnji matematičke kulture u Italiji" i, posebno, „povećanju vidljivosti talijanskih matematičara predstavljanjem potpune slike povijesnog razvoja talijanske matematike" i „recirkulaciji u digitalnom ili tiskanom obliku rijetkih matematičkih djela", ne sadrži *ni jedan* (!) Veroneseov matematički rad, izuzev kapitalnih *Fondamenti di geometria*, koje je Veronese, za razliku od kasnijih udžbeničkih publikacija, objavio u tiskari padovanskog sjemeništa (Tipografia del Seminario, osnovana 1684.), možda uglednog unutar granica Italije, ali ipak sasvim lokalnog i, u širem kontekstu europskih izdavačkih kuća, praktički nepoznatog i, za matematičke publikacije, posve irelevantnog izdavača. Djelomično pisani na dijalektu (*chioggiotto*, podvarijanta od *veneto lagunare*)[134], *Fondamenti* su u 19. stoljeću predstavljali izazov i za italofonu publiku, dok su većini europskih matematičara morali biti posve nepristupačni, naročito s obzirom na Veroneseov *atipični stil*, o čemu će više riječi biti u nastavku teksta.

Stoga Scheppov prijevod *Fondamenti* na njemački (uz Veroneseovo dopuštenje za prilagodbu izvornoga talijanskog teksta), objavljen 1894. godine u Leipzigu kod uglednog izdavača Teubner, specijaliziranog za matematičke radove (suvremeni čitatelji odmah će se sjetiti klasične edicije *Teubner-Texte zur Mathematik*), bez sumnje predstavlja ključan čimbenik koji je uopće omogućio široj matematičkoj i filozofskoj javnosti da se upozna sa sadržajem Veroneseove najvažnije knjige, u kojoj su na jednom mjestu sabrani njegovi najvažniji rezultati iz područja zasnivanja nearhimedovske geometrije. Već letimičan pregled publikacija u kojima se referira na Veroneseove *Fondamenti* kako u ranoj, tako i u kasnijim fazama recepcije, pokazuje da se većina matematičara, filozofa, ali i povjesničara matematike – gotovo bez iznimke – u pravilu poziva na njemački prijevod knjige, odnosno na *Grundzüge der Geometrie*. Među njima su, primjerice, Hilbert, Klein, Cantor, Hahn, Vahlen, Veblen, Hölder, Schönflies, Schur, Killing, Brouwer i mnogi drugi. Srećom, zahvaljujući Centru za digitalizaciju Sveučilišta u Göttingenu (SUB–GDZ), *Grundzüge* su sačuvane u integralnom obliku, kao i Veroneseov udžbenik *Elementi di geometria* (1897), koji se može smatrati sažetom i pojednostavljenom inačicom *Fondamenti*, prilagođenom gimnazijskoj razini.[135] Doduše,

[134] Zahvaljujem Paoli Cantù i Paolu Bussottiju na ovom uvidu.

[135] *Fondamenti* su bili predviđeni za razinu takozvanih *scuole di magistero*, uvedenih obrazovnom reformom koju je sredinom 1870-ih u Italiji proveo Michele Coppino (koji je, kao što smo vidjeli u Odjeljku [1.2], sudjelovao u postupku Veroneseova unapređenja u zvanje redovitog profesora u Padovi), a koje otprilike odgovaraju

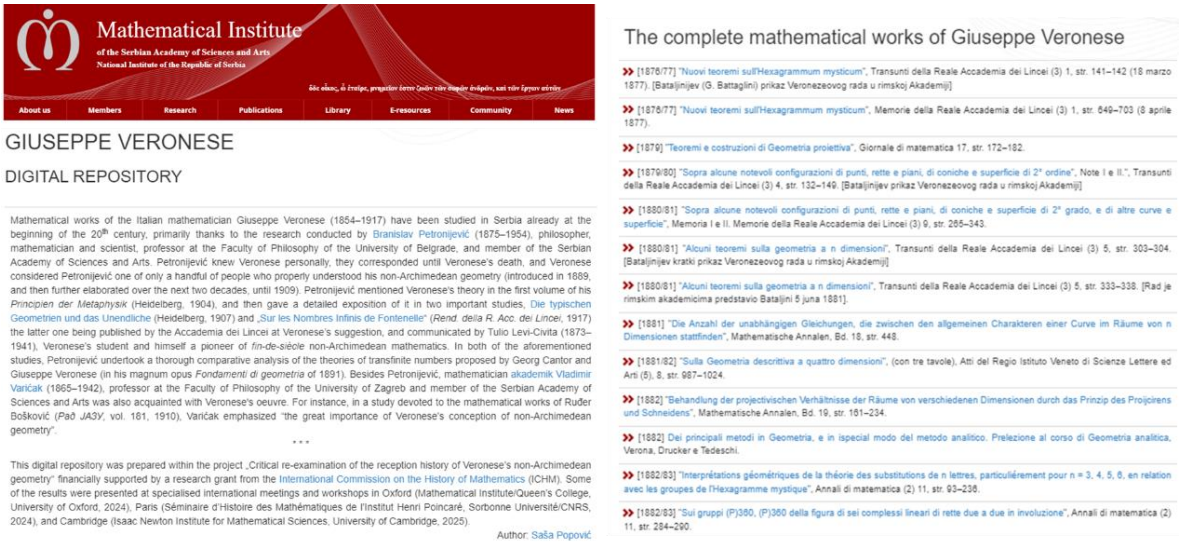
Elementi nikako ne bi trebalo pomiješati s knjigom na kojoj je Veronese radio do smrti na poticaj B. Petronijevića (usp. Odjeljak [1.1]), a koja je trebala predstavljati pravi sažetak Veroneseovih najvažnijih doprinosa nearhimedovskoj matematici.



Sl. 6. Matematički opus G. Veronesea

Dakle, oslanjanjem na talijanske i njemačke elektroničke izvore, bilo je moguće pronaći svega tri knjige – *Fondamenti*, odnosno *Grundzüge*, i *Elementi* (kao i didaktičko-metodički *Appendice agli Elementi* iz 1898. godine) – odnosno oko 10% Veroneseova opusa, dok je za preostalih 90% bilo potrebno provesti istraživanje po knjižnicama i specijaliziranim arhivima, prije svega u Italiji, Njemačkoj, Francuskoj i Velikoj Britaniji. Zahvaljujući potpori Međunarodne komisije za povijest matematike pri Međunarodnoj matematičkoj uniji (ICHM Grants for International Research-Related Activity), tijekom 2024/25. godine uspio sam prirediti digitalni legat, odnosno repozitorij cjelokupnih matematičkih radova G. Veronesea, koji su objedinjeni i u slobodnom pristupu dostupni na mrežnoj stranici Matematičkog instituta SANU, u okviru prezentacije izdanja koja je Institut digitalizirao, odjeljak XIX Century/19. vek (*Sl. 7*).

današnjim dvogodišnjim diplomskim odnosno master studijima, s tom razlikom da je primarni cilj studijskih programa bio osposobljavanje studenata za rad u prosvjeti, i to na srednjoškolskoj razini.



Sl. 7. Digitalni repozitorij Veroneseovih radova
(dostupno na: https://www.mi.sanu.ac.rs/novi_sajt/publications/veroneze.php)

Uz digitalni repozitorij primarne literature, priredio sam i iscrpnu bibliografiju radova i studija posvećenih Veroneseu, koja se nalazi u popisu literature na kraju disertacije. Ta će bibliografija u međuvremenu također biti digitalno obrađena i učinjena dostupnom zajedno s Veroneseovom biografijom, popratnim biografskim studijama (Bullo 1904, Baldassarri Ghezzo 1995), nekrolozima i komemorativnim tekstovima (Segre 1917, Gazzaniga 1917, Severi 1920, Bordiga 1930/31) na prethodno navedenoj mrežnoj stranici Matematičkog instituta SANU. Time će budućim istraživačima proučavanje Veroneseova opusa biti znatno olakšano budući da će praktički cjelokupna relevantna povijesna građa i popratna sekundarna literatura biti objedinjene na jednome mjestu. Na taj će način ujedno biti ostvaren cilj koji je pred sebe postavila, ali ga dosad nije uspjela ostvariti, Edizione Nazionale *Mathematica Italiana*: „povećati vidljivost" jednoga od najznačajnijih talijanskih matematičara i središnje figure Talijanske geometrijske škole, Giuseppea Veronesea.

Kada je riječ o sekundarnoj literaturi, specijalizirane historiografske i povijesno-filozofske studije posvećene Veroneseovim rezultatima u području nearhimedovske geometrije počele su se pojavljivati relativno kasno, tek krajem 60-ih godina 20. stoljeća. Ovu okolnost moguće je objasniti činjenicom da su upravo u tom razdoblju formulirane najznačajnije suvremene teorije infinitezimala, Robinsonova nestandardna analiza, Lawvereova glatka infinitezimalna analiza, Conwayeva teorija nadrealnih brojeva i Vopěnkina alternativna teorija skupova, kao i novi, kombinirani povijesno-filozofski pristup matematici (usp. Odjeljak [1.4]). Pojavljivanje nestandardne analize izazvalo je osobito snažan potres u dotadašnjoj praksi historiografije nearhimedovske matematike. Naime, već je sâm Robinson u zaključnom poglavlju *Non-Standard Analysis*, „Concerning the History of the Calculus", ukazao na potencijalnu primjenu NSA u historiografskim istraživanjima, smatrajući da nam ova nova „teorija nearhimedovskih polja" može „dati indikacije na koji način bi [standardnu] sliku [povijesti infinitezimalnog računa i matematičke analize] trebalo *dopuniti ili čak iznova*

naslikati." (Robinson 1966: 261, §10.1, moj kurziv)[136] Ovu ideju revidiranja povijesti nearhimedovske matematike u svjetlu rezultata nestandardne analize entuzijastično je podržao Lakatos, pionir novoga pristupa u filozofiji matematike, istaknuvši u predavanju indikativnog naslova „The Significance of Non-Standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics" na Međunarodnom logičkom kongresu u Hannoveru 1966. da

> „Robinsonov rad revolucionira našu sliku ovoga najzanimljivijeg i najvažnijeg razdoblja [sc. dva i pol stoljeća od Leibnizova infinitezimalnog računa do nestandardne analize]. Pruža nam *racionalnu rekonstrukciju diskreditirane teorije infinitezimala* koja zadovoljava moderne zahtjeve strogosti i koja nije ništa slabija od Weierstraßove teorije. Takva rekonstrukcija čini teoriju infinitezimala gotovo respektabilnim pretkom potpuno razvijene, moćne moderne teorije [sc. nestandardne analize], uzdiže je iz statusa predznanstvenog trabunjanja i *obnavlja zanimanje za njezinu djelomično zaboravljenu, a djelomično falsificiranu povijest*." (Lakatos 1978: 151, moj kurziv)

Ovakav „robinsonovski pristup" povijesti nearhimedovske matematike rezultirao je iznenađujućom proliferacijom publikacija u kojima je niz starijih infinitezimalista – naročito Leibniz, Euler i Cauchy – „racionalno rekonstruiran", i to na takav način da su pojedini pioniri ove vrste interpretacije počeli izričito tvrditi da su stariji autori u svojim teorijama zapravo već imali u vidu infinitezimale kakve su nam poznate iz Robinsonove nestandardne analize (više o tome u Odjeljku [4.1] četvrtoga dijela).[137] Iako su profesionalni povjesničari matematike počeli dovoditi u pitanje „nestandardno-analitičko stajalište" o povijesti nearhimedovske matematike relativno brzo, već početkom 1970-ih[138], skupina autora

---

[136] Dauben je ispravno primijetio da Robinsonovo bavljenje poviješću infinitezimala nije bilo proizvod pukog „antikvarnog interesa", već je predstavljalo središnji dio Robinsonova istraživačkog programa od trenutka zasnivanja nestandardne analize početkom 1960-ih. Naime, „povijest je mogla poslužiti matematičaru [sc. samom Robinsonu] kao propaganda" za NSA: dismisivan stav pojedinih suvremenika prema nestandardnoj analizi mogao se otkloniti isticanjem u prvi plan činjenice da je, *povijesno promatrano*, pristup analizi zasnovan na infinitezimalima stoljećima unatrag djelovao prirodnije, intuitivnije i jednostavnije (od vajerštrasovskog ε,δ pristupa), a Robinsonova teorija omogućila je matematičarima 20. stoljeća da se služe nestandardnim tehnikama na potpuno rigorozan i savršeno precizan način (Dauben 1988: 183–84). Drugim riječima, povijest matematike Robinsonu je prije svega služila za promociju i, u određenoj mjeri, opravdanje nestandardne analize. Za više pojedinosti o Robinsonovu pristupu povijesti matematike v. Daubenovu biografiju (Dauben 1995, naročito str. 349–366). Usp. i Fraser 2015: 28.

[137] V. primjerice Cleave 1971, Luxemburg 1975, Edwards 1979 (naročito Ch. 12, „Postscript: The Twentieth Century", str. 335–346), kao i niz radova Laugwitz 1975a (= 1977a), 1977, 1982, 1984 i 1997 (Pts. I–II). V. također i Laugwitz 1990, §VIII.1–VIII.4, osobito odjeljke „Impulse der Nichtstandard-Analysis für die Geschichtsschreibung?" (str. 37–39) i „Nichtstandard-Analysis und die Geschichte der Philosophie der Mathematik" (str. 40–41).

[138] Dobar primjer je Henk J. M. Bos (1940–2024), dobitnik Kenneth O. May medalje Međunarodne komisije za povijest matematike, koji je još u svojoj doktorskoj disertaciji o Leibnizovu infinitezimalnom računu, izrađenoj pod mentorstvom Hansa Freudenthala (1905–1990), napisao sljedeće:

> „Ne mislim da na ocjenu neke matematičke teorije poput Leibnizova računa treba utjecati činjenica da je 275 godina kasnije ta teorija 'potvrđena' u smislu da je pokazano da ju je moguće inkorporirati u teoriju koja je prihvatljiva s obzirom na današnje matematičke standarde. *Ako je Leibnizovu računu uopće potrebna rehabilitacija zbog odveć oštrog i strogog tretmana kojemu su ga podvrgnuli povjesničari* [*matematike*] *tijekom prethodnih pola stoljeća, kao što Robinson sugerira, mislim da legitimnu osnovu za takvu rehabilitaciju treba pronaći u okvirima same lajbnicovske teorije.* Vjerujem da nema potrebe prilagođavati Leibnizov račun zahtjevima

okupljenih oko Mikhaila Gershevicha Katza, profesora Sveučilišta Bar-Ilan, započela je 2012. godine sustavno objavljivati koautorske radove (isprva na platformi *arXiv*, potom i u časopisima) karakterističnih naslova „Is Mathematical History Written by the Victors?" (Bair *et al.* 2013) ili „Ten Misconceptions from the History of Analysis and Their Debunking" (Błaszczyk *et al.* 2013), posvećene reviziji dotadašnje historiografije nearhimedovske matematike.[139] Njihove programske ciljeve dobro sažima sljedeći izvod:

> „U nekoliko nedavno objavljenih članaka promoviramo reevaluaciju povijesti i filozofije matematike, analizirajući nedostatke dominantnih gledišta (*received views*) i rasvjetljavajući njihovo pogubno djelovanje na filozofiju, praksu i primjene matematike." (Bair *et al.* 2013: 887)

Iako i sâm smatram da pojedine dijelove historiografije infinitezimalne matematike treba iznova napisati i dopuniti, te utoliko donekle dijelim revizionistički pristup Katz *et al.*, ono što izaziva skepsu u pogledu prirode i dosega njihova projekta jest činjenica da doprinosi matematičara iz razdoblja *fin-de-siècle* teorijama infinitezimala u više od šezdeset radova objavljenih tijekom prethodnoga desetljeća gotovo uopće nisu obrađeni, a Veronese se, primjerice, spominje u svega dva rada, i to posve *en passant* i bez ikakva ulaženja u pojedinosti njegove teorije. Tako u radu „Infinitesimals as an Issue of Neo-Kantian Philosophy of Science", u kojem se Veroneseovo ime spominje desetak puta, Mormann i Katz ističu samo najopćenitija mjesta, naime, da je Veronese bio autor *Fondamenti* i da je bio u sukobu s Cantorom zbog „neortodoksnog programa sklonog infinitezimalima" (*maverick, infinitesimal-friendly program*), a potom dodaju da bi „analiza Veroneseove teorije nadilazila okvire teksta" (Mormann & Katz 2013: 268–69). Dakle, posve nalik Robinsonu i Lakatosu, primarni fokus Katz *et al.* nije pisanje nove, poboljšane i, što je najvažnije, potpune i obuhvatne povijesti nearhimedovske matematike, već samo navodno novo čitanje starijih teorija – naročito Fermatove, Leibnizove, Bernoullijeve, Eulerove ili Cauchyjeve – u maniri *interpretatio aristotelica* (usp. Odjeljak [1.1]), gdje se nestandardna analiza pretpostavlja kao prikladan konceptualni, metodološki i interpretativni okvir za historiografsku rekonstrukciju, analizu i (re)evaluaciju. Pored *lakunarnosti*, dodatni problem u vezi sa strategijom Katz *et al.* jest tendencija da se povijest nearhimedovske matematike promatra odviše usko, odnosno isključivo u kontekstu razvoja infinitezimalnog računa i matematičke analize, čime se iz povijesne analize isključuju iznimno važni doprinosi teorijama infinitezimala koji su artikulirani u geometriji ili u području koje su krajem 19. stoljeća matematičari nazivali *teorijom veličina* (*Grössenlehre, teoria delle grandezze*), a čiji rezultati dobrim dijelom potpadaju pod suvremenu algebru. Stoga u radovima Katz *et al.* nerijetko nailazimo na *skokove* ili, bolje rečeno, *preskakanja* od 17. ili 18. do sredine 20. stoljeća, uz upadljivo izostavljanje formativnog razvojnog razdoblja s kraja druge polovice 19. stoljeća. Naposljetku, tu je i

> dvadesetoga stoljeća kako bismo dokazali njegovu vrijednost kao matematičke teorije." (Bos 1974: 81–82, moj kurziv)

[139] Donedavno su sve publikacije bile objedinjene i dostupne u okviru odjeljka „Recent publications on infinitesimals" osobne mrežne stranice M. Katza (https://u.cs.biu.ac.il/~katzmik/infinitesimals.html). Kada sam posljednji put pokušao pristupiti navedenoj poveznici tijekom svibnja 2025, stranicu nije bilo moguće otvoriti. Vjerujem da je ova okolnost posljedica sukoba između Katz *et al.* i Archibald *et al.* 2022, o kojemu će biti više riječi niže u tekstu.

problem odviše čestih ponavljanja i, nerijetko, doslovnih preklapanja čitavih odjeljaka radova tima Katz *et al.*, čime se proizvodi lažan dojam o iznimno opsežnom znanstveno-istraživačkom učinku, iako je on zapravo znatno skromniji i manjega opsega.

Unatoč tim nedostacima, većina njihovih radova izrazito je oštroga polemičkog karaktera i može se promatrati ne samo kao kritika, već kao svojevrsno obračunavanje s povjesničarima i filozofima koji zastupaju „dominantna gledišta" (to jest ne prihvaćaju pristup historiografiji nearhimedovske matematike utemeljen na NSA), a koje oni optužuju da vode „ideološke borbe" protiv infinitezimala (usp. Błaszczyk *et al.* 2013: 49ff.). Ne iznenađuje što su neki od vodećih suvremenih povjesničara matematike, poput J. Graya, J. Lützena, D. Jessepha, M. Panze i G. Schubringa, odlučili reagirati jednako oštrim otvorenim pismom „A Question of Fundamental Methodology: Reply to Mikhail Katz and His Coauthors", u kojem su ih optužili za „grubo pojednostavljivanje" i kršenje temeljne historiografske metodologije:

> „Struktura radova Katz *et al.* uvijek je ista: sastoje se uglavnom od neumjereno oštrih kritika navodnih 'dominantnih gledišta' na temelju probranih izvoda iz radova navedenih povjesničara matematike i popisa probranih izvoda iz primarnih izvora, uglavnom dekontekstualiziranih i predstavljenih kao svjedočanstvo da jedino nestandardno tumačenje [sc. utemeljeno na NSA] može vjerno objasniti te izvore. […] [O]no što je ovdje relevantno uopće nije o kojim je povjesničarima ili o kojim aspektima povijesti riječ, niti jesu li teze koje [Katz *et al.*] kritiziraju doista dobro argumentirane, uvjerljive ili upitne. Delikatna poanta tiče se prije svega oblika njihovih kritika. *One se ne sastoje od obrazloženih povijesnih argumenata, već od isparceliranoga pobijanja izoliranih citata njihovih protivnika izvučenih iz konteksta, čiji je jedini cilj prikazati ih kao neprijatelje shvaćanja infinitezimala* koje zastupa skupina Katz *et al. Cilj nije pridonijeti povijesnom razjašnjenju, pa čak ni ispraviti moguće nedostatke ili pogreške, već mnoge tumače izložiti stupu srama – sve uz popratne pogrdne epitete – zato što s oduševljenjem ne prepoznaju sveprisutnost nestandardne analize u povijesti matematike.*" (Archibald *et al.* 2022: 360ff., moj kurziv)

Ukratko, poanta povjesničara okupljenih u timu Archibald *et al.*, koja se podudara s mojom prethodno iznesenom kritikom, jest da je temeljni problem u vezi s vrstom tumačenja koje plasiraju (ili, bolje rečeno, nastoje nametnuti) Katz *et al.* to što je ono zapravo *nepovijesno* i *anahrono* te, po svojoj biti, srodno internalističkim pristupima historiografiji matematike (usp. Odjeljak [1.1]): Katz *et al.* iznova otkrivaju *novo u starom* umjesto da se potrude detaljnom i pažljivom historiografskom kontekstualizacijom, rekonstrukcijom i analizom utvrditi (a) eventualno postojanje neprekinute razvojne linije od starijih prema novijim nearhimedovskim teorijama ili, što je znatno složenije i suptilnije, (b) način na koji su stariji pojmovi i rezultati koji su inicijalno formulirani u jednom kontekstu (primjerice u geometriji) transformirani i inkorporirani u neki drugi kontekst (primjerice u algebru ili logiku), što bi zapravo predstavljalo pravi i vrijedan povijesni doprinos jer bi otkrivalo način na koji se *staro uopće pojavilo u novome*, i to kao njegov bitan dio. Drugim riječima, konceptualni horizont (usp. Schubring 2016: 529–30) unutar kojega se kreće suvremeni povjesničar koji nastoji razumjeti, primjerice, značenje i dosege Leibnizovih doprinosa infinitezimalnom računu ne bi smio sadržavati elemente koji su bili nedostupni samom Leibnizu, primjerice tehnički aparat post-van-der-waerdenovske moderne algebre i suvremene teorije modela posredstvom kojih je

Robinson zasnovao nestandardnu analizu. Dakle, čak i ukoliko postoji stanovita „obiteljska sličnost", odnosno analogija između starih i novih matematičkih teorija u pogledu temeljnih stajališta ili ideja na kojima počivaju, to ne znači da automatski postoji i analogija u pogledu starijih i novijih matematičkih metoda[140] – kao što ćemo vidjeti u Odjeljku [4.1], Robinsonova teorija po mnogočemu je više kantorovska nego lajbnicovska.

Prethodno iznesene kritičke primjedbe trebalo bi shvatiti kao da se, *mutatis mutandis*, odnose i na druge pokušaje čitanja i razumijevanja starijih teorija infinitezimala na temelju suvremenih. Dobar primjer za to jest već spomenuta Bellova knjiga *The Continuous, the Discrete, and the Infinitesimal in Philosophy and Mathematics* (Milano, 2005). Naime, za razliku od Lakatosa ili Katz *et al.*, koji su se opredijelili za Robinsonovu NSA, Bell je preferirao SIA, glatku infinitezimalnu analizu koja se 1970-ih razvila u okviru teorije kategorija, kao podvrsta takozvane sintetičke diferencijalne geometrije F. W. Lawverea (1937–2023). To je primijetio i Ehrlich kada je u prikazu Bellove knjige istaknuo da ona „isuviše često zvuči kao veličanje SIA" (Ehrlich 2007: 363), što ne bi trebalo čuditi jer se Bell kao matematičar intenzivno bavio razvijanjem pojedinih aspekata Lawvereove izvorne teorije, o čemu najbolje svjedoči knjiga *A Primer of Infinitesimal Analysis* (2008). Zanimljivo je da je već na temelju predgovora očito kako je Bellov pristup istovjetan Robinsonovu:

> „Moj cilj pri pisanju ove knjige bio je pokazati kako se tradicionalne infinitezimalne metode matematičke analize mogu *osuvremeniti* – takoreći *restaurirati* – što omogućuje da iznova otkrijemo njihovu ljepotu i korisnost." (Bell 2008: ix, moj kurziv)

Svako „osuvremenjivanje" koje bi podrazumijevalo „restauraciju" starih teorija suvremenim sredstvima nužno treba odbaciti jer predstavlja kršenje temeljnih načela dobre historiografske metode i rezultira pukim projiciranjem novoga na staro. Bella svakako treba pohvaliti jer je, za razliku od Katz *et al.*, posvetio barem jedan kraći odjeljak svoje knjige Veroneseovoj teoriji kontinuuma onako kako je izložena u *Fondamenti* (usp. Bell 2019, Ch. 5, §5.2, str. 153–156). Doduše, problem s Bellovim čitanjem Veronesea leži u sljedećem: umjesto da je konzultirao same *Fondamenti* (bilo talijanski izvornik, bilo njemački prijevod), Bell se zadržao isključivo na prepričavanju sadržaja §1 četvrtoga poglavlja uvoda u *Fondamenti* („Considerazioni empiriche sul continuo intuitivo rettilineo"), i to samo ¶55, zato što je to jedini dio knjige dostupan u prijevodu na engleski jezik zahvaljujući Gordonu Fisheru (usp. Fisher 1994, Appendix 2). To je samo još jedna potvrda da je i Bellova motivacija za bavljenje poviješću nearhimedovske matematike isključivo vezana uz moguću (zlo)uporabu povijesti u svrhu promocije i popularizacije SIA (usp. nap. 136 *supra*).

Znači li to da onda uopće nema odgovarajuće sekundarne literature koja bi nam mogla biti od pomoći pri izlaganju Veroneseove teorije i da bi, slijedom toga, takvu pothvatu trebalo pristupiti *ab ovo et sine ope*? Srećom, to ipak nije slučaj, ali se i ovdje suočavamo s donekle sličnom problematikom kakvu sam opisao u vezi s primarnim izvorima, odnosno Veroneseovim radovima. Naime, ukoliko ostavimo po strani one publikacije iz prve polovice 20. stoljeća u kojima je u najboljem slučaju moguće pronaći nekolicinu referenci na poneki Veroneseov rezultat ili rad, preostaje nam svega dvadesetak studija napisanih u razdoblju od

[140] Zahvaljujem prof. Ivahnu Smadji na ovoj distinkciji.

kraja 1960-ih do danas, mahom na talijanskom jeziku i u teško dostupnim časopisima ili kod manjih izdavača (primjerice, Busulini 1969/70, Manara & Spoglianti 1977, Manara 1986, Cautiero & Gerla 1988, Brigaglia 1994, Freguglia 1998, Bottazzini 2001 ili Menghini 2010). Pored tih radova svakako treba izdvojiti i jedine dvije monografije o Veroneseu, također napisane na talijanskom: sumarni pregled (dužine šezdesetak stranica) sadržaja uvodnoga dijela *Fondamenti* Paola Bussottija, *Giuseppe Veronese e i fondamenti della matematica* (Pisa, 1997), i diplomski rad (*tesi di laurea*) iz filozofije Paole Cantù, *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria* (Milano, 1999), iz kojega je potom proizašlo još nekoliko radova (Cantù 2000, 2004, 2009 i 2010), od kojih, međutim, jedino onaj iz 2004. godine sadrži neku novinu u odnosu na monografiju, doduše u vezi s Veroneseovim zanimanjem za metodiku i didaktiku, a ne za zasnivanje matematike.

Knjiga Paole Cantù značajna je utoliko što je drugim autorima, poput Katza, Mormanna ili Graya, koji po svoj prilici nisu čitali samoga Veronesea, poslužila kao izvor i vodič kroz njegovu teoriju (v. nap. 147 *infra*). Ali, kao što sam već istaknuo u studiji objavljenoj povodom stote obljetnice Veroneseove smrti, to što je *jedina* opsežnija monografska studija o Veroneseu ne čini Cantù 1999 automatski i *najboljim* i apsolutno pouzdanim pregledom Veroneseove teorije (Popović 2017, §5, str. 97). Naime, izvorni naslov diplomskog rada P. Cantù bio je „Il razionalismo critico di Giuseppe Veronese" (1998) i ticao se prije svega Veroneseove epistemološke pozicije, koju je Cantù okarakterizirala kao *kritički racionalizam*[141], odnosno kao jednu vrstu idealističke filozofije matematike koja je najbliža Kantovoj (usp. Cantù 2004: 150, 158–9). Međutim, kao što ću pokazati u nastavku (Odjeljak [2.4]), takva je interpretacija zavodljiva budući da Veroneseova filozofska pozicija o prirodi geometrije i o statusu geometrijskih objekata nije kantovska, već nepogrešivo aristotelovska. Taj uvid, koji smatram ključnim za ispravno razumijevanje Veroneseove teorije, do sada je izmicao većini tumača. Plauzibilno je pretpostaviti da je Cantù mogla biti navedena na kantovski intoniranu analizu Veroneseove teorije zbog stanovitih sličnosti između Veroneseovih *Fondamenti* i *Ausdehnungslehre* (1844, 1862) Hermanna Graßmanna (1809–1877), na kojoj je doktorirala 2003. godine, a poznato je da je Russell još u 19. stoljeću isticao da „geometrija s Graßmannom pripada matematici onako kako ju je shvaćao Kant" (Russell 1897, §126).[142]

Čak i kada bismo prethodno navedenim publikacijama dodali radove talijanskih autora napisane na engleskom jeziku, i to u specijaliziranim časopisima za povijest matematike *Archive for History of Exact Sciences* i *Revue d'histoire des mathématiques* (Avellone *et al.* 2002 i Cerroni 2007), teško je oduprijeti se dojmu na koji je među prvima ukazao Victor

[141] Koji ne bi trebalo poistovjećivati s Popperovom pozicijom u filozofiji znanosti, a naročito ne s Lakatosovom istoimenom pozicijom u filozofiji matematike.

[142] Ako bismo željeli biti sasvim precizni, sličnost između Graßmanna i Veronesea trebalo bi tumačiti u ključu njihove veze s Leibnizom, prije svega s Leibnizovom *geometrijskom analizom*, odnosno *analysis situs* (usp. GM V), budući da su i Graßmann i Veronese sebe smatrali Leibnizovim nasljednicima u tom pogledu. Za više pojedinosti o *analysis situs* v. Dodatak C *infra* i De Risi 2007. Zanimljivo je da Gray smatra kako upravo pojedini lajbnicovski aspekti čine Graßmannovu poziciju „prešutno antikantovskom" (2008, §2.4.3.1). Za više pojedinosti o Graßmannovoj poziciji u širem kontekstu postlajbnicovske matematičko-filozofske tradicije v. Otte 1989.

Pambuccian u prikazu Cantù 1999 za *Zentralblatt*: Veronese predstavlja „eklatantan primjer toga što znači biti stvarno zaboravljen, čak i u vlastitoj zemlji“ (Zbl 1158.51300). Doista, komparativno gledano, broj studija, knjiga i kritičkih izdanja radova Veroneseovih suvremenika neusporedivo je veći, naročito kada govorimo o Peanu i pripadnicima njegove škole koji su se također bavili geometrijom (C. Segre i M. Pieri), kao i o drugim talijanskim algebarskim geometrima (G. Castelnuovo, F. Enriques, F. Severi), čije su digitalne ostavštine priređene zahvaljujući Edizione Nazionale *Mathematica Italiana*, Accademia Nazionale dei Lincei, Centru za proučavanje povijesti Sveučilišta u Torinu i talijanskom Ministarstvu kulture.[143]

Prvi ozbiljniji, a ujedno i jedan od najuspjelijih pokušaja sustavnoga prikaza Veroneseova pristupa zasnivanju geometrije predstavlja habilitacijska disertacija Waltera Salvatora Controa (1937–2017), jednoga od priređivača Leibnizovih matematičkih spisa (A VII, 4; 1670–73: *Infinitesimalmathematik*), *Die Entwicklung der Geometrie zum hypothetisch-deduktiven System. Ein Beitrag zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie*, Kap. III (Frankfurt na Majni, 1968).[144] Ukoliko izuzmemo Veroneseove suvremenike koji su među prvima iznijeli prigovore te vrste, osobito Cantora i Peana, Contro je najvjerojatnije prvi povjesničar koji je istaknuo Veroneseov stil kao ozbiljnu prepreku odgovarajućem razumijevanju i rekonstrukciji njegovih matematičko-filozofskih uvida. Tako već u uvodu svoje studije ističe da su Veroneseov, ali i Pierijev stil, *verschachtelt und weitschweifig*, odnosno „zamršeni i rasplinuti“, zbog čega je bio „prisiljen često pojednostavljivati i skraćivati pri prevođenju [sc. parafraziranju], pa čak i mijenjati redoslijed rečenica kako bi olakšao čitanje i učinio izlaganje preglednijim.“ (Contro 1968: 10, ¶0.5) Objektivno promatrano, Veroneseova pretežno narativna i nerijetko neprozirna matematička proza – *die Unklarheit bei Veronese* (usp. Cantorovo pismo Peanu od 27.7.1895.) – osobito u *Fondamenti*, nedvojbeno je pridonijela slabijoj recepciji njegovih rezultata koji se odnose na zasnivanje nearhimedovske geometrije. Na to je već u nekrologu Veroneseu upozorio i Segre[145], a u tom pogledu među većinom kasnijih tumača vlada svojevrstan konsenzus:

> „*Veroneseov je stil, najblaže rečeno, težak*. […] [I Peano] se žalio na Veroneseov usiljen i negramatičan stil[146], a ta je primjedba, nažalost, opravdana.“ (Fisher 1994: 108, 127, moj kurziv)

---

[143] Primjerice, Elena Marchisotto sa suradnicima priredila je opsežne zbornike (više od tisuću stranica) posvećene doprinosima M. Pierija u području geometrije i aritmetike (Birkhäuser, 2007) te filozofije i zasnivanja matematike (Birkhäuser, 2021). Treba spomenuti i zbornike posvećene stopedesetim obljetnicama Peanova (Springer, 2011, prir. Fulvia Skof) i Segreova rođenja (Springer, 2016, prir. Gianfranco Casnati *et al.*). Kao naročito uzorne ističu se Peanova i Enriquesova digitalna ostavština, dostupne na sljedećim poveznicama:

https://www.asut.unito.it/peano/opere.html i https://www.federigoenriques.org/.

[144] Zahvaljujem dr Siegmundu Probstu iz Leibnizova arhiva u Hannoveru što mi je skrenuo pozornost na taj rukopis i stavio mi ga na raspolaganje.

[145] „La natura delicata dell'argomento, e un po' anche *una certa oscurità e trascuranza nell'esposizione*, hanno permesso che si elevassero dei dubbi sulla solidità dell'edifizio non-archimedeo di Veronese.“ (Segre 1917: 481, moj kurziv)

[146] Iz Peanove recenzije *Fondamenti*: „Queste sgrammaticature, abituali all'autore [sc. Veronese], rendono assai difficile la lettura del libro, ed intelligibili alcuni suoi punti.“ (Peano 1892b)

„Veroneseov pristup iznimno je napredan, ali je, s druge strane, *njegov stil izlaganja veoma staromodan*. Gotovo je nemoguće, primjerice, uočiti neki jasno definiran obrazac u aksiomima koje predlaže. […] Međutim, *unatoč poteškoćama koje proizlaze iz njegova stila, moguće je prepoznati određene središnje odlike koje opravdavaju divljenje iskazivano njegovu djelu*." (Avellone *et al.* 2002: 381, moj kurziv)

„*Veroneseovo izlaganje bilo je nedovoljno jasno*, a pojedine su formule djelovale kao očita besmislica ako se popratni tekst nije čitao pažljivo. […] *Knjiga* [sc. *Fondamenti*] *ostavlja dojam na brzinu skicirane prve verzije* i ponajprije je riječ o tekstu iz geometrije. Posljedica je toga da [Veroneseove] duboke ideje nisu bile izložene na dovoljno čitljiv način. […] *Tekst je neuredan, rasplinut i kaotičan u svojoj prividnoj proizvoljnosti*. Možda su jedini koji su mogli pratiti Veroneseovo rasuđivanje bili njegovi studenti u Padovi." (Laugwitz 2002: 103, 115–117, moj kurziv)

„Već u Veroneseovu radu iz 1889. čitatelj nailazi na *nesretan spoj obilježja* koja će, u cjelini gledano, postati *karakteristična za Veroneseov doprinos nearhimedovskoj matematici*: s jedne strane susrećemo ideje iznimno maštovitog i duboko originalnog matematičkog mislioca, a usporedno s njima *ideje koje se kreću u rasponu od opskurnih, preko nespretno formuliranih, do posve dvojbenih*. […] Svojevrsna *mješavina vrlina i slabosti*." (Ehrlich 2006: 66, moj kurziv)

„Knjiga *Fondamenti della* (*sic!*) *geometria*[147] G. Veronesea iz 1891. […] *nije bila jasno napisana* te *nije bilo jasno jesu li* [Veroneseovi] *argumenti valjani*." (Gray 2008: 338, moj kurziv)

„Treći čimbenik koji se može pridodati […] objašnjenju zanemarivanja Veroneseovih doprinosa jedini je koji je uistinu objektivan i tiče se *Veroneseova stila*. […] Naime, kao što Leibnizovu metafiziku možemo smatrati u dubokom smislu matematičkom (A III, 6, 253), tako i Veroneseov *magnum opus* možemo lajbnicovski okarakterizirati kao *geometria metaphysica* (A VI, 4, 332), 'nesretan spoj' izrazito inovativne i progresivne, ali ujedno i izrazito protuintuitivne matematike te povijesno-filozofskih zapažanja." (Popović 2017: 96)

„*Unatoč manjku elegancije u načinu izlaganja i određenim opskurnim elementima u formulacijama*, teorija linearnog kontinuuma razvijena u Veroneseovim *Fondamenti di geometria* (1891) duboka je i razmjerno sofisticirana." (Ehrlich 2021: 505, moj kurziv)

U odjeljku [1.1] već sam istaknuo da je tendencija čak i među modernim povjesničarima matematike koji njeguju tolerantan i pozitivan stav prema eksternalnim odnosno ekstramatematičkim čimbenicima u povijesnim objašnjenjima razvoja matematike da kao glavni problem u vezi s Veroneseovim „teškim stilom" prepoznaju njegova filozofska zapažanja, uz ocjenu da ona „ne pomažu da se izlaganje učini jasnim", odbacujući ih potom kao „naivno filozofiranje" i „uzrok konfuzije". Kao što ćemo vidjeti u Odjeljcima [2.4] i [2.5], Veroneseova filozofska zapažanja ne samo da nisu naivna nego su, naprotiv, veoma suptilna i veoma moderna. Radi odgovarajuće interpretacije Veroneseovih stajališta o logičko-

[147] Pogrešno navođenje naslova Veroneseove knjige trebalo bi pripisati okolnosti (koju Gray i sam eksplicitno priznaje, v. *op. cit.*, *ad loc.*, nap. 77) da se kao vodičem pri pisanju odjeljka o Veroneseu (§5.3.5), dugog dvije i pol stranice, služio knjigom Paole Cantù u čijem naslovu stoji *fondamenti della geometria*. Kasnije ćemo vidjeti (usp. Odjeljak [3.2]) da je Gray olako iznio prilično oštre i neutemeljene ocjene Veroneseovih, ali i drugih talijanskih doprinosa modernoj *fin-de-siècle* geometriji, premda najvjerojatnije nije ni čitao samoga Veronesea. Usp. Popović 2017: 97, nap. 31.

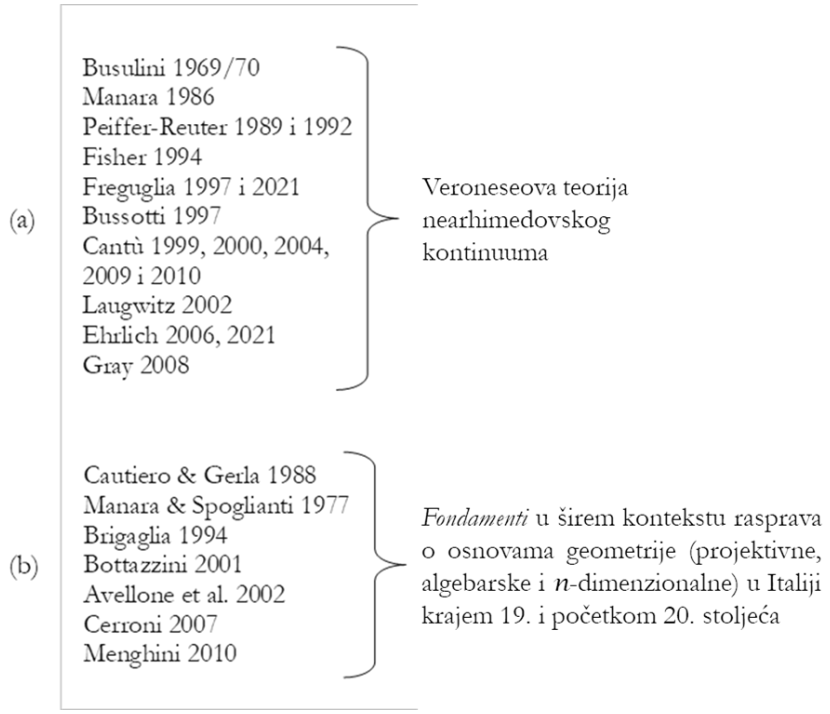
filozofskim temeljima geometrije smatram da je, uz niz metodoloških napomena o nužnosti integriranog povijesno-filozofskog pristupa koje sam već iznio u ovom i u Odjeljcima [1.1] i [1.4], potrebno uzeti u obzir i nekoliko novih istraživačkih trendova u suvremenoj filozofiji matematike: (i) neoaristotelovski program poput Sydney School of Philosophy of Mathematics[148] (Franklin 2014 reprezentativna je publikacija) i, osobito, (ii) niz neoaristotelovskih pristupa teoriji linearnog kontinuuma[149], kao i (iii) studije posvećene takozvanoj „renesansi vizualizacije" te statusu i funkciji intuicije u matematičkoj praksi (usp. Mancosu *et al.* 2005, Mancosu 2008). Takva kombinirana interpretativna shema – takozvani *mélange des genres* (usp. Boucard & Morel 2022) – posve je u duhu najsuvremenijih „otvorenih i fleksibilnih" pristupa ponovnom pisanju (*rewriting*) povijesti moderne matematike (usp. Corry 2004a).

Na kraju ovoga odjeljka navest ću još nekoliko rezervi u vezi s dosad spomenutim tumačenjima, koje se ponajprije odnose na njihovu *fragmentarnost* ili *nepotpunost*. Zanimljivo je da su se gotovo svi prethodno navedeni autori, uključujući i gore spomenute talijanske tumače Veroneseova opusa, u svojim analizama u pravilu usredotočili samo na Veroneseovu teoriju kontinuuma iz *Fondamenti*, sadržanu u uvodnom, premda iznimno opsežnom dijelu knjige (dužem od dvjesto stranica podijeljenih u devet poglavlja) posvećenom „fundamentalnim principima apstraktnih matematičkih formi" (v. *Sl.* 8, dio (a)), zanemarujući ne samo ostatak knjige nego i niz važnih publikacija iz razdoblja od 1891. do 1914. u kojima je Veronese dalje razvio, razjasnio i pokušao obraniti pojedine ideje i stajališta iz *Fondamenti*.[150] S druge strane, neki su autori (*Sl. 8*, dio (b)) pokušali smjestiti *Fondamenti* u širi kontekst rasprava o zasnivanju geometrije vođenih u Italiji i Njemačkoj krajem 19. i početkom 20. stoljeća, premda to ni u jednoj od tih studija nije učinjeno na zadovoljavajući i sustavan način, uz razmatranje Veroneseova matematičkog opusa u cjelini. Povrh toga, pojedini radovi obiluju ne samo nepreciznostima i pogreškama u tumačenju nego sadržavaju čak i *kronološke i faktografske pogreške* (za primjere v. Odjeljak [3.2]).

[148] Manifest škole dostupan je na sljedećoj poveznici: https://web.maths.unsw.edu.au/~jim/manifesto.html (pristupljeno 13.5.2025.)

[149] V. Roeper 1997 i 2006; Hellman & Shapiro 2012 i 2013; Shapiro & Hellman 2017 i 2018; Linnebo *et al.* 2016; Arsenijević 1992a, 1992b i 2003b; Arsenijević & Kapetanović 2008a i 2008b, Arsenijević & Adžić 2014; usp. i Arsenijević, Popović & Vuletić 2019, kao i Newstead 2001.

[150] Isto vrijedi za dvije studije Renée Peiffer-Reuter (1989, 1992), koja je od sredine 1970-ih bila članica glasovitog Séminaire Philosophie et Mathématiques de l'École Normale Supérieure, ali i seminara „Fondements des Sciences" (u okviru francuskog CNRS-a) posvećenog povijesno-filozofskim aspektima nestandardne analize, koji su vodili Georges Reeb (1920–1992) i Hervé Barreau (1929–2014). Za zanimljivu povijest recepcije NSA u Francuskoj i niza institucionalnih otpora proučavanju Robinsonove teorije v. disertaciju Lobry 2019. Zahvaljujem Marcu Panzi što mi je skrenuo pozornost na radove R. Peiffer-Reuter koji se, nažalost, nalaze u iznimno teško dostupnim, ali dragocjenim zbornicima *La Mathématique non standard: histoire, philosophie, dossier scientifique* (prir. H. Barreau & J. Harthong) i *Le labyrinthe du continu* (prir. J.-M. Salanskis & H. B. Sinaceur). U potonjem su priloge objavili i D. Laugwitz (o Leibnizu i Ω-računu) te P. Ehrlich (o proširenjima teorije aritmetičkog kontinuuma i nadrealnim brojevima).



Sl. 8. Shematski prikaz tematske strukture sekundarne literature o Veroneseu

Iznesene rezerve ne odnose se, barem ne *tout court*, na radove Philipa Ehrlicha, ne samo jednog od najznačajnijih suvremenih tumača povijesti i filozofije nearhimedovske matematike, već i nekoga tko je kao logičar dao veoma značajne doprinose i samoj nearhimedovskoj matematici, detaljnim razvijanjem teorije nadrealnih brojeva koju je 1976. formulirao John Horton Conway (v. Odjeljak [4.2]). Ehrlichova danas već klasična i praktički monografska studija „The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes" iz 2006. godine predstavlja briljantan primjer pažljivog povijesno-filozofskog proučavanja *fin-de-siècle* teorija infinitezimala u radovima P. du Bois-Reymonda (1831–1889), C. J. Thomaea (1840–1921), O. Stolza (1842–1905) i, naravno, G. Veronesea. Pored Ehrlichove studije svakako treba spomenuti i Fisherovu studiju o du Bois-Reymondu iz 1981. godine. Zanimljivo je da su i Fisher (1981: 102) i Ehrlich (2006: 1, nap. 2) obećali da će u skoroj budućnosti „izložiti Veroneseov sustav i njegovu recepciju" (sec. Fisher), odnosno da će se „usredotočiti na pojavu [Veroneseove] nearhimedovske geometrije" (sec. Ehrlich). Umjesto izlaganja sustava i povijesti recepcije Veroneseove teorije, Fisher je samo djelomično ispunio svoje obećanje objavljivanjem rada o jednom aspektu Veroneseove teorije kontinuuma, ograničivši pritom svoje izlaganje na svega jedan paragraf *Fondamenti* (¶55) i odustavši od cjelovitog „praćenja Veroneseove konstrukcije nearhimedovskog kontinuuma i njemu pripadajuće algebre" uz napomenu da je „Veroneseovo razmatranje neprekidnosti iznimno složeno (*extraordinarily complex*)" (Fisher 1994: 125). S druge strane, Ehrlich do sada nije objavio rad o genezi i razvoju nearhimedovske geometrije, a u radu iz zbornika *History of Continua* (Oxford, 2021) posvetio je, kao i Fisher (i autori navedeni na *Sl. 8a*), samo jedan odjeljak od četiri stranice Veroneseovoj teoriji kontinuuma (koji se sadržajno podudara s §12 studije iz 2006. godine).

Naposljetku, okrećući Ehrlichovu gore navedenu kritiku Bella protiv njega samoga, i u pojedinim Ehrlichovim radovima može se primijetiti tendencija prema *interpretatio aristotelica*, odnosno prikazivanju starijih nearhimedovskih teorija (uključujući i Veroneseovu) samo kao koraka na putu prema apsolutnom kontinuumu „svih velikih i malih brojeva“[151], to jest klasi **No** nadrealnih brojeva, sustavu koji Ehrlich iz razumljivih razloga – kao i Robinson u slučaju NSA ili Bell u slučaju SIA – osobno favorizira (v. naročito Ehrlich 1986 i 2012).

Pogledajmo sada kako je izgledao Veroneseov pionirski pothvat zasnivanja nearhimedovske geometrije i razvijanja konzistentne teorije infinitezimala.[152]

[2.2] Preliminarije

Pitanje *optimalnog načina izlaganja* Veroneseove teorije pokazuje se veoma delikatnim i upitno je može li se na njega uopće dati jednoznačan i posve zadovoljavajući odgovor. S jedne strane, tomu se zadatku može pristupiti čisto kronološki, polazeći od Veroneseova rada o Arhimedovu aksiomu i linearnom kontinuumu iz 1889. godine te njegova uvida da je moguće formulirati aksiome neprekidnosti koji ne pretpostavljaju Arhimedov aksiom, a zatim dijakronijski pratiti način na koji je Veronese taj uvid implementirao u *Fondamenti* (1891) i, eventualno, u kasnijim publikacijama. Međutim, premda je s metodološkoga stajališta taj pristup *prima facie* neupitan, ipak ima određena ograničenja koja se ponajprije odnose na *selektivnost*. Naime, na taj bismo se način neminovno ograničili samo na pitanje aksiomatskog tretmana neprekidnosti koji, iako revolucionaran i u tom smislu reprezentativan, ipak predstavlja samo dio Veroneseova šireg projekta aksiomatskog zasnivanja geometrije sadržanog u *Fondamenti* i u *Elementi* (1897). U prethodnom odjeljku vidjeli smo da se i većina prethodnih tumača, od kraja 1960-ih do danas, pri tumačenju Veroneseova opusa opredijelila za sužavanje tematskog fokusa (usp. *Sl. 8a*).

No sustav izložen u *Fondamenti* znatno je složeniji utoliko što je Veronese ondje nastojao razviti sustav apsolutne geometrije općeg prostora (*spazio generale*) s najvećim mogućim stupnjem općenitosti, kombinirajući na veoma isprepleten način ne samo različite standardne i nestandardne geometrije (euklidsku, neeuklidske, nearhimedovsku, projektivnu i geometriju hiperprostora), nego i različite vrste pretpostavki: aksiome (*assiomi*), geometrijske hipoteze (*postulati o ipotesi*) te takozvane praktične aksiome (*assiomi pratici*). Nasuprot tomu, u

[151] Izraz „all numbers great and small“ Ehrlich preuzima iz uvoda u Conway 1976.

[152] Radi iscrpnosti trebalo bi spomenuti i dvije neobične i nejasne studije o Veroneseu na poljskom jeziku, Dadaczyński 2013 i 2022. Riječ je o radovima u kojima se, najblaže rečeno, *veoma slobodno* tumače pojedini pasusi iz uvodnog dijela *Fondamenti* (doduše bez navođenja referenci) te iznose tvrdnje da je Veronese „konstruirao matematiku iz pojma Mislećeg Subjekta (*sic!*) i fenomena mišljenja“, da taj „Misleći Subjekt“ (*Podmiot Myślący*) „po svoj prilici referira na Descartesov *cogito ergo sum*“, te da je „najvjerojatnije ta ideja ostvarila utjecaj na Hilbertovu koncepciju Matematičkog Subjekta (*sic!*)“ (usp. 2013: 53 *et passim*), da bi Dadaczyński naposljetku zaključio kako je Veroneseova pozicija konstruktivistička i da vrijeme u njoj ima nužnu ulogu (2022: 49). Pored neortodoksnog tumačenja, treba napomenuti da Dadaczyński ne referira ni na jedan rad iz sekundarne literature o Veroneseu, izuzev članka „Nota o rozprawie Otto Höldera *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*“ P. Błaszczyka, u kojem se tek usputno spominje da je Hölder referirao na Veroneseovu raspravu o Arhimedovu aksiomu.

Elementi, kao udžbeničkoj publikaciji, prije svega je nastojao konstruirati i aksiomatski izložiti elementarnu geometriju na izravan i didaktički pristupačan način (usp. Contro 1968, Kap. III, Anhang). Kao što ćemo vidjeti iz nastavka izlaganja, upravo je ispravno razumijevanje *logičko-metodoloških*, *filozofskih* i *metamatematičkih ideja i pretpostavki* u osnovi Veroneseova šireg programa zasnivanja geometrije od prvorazredne važnosti za odgovarajuću evaluaciju povijesti recepcije njegovih rezultata, uključujući, naravno, i one koji nedvojbeno predstavljaju središnji dio toga programa, a koji se specifično odnose na nezavisnost aksioma neprekidnosti i nearhimedovsku geometriju.

Ali, potrebno je imati na umu da te ideje nisu sadržane samo u *Fondamenti*, što je dojam na koji bi moglo navesti čitanje sekundarne literature; štoviše, ne bi se moglo ni reći da one kulminiraju u *Fondamenti*. Naprotiv, Veronese ih je počeo artikulirati veoma rano, neke već sredinom 1870-ih godina, isprva u korespondenciji, a zatim i u objavljenim radovima, dakle u razdoblju kada se još uvijek ponajprije bavio projektivnom geometrijom (usp. Odjeljak [1.2]), nakon čega ih je postepeno i sustavno razvijao i usavršavao sve do 1908./1909. godine. Dakle, te su ideje i pretpostavke nedvojbeno odredile i način na koji je Veronese pristupio analizi Arhimedova aksioma početkom 1890-ih.[153] Pogledajmo stoga njihovu genezu. Što je prethodilo Veroneseovu uvođenju infinitezimala u geometriju?

[2.3] Paschova aksiomatika, logičko-filozofsko zasnivanje geometrije i spor s Peanom o statusu geometrije hiperprostora: uvođenje u Veroneseov program iz *Fondamenti*

„Dugo 19. stoljeće", kako ga povjesničari nerijetko nazivaju, s pravom se može smatrati stoljećem geometrije ili, bolje rečeno, *stoljećem geometrijâ* ako imamo u vidu zapanjujući broj potpuno novih geometrijskih sustava koji su već bili u opticaju do razdoblja *fin-de-siècle*, unatoč veoma lošoj i sporoj inicijalnoj recepciji doprinosa J.-V. Ponceleta obnovi zanimanja za projektivne metode iz 1820-ih ili, uzmemo li još drastičniji primjer, otkrića hiperboličke geometrije do kojega su neovisno jedan o drugome, otprilike u isto vrijeme, došli J. Bolyai u Austro-Ugarskoj i N. I. Lobačevski u Rusiji (i, po svoj prilici još krajem 18. stoljeća, C. F. Gauß u Pruskoj). Početkom 1870-ih nove su geometrije bile manje-više dobro etablirane, projektivna geometrija osobito je bila u središtu istraživanja zahvaljujući Plückeru, Möbiusu, Chaslesu, von Staudtu i, naročito, Kleinovu Erlangenskom programu (1872), a neeuklidski sustavi zahvaljujući ključnim doprinosima Riemanna, Beltramija i von Helmholtza.[154]

Budući da je 19. stoljeće bilo „razdoblje velikog pospremanja" (*l'époque du grand nettoyage*) (Peiffer-Reuter 1987: 1), obilježeno podizanjem standarda strogosti i preciznosti u matematici te sve većom brigom za pitanja zasnivanja matematičkih disciplina (usp. Odjeljak [1.3]), kao najizglednije razrješenje nedoumica i kontroverzi u vezi s disparatnošću različitih

[153] Zanimljivo je da je takav ne-nužno-kronološki način izlaganja povijesti razvoja geometrije favorizirao i sâm Veronese u dodatku *Fondamenti*: „[P]erò anziché all'ordine cronologico badiamo più alla divisione dei lavori in gruppi secondo le idee in essi prevalenti." (Veronese 1891: 568)

[154] Za pregledan prikaz razvoja geometrije u 19. stoljeću v. Gray 2007.

novih geometrijskih tehnika i rezultata, a ujedno i kao najprikladnije sredstvo za njihovu sistematizaciju i unifikaciju pokazala se *aksiomatizacija*. Iako su se matematičari i filozofi bavili aksiomatikom geometrije još od Aristotelova i Euklidova vremena – o tome najbolje svjedoči *longue durée* povijest pokušaja dokazivanja Euklidova petog postulata (v. nap. 97) – prvi pravi, moderni aksiomatski tretman (projektivne) geometrije javlja se tek 1882. godine u *Vorlesungen über neuere Geometrie* Moritza Pascha (1843–1930), proisteklim iz njegovih predavanja u Gießenu iz zimskog semestra 1873/4. S Paschovim predavanjima, *die Axiomatik ist geboren*, pisali su Engel i Dehn 1934. u memorijalnom tekstu za *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (1934: 133), utoliko što je Pasch u toj knjizi pred sebe postavio ne samo zadatak utvrđivanja svih osnovnih pojmova (*Grundbegriffe*) i osnovnih stavova (*Grundsätze*) projektivne geometrije, kao i svih teorema (*Lehrsätze*) koji iz njih čisto logički slijede (Pasch 1882: 5, 45, 98ff.), već je „po prvi put u povijesti matematike takav program ne samo najavljen nego i uspješno ostvaren (*nicht nur ausgesprochen, sondern auch verwirklicht*)." (sec. Contro 1976: 284). Stoga, zaključuje Contro, *Vorlesungen* „predstavljaju krunu i završetak dugoga razvoja, istodobno otvarajući novo razdoblje u povijesti zasnivanja geometrije." (*ibid.*)[155] Stajalište da Paschov doprinos predstavlja prijelomnicu u povijesnom razvoju rasprava o principima i temeljima geometrije nalazimo i u Veroneseovim *Fondamenti* (usp. Appendice, str. 584ff.), a potom i kao opće mjesto u sekundarnoj povijesno-filozofskoj literaturi (v. Schlimm 2010, §1 i Torretti 1978, §§3.2, 3.2.5, usp. Torretti 2021, §4).[156] Prema vlastitom priznanju, Pasch je u *Vorlesungen* nastojao slijediti devetnaestostoljetni trend „ponovnog uspostavljanja, u najvećoj mogućoj mjeri, neovisnosti geometrije [o teoriji brojeva]" i „oživljavanja čisto geometrijskih metoda" u duhu *moderne sintetičke geometrije* koja, metodološki promatrano, predstavlja nasljednicu Euklidova egzemplarnog modela iz *Elemenata* (usp. Pasch 1882, Einleitung)[157]:

> „Načini korak naprijed u izvođenju onda i samo onda kada je to opravdano nekim prethodnim korakom", odnosno, „nakon dovoljnog broja preliminarnih koraka, svaki daljnji korak mora biti opravdan prethodnim koracima, što znači da čitav sustav mora slijediti s apsolutnom nužnošću iz određenih posebnih iskaza, aksioma odnosno osnovnih stavova (*Kernsätze*)" (Pasch 1921: 149–150, v. i Pollard 2010, §§4.2, 4.3 i 4.4, str. 96–98).

Kao što će istaknuti u „Grundfragen der Geometrie", Pasch je *strogo i čisto deduktivno izlaganje rezultata* postavio kao imperativnu normu u matematici, smatrajući ga, uopće uzev, odlučujućim i distinktivnim zahtjevom kojim se rukovodi dokazni postupak (*Beweisverfahren*) u matematici i koji, kao takav, vrijedi za svakoga, bez iznimke i potpuno neovisno o tome koje stajalište netko zastupa u pogledu prirode i podrijetla geometrije i geometrijskih aksioma

---

[155] Engel i Dehn dodat će da smo s *Vorlesungen* ušli i u „novo razdoblje čovjekova razumijevanja vlastitoga djela, osobito kada je riječ o strukturi geometrije o kojoj su ljudi dotad imali samo zbrkane predodžbe." (*op. cit.*, str. 136)

[156] Doduše, Veronese *ad loc.* ističe da je Paschov „sustavan tretman projektivne geometrije čisto geometrijskom i elementarnom metodom" uvelike ovisio o prethodnim rezultatima Arthura Cayleya (1821–1895) i, osobito, Felixa Kleina.

[157] Pasch je, naravno, bio svjestan praznina i neopravdanih skokova u Euklidovim izvornim izvođenjima, ali je unatoč tome smatrao njegov model egzemplarnim utoliko što je „jasno pokazivao u čemu [bi se trebao sastojati] *fundamentalni princip matematičke konstrukcije*, čak i ako ga sâm Euklid nije uvijek poštovao." (*op. cit.*, §4.4, moj kurziv)

(Pasch 1917: §V, str. 188). Dakle, jedan od stupova Paschova matematičko-filozofskog programa[158] predstavlja veoma moderna deduktivistička metodologija koja, prema Paschovu mišljenju, predstavlja ideal matematičkog rasuđivanja i zaključivanja, a samim time i temelj strogosti i preciznosti u matematici. Vjerojatno najpoznatije i najcitiranije mjesto iz *Vorlesungen* upravo je ono u kojem Pasch izražava bit te metodologije:

> „I doista, ako geometrija treba biti uistinu deduktivna (*wirklich deductiv*), proces izvođenja (*Process des Folgerns*) mora, uopće uzev i u svakom pogledu, biti neovisan o smislu [sc. značenju] geometrijskih pojmova (*Sinn der geometrischen Begriffe*), kao što mora biti neovisan i o figurama [sc. dijagramima]; mogu se uzimati u obzir jedino relacije (*Beziehungen*) između geometrijskih pojmova koje su uspostavljene u stavovima odnosno definicijama kojima se bavimo. Moguće je, pa čak i korisno, ali nipošto nije nužno razmatrati značenje (*Bedeutung*) geometrijskih pojmova koji se javljaju tijekom dedukcije (*während der Deduction*). Kada to postane nužno, nepotpunost (*Lückenhaftigkeit*) dedukcije i neadekvatnost iskaza na kojima se temeljio dokaz (*Unzulänglichkeit der als Beweismittel vorausgeschickten Sätze*) postaju očite.“ (Pasch 1882: 98)

Pasch će to stajalište u udžbeniku *Veränderliche und Funktion* okarakterizirati kao *čisti formalizam* (*reine Formalismus*), koji predstavlja *Lebensnerv der Mathematik* (Pasch 1914: 121) i koji je „nužno provoditi do krajnosti“ u razvijanju matematike (Pasch 1925, §5, str. 263; usp. Schlimm 2020: 92). Zašto upravo formalizam? Jednostavno zato što Pasch smatra da je za ocjenu matematičkih dokaza poput „Slijedi li korak x iz koraka y?“ ili „Je li zaključak α izveden iz skupa iskaza Γ?“ relevantan jedino njihova *logička forma* i ono što Pasch naziva *strukturnim* ili *funkcionalnim elementima* (doslovno: spojnicama, *Fügemittel*), odnosno (logičkim) veznicima, dok značenje matematičkih pojmova odnosno „materijalnih riječi“ (*Stoffwörter*) ne igra nikakvu ulogu (Pasch 1925, §3). Tako se, primjerice, formalizacija neke dane geometrijske teorije T postiže zamjenom pojmova „točka“, „dužina“, „pravac“ i „ravnina“ proizvoljnim simbolima α, β, γ i δ *salva veritate*, čime se dobiva teorija T'. Da bi matematički dokaz bio rigorozan, potrebno je da zadovolji dva uvjeta: (i) počivat će na onim i samo onim iskazima koji se mogu formalizirati (kao T u T') i (ii) ostat će u potpunosti valjan nakon procesa formalizacije odnosno *liftinga* (*Erhebung*), u kojem se matematički pojmovi koji inače imaju određena značenja sustavno zamjenjuju proizvoljnim simbolima, odnosno znakovima (*willkürlichen Zeichen*) (*op. cit.*, §5). Taj će formalistički *credo* prihvatiti Hilbert, sa svojom znamenitom opaskom (na koju ga je neposredno potaknulo predavanje „Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie“ Hermanna Wienera (1857–1939) iz 1891.) da u sustavu geometrijskih aksioma uvijek mora biti moguće zamijeniti „točku“, „pravac“ i „ravninu“ pojmovima „stol“, „stolica“ i „krigla“ (navedeno prema Detlefsen 1993: 285).

Pored Hilberta, Paschova su predavanja ostvarila utjecaj i na Talijansku školu. Taj je utjecaj osobito očit u Peanovoj aksiomatizaciji projektivne i elementarne geometrije u *I Principii di Geometria logicamente esposti* (1889) i „Sui fondamenti della Geometria“ (1894), a potom i u nizu studija Peanova mlađeg torinskog kolege M. Pierija o geometriji kao hipotetičko-deduktivnom sustavu (*sistema ipotetico-deduttivo*), objavljivanih polazeći od sredine

[158] Izraz dugujem Schlimmu (2010: 94ff, v. §5).

1890-ih i razvijanih tijekom iduća dva desetljeća, u kojima je moguće pronaći mnoštvo referenci na Veroneseove radove, osobito na *Fondamenti* i *Elementi*. Jeremy Gray istaknuo je da su Peano i Pieri „najenergičnije" slijedili Paschov pristup, „uspjevši dati rigorozan oblik realnoj i kompleksnoj dvodimenzionalnoj i trodimenzionalnoj projektivnoj geometriji", dodajući pritom i sljedeću opasku:

> „Istodobno su uspjeli svesti to područje [sc. aksiomatizaciju geometrije] na rigoroznu izobrazbu nastavnika geometrije, *ne uviđajući i ne cijeneći istraživačko područje koje su time otvorili*. Ostavljeno je Davidu Hilbertu da revitalizira aksiomatski pristup geometriji." (Gray & Ferreirós 2025, §3.2, moj kurziv)

Iako je u referenci navedeno i Ferreirósovo ime, ovu je odrednicu o epistemologiji geometrije izvorno 2013. godine samostalno napisao Gray, a važniji razlog zbog kojega sam naveo da je upravo on autor ove opaske leži u činjenici da se gotovo istovjetan komentar nalazi i u njegovu preglednom tekstu o matematičkom modernizmu:

> „Može se reći da moderna geometrija potječe iz Njemačke i Italije, ali se u tim dvjema zemljama proučavala i razvijala s različitim ciljevima. To objašnjava i različite sudbine tih dviju škola: Hilbert je postao slavan, dok su nakon Prvoga svjetskog rata doprinosi Talijana u najvećoj mjeri pali u zaborav. […] U početku su talijanski radovi, a ne Hilbertovi, naišli na bolju recepciju. […] No *radovi Talijana bili su dvostruko ograničeni: nisu iskoristili potencijal za stvaranje novih geometrija, a uz to nisu uvidjeli ni širi značaj aksiomatske metode*. […] *Talijani su previdjeli kreativni aspekt aksiomatske metode* […] ponajprije zbog svoje pedagoške misije: njihova je namjera bila jednom zauvijek razjasniti što je točno elementarna geometrija kako bi obrazovali buduće učitelje i nastavnike matematike. *Nove geometrije i istraživanja u tome području nisu bili dio njihove agende*." (Gray 2009b: 675–76, moj kurziv)

Da je ta ocjena pretjerana i povijesno neutemeljena, pokazuje već činjenica da je upravo Veronese stvorio jednu novu geometriju, nearhimedovsku, a kao što je to ispravno primijetio Contro,

> „uz Peana svakako treba spomenuti i Giuseppea Veronesea kao *suosnivača moderne aksiomatike u Italiji* (*als Mitbegründer der modernen Axiomatik in Italien*). […] Smatramo da Veroneseov dublji značaj leži u činjenici da je, nasuprot Peanovu više formalnom pristupu, *on isticao logičko-filozofsku stranu aksiomatike*. Veronese je tako uspio pomiriti Paschov empirijski pristup sa zahtjevom da se geometrija mora razvijati kao čisto matematička disciplina (*als rein mathematische Disziplin*)." (Contro 1968, §0.2, str. 7, moj kurziv)

I zaista, drugi stup Paschova programa, pored deduktivizma odnosno formalizma, bio je *radikalni empirizam u pogledu epistemologije geometrije*, koji se sastojao u stajalištu da geometrija predstavlja prirodnu znanost (*Naturwissenschaft*) koja počiva na „iskustvenoj podlozi (*auf einem empiristischen Unterbau ruht*)", dok (osnovni) geometrijski pojmovi pripadaju „skupini pojmova koji, uopće uzev, služe za opis vanjskog [sc. fizičkog] svijeta" i koji su, u osnovi, nedefinibilni te empirijskog podrijetla i karaktera, kao uostalom i geometrijski objekti, koji moraju biti opažljivi i koje jedino možemo razumjeti „u odnosu prema odgovarajućim

fizičkim objektima“ (*den Hinweis auf geeignete Naturobjecte*) (Pasch 1882: 3, 16; 1917: 186).[159] Drugim riječima, „geometrijska točka“ (u smislu Euklidove prve definicije[160]) izveden je pojam budući da, strogo promatrano, u geometriji imamo posla samo s *fizičkim točkama*, odnosno nečim što otprilike izgleda ovako • ili ovako ◦ (1917, §1.2). Takva je fizička geometrija za Pascha primarna u odnosu na apstraktnu matematičku ili hipotetičku geometriju (Pasch 1923c; usp. i Pasch 1923a i 1923b) i, uopće uzev, geometrija se razvija od vizualno-taktilnog[161] opažanja prema formuliranju aksioma odnosno osnovnih iskaza (*Grundsätze*) iz kojih slijede svi daljnji geometrijski iskazi. Primjeri aksioma iz *Vorlesungen* jesu:

(I) Između dviju točaka uvijek je moguće nacrtati jednu i samo jednu dužinu.

(II) Ako su zadane dvije točke A i B, moguće je odabrati točku C tako da B leži na dužini AC.

Paschov glavni argument u prilog empirističkom shvaćanju statusa geometrije može se pronaći u njegovim kasnijim publikacijama i odnosi se na pitanje *primjenjivosti matematike*. Naime, da bi matematički iskazi bili primjenjivi na fizički svijet, odnosno u njemu, nužno je da pojmovi koji se u njima pojavljuju imaju fizičke korelate u našem iskustvu, koji „čine sadržaj osnovnih iskaza smislenim i valjanim“ (usp. Schlimm 2010, §3 i 2020, §3). Zanimljivo je da je upravo empirizam spriječio Pascha da uopće razmotri mogućnost nearhimedovske geometrije. Naime, Pasch je problem neprekidnosti u geometriji promatrao kao pokazatelj konceptualnoga jaza između fizičke (empirijske) i matematičke geometrije jer

> „[s]ve dok se držimo ideje da je geometrija na neki način povezana sa stvarnim [sc. fizičkim] svijetom, zasigurno ćemo prihvaćati Arhimedov aksiom kao istinit […] budući da je u tolikoj mjeri ugrađen u naše iskustvo svijeta da je teško zamisliti geometriju u kojoj ne bi vrijedio.“ (Hartshorne 2000, Ch. 14, str. 158ff.)

Paschove rezerve prema aksiomima neprekidnosti prvenstveno su se odnosile na *beskonačnost*, što je i razumljivo budući da je svaka empiristička filozofija matematike u pravilu ujedno i *finitistička* (usp. Pasch 1882, §15, str. 126–27). Budući da Arhimedov aksiom isključuje beskonačne i infinitezimalne elemente, prirodno je da se i Pasch u svojoj aksiomatizaciji geometrije opredijelio za jednu njegovu formulaciju, pritom se pozivajući – što je, kao što ćemo vidjeti u nastavku (Odjeljak [2.6.3]), vrlo indikativno – upravo na aksiome neprekidnosti koje su formulirali Cantor (1872) i Dedekind (1872).[162] Naravno, iz istoga razloga Pasch neće razmatrati ni mogućnost zasnivanja (projektivne) geometrije prostora s više od tri dimenzije budući da je naše osjetilno opažanje uvijek samo trodimenzionalno.

---

[159] U pojedinim će kasnijim radovima Pasch govoriti i o „suštinskom jedinstvu geometrije i fizike“ (usp. Pollard 2010, §5.1, str. 110).

[160] Točka je bezdimenzionalan, neprotežan objekt, odnosno „ono što nema dijelova“ (σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν).

[161] U „Die Begriffswelt des Mathematikers in der Vorhalle der Geometrie“ iz 1922. (§9ff.) Pasch govori o doslovnom „izravnom zahvaćanju“ odnosno „grabljenju“ (*greifen*) matematičkih objekata.

[162] *Ad loc.*, Pasch je dodao da se „opažanje ne može odnositi na beskonačno mnogo stvari“ (*eine Beobachtung sich überhaupt nicht auf unendlich viele Dinge beziehen kann*), kao što se ni dužina ne može sastojati od beskonačno mnogo točaka (*einer Strecke nicht unendlich viele Punkte annehmen dürfen*).

Ono što je za naše potrebe još značajnije od samih pojedinosti Paschova programa jest utjecaj koji je ostvario na Talijansku školu. Naime, određeni empirizam prisutan je i u Peanovim i u Veroneseovim razmatranjima o geometriji, s tom razlikom što Peano ostaje znatno bliži Paschovu stajalištu iz *Vorlesungen*, dok je Veronese znatno bliži Hilbertovu stajalištu iz *Grundlagen*. Kao što ćemo ubrzo vidjeti, prvi sukob i razilaženje između Peana i Veronesea nastupili su zapravo prije Veroneseova uvođenja nearhimedovske geometrije, a ticali su se geometrije hiperprostora.

U *Principii di Geometria* Peano se eksplicitno nadovezuje na Paschova „dragocjena" (*pregevole*) *Vorlesungen*[163], ali je već iz predgovora jasno da zasnivanja geometrije namjerava tretirati formalno i po uzoru na zasnivanje aritmetike, oslanjajući se na simbolički jezik i logički račun koje je uveo u prethodno objavljenim *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (Torino, 1889), u kojima je sadržana znamenita Peanova aksiomatizacija prirodnih brojeva, odnosno Peanova aritmetika. Štoviše, sama Peanova knjižica (duga četrdesetak stranica) započinje odjeljkom „Notazioni di logica e abbreviazioni" (Peano 1889: 6–7) i sadržava dobro poznate simbole ϵ (danas bismo zapisali $\in$), $\cap$ i $\cup$ (konjunkcija i disjunkcija, $\wedge$ i $\vee$), $=$, $-$ (negacija, $\neg$), $\supset$ (implikacija, $\Rightarrow$ ili $\rightarrow$) i Λ (apsurd odnosno proturječje, $\perp$). Međutim, iako bi nas *Arithmetices principia* mogli navesti na zaključak da je Peano bio *logicist*, to zasigurno nije slučaj kada je riječ o geometriji. Potpuno analogno Paschu, Peanov program zasnivanja geometrije također se može promatrati kao kombinacija deduktivizma i empirizma, u kojoj upravo empirizam predstavlja *ograničavajući čimbenik* za apstraktno i čisto logičko zasnivanje geometrije budući da osnovni geometrijski pojmovi, kao i njihova svojstva (kodificirana aksiomima), moraju biti *sperimentalmente veri*, odnosno iskustveno utemeljeni i provjerljivi izravnim osjetilnim opažanjem (usp. Bertran San-Millán 2023, §§2.1–2.2, str. 12ff.). Tako će u „Sui fondamenti della Geometria" napisati sljedeće:

> „[B]it će korisno iznijeti jedno zapažanje o praktičnoj odnosno eksperimentalnoj prirodi [geometrijskih] postulata. Naravno, svakome je dopušteno pretpostaviti koje god želi hipoteze i potom razvijati logičke posljedice sadržane u tim hipotezama. Ali, da bi to uopće moglo zaslužiti naziv geometrija, *nužno je da hipoteze ili postulati izražavaju rezultat najjednostavnijih i najelementarnijih opažanja fizičkih figura* (*figure fisiche*)." (Peano 1894: 75, moj kurziv)[164]

Ovaj izvod pokazuje da Peano, kao i Pasch prije njega, zapravo razlikuje dvije komplementarne faze razvoja geometrije, *predmatematičku* i *čisto matematičku*, pri čemu se prva odnosi na izbor nekoliko najjednostavnijih primitivnih odnosno nedefiniranih pojmova, koji

[163] U Peano (1891a) dodaje i da se *Vorlesungen* „naročito ističu" među svim dotadašnjim doprinosima zasnivanju geometrije.

[164] Sličan pristup Peano slijedi i u radovima nadahnutima Graßmannom i posvećenima geometrijskom odnosno vektorskom računu (*calcolo geometrico*). Tako, primjerice, u „Analisi della teoria dei vettori" kaže:

> „Predlažem da u ovom radu ispitam ideje na koje nailazimo u teoriji vektora i da ih razvrstam na primitivne, koje dobivamo opažanjem fizičkog prostora (*spazio fisico*), i izvedene, koje se uvode definicijom; da zatim ispitam koji se iskazi mogu pretpostaviti kao primitivni [sc. aksiomi], a koji se pak iz njih izvode čisto logičkim postupcima, neovisno o intuiciji (*senza oltre ricorrere all'intuizione*)." (Peano 1898: 513)

se temelji na opažanju fizičkih objekata[165], a druga odgovara „usavršenoj logici“ (*logica perfezionata*), odnosno „apsolutno rigoroznoj dedukciji“ iz aksioma i prethodno dokazanih teorema (usp. Peano 1891a: 67). No, kao što je već rečeno, empirijsko-intuitivna osnova, odnosno *vizualni model*, ograničava koje ćemo aksiome formulirati i uopće uzimati u obzir pri zasnivanju elementarne geometrije. To dobro ilustrira Peanovo inzistiranje na sljedećem aksiomu:

> (**P16**) Ako su zadane neka ravnina i dvije točke na suprotnim stranama te ravnine, tada ili svaka točka prostora pripada zadanoj ravnini ili se jedna od dužina koje je spajaju sa zadanim točkama siječe s tom ravninom (Peano 1889: 37, v. §12).[166]

Prema Peanovu mišljenju, aksiomom (**P16**) „u biti se kaže da je prostor trodimenzionalan“ (*loc. cit.*), što je činjenica koja proizlazi iz svakodnevnoga iskustva. U uredničkoj reakciji na Segreov tekst „Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche“, namijenjen studentima i objavljen u prvom broju Peanova časopisa *Rivista di Matematica*, Peano će upravo u vezi s višedimenzionalnom geometrijom istaknuti da se ona ne može smatrati u pravom smislu znanstvenom niti da može biti izgrađena na „hipotezama koje su suprotne iskustvu (*contrarie all'esperienza*) ili koje nisu iskustveno provjerljive (*verificabili coll'esperienza*)“ (Peano 1891a: 67). S druge strane, Segre, za kojega smo u Odjeljku [1.2] rekli da je, kao i Veronese, bio Kleinov učenik i jedan od pionira u proučavanju n-dimenzionalne geometrije[167], nadovezujući se upravo na Veroneseove temeljne rezultate iz projektivne geometrije hiperprostora iz 1880-ih, nije smatrao takvo ograničavanje istraživanja opravdanim; naprotiv, smatrao ga je štetnim za daljnji razvoj geometrije. Jedna točka u kojoj su Veronese i Peano zapravo suglasni, a u kojoj se razilaze sa Segreom, odnosi se na činjenicu da Segre, za razliku od prve dvojice, zapravo favorizira *analitički* ili pak mješoviti, *analitičko-sintetički pristup*, inzistirajući da se „ne bismo trebali ograničavati na jedan od dvaju mogućih pravaca istraživanja, analitički i sintetički“, nego, sasvim suprotno, „da je nužno proučavati [analizu i geometriju] zajedno i usporedno“ (Segre 1891: 393).[168] Inzistiranje na „čistoći metode“ (*purezza del metodo*), premda karakteristično za modernu *fin-de-siècle* matematiku, koja

---

[165] U Paschovoj aksiomatizaciji to su *točka*, *dužina* (*pravocrtni segment*) i *ravnina* (preciznije, konačni dio ravnine), dok Peano broj primitivnih pojmova svodi na dva: *točku* i *dužinu*.

[166] Koristeći prethodno opisani simbolički jezik, Peano *ad loc.* ovaj aksiom zapisuje na sljedeći način:

$$p\epsilon\mathbf{3}.\,a\epsilon\mathbf{1}.\,a\neg\epsilon p.\,b\epsilon a'p.\,x\epsilon\mathbf{1}:\supset:x\epsilon p.\cup.\,ax\cap p\neg=\Lambda.\cup.\,bx\cap p\neg=\Lambda.$$

[167] O tome najbolje svjedoči činjenica da je na Kleinov poziv izradio studiju „Mehrdimensionale Räume“ za treći svezak *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*. V. nap. 46 *supra*.

[168] Evo i Segreova prikaza stanja među mlađim istraživačima u Italiji:

> „In Italia purtroppo la cosa è ben diversa: la separazione delle matematiche pure in Analisi e Geometria è fatta dai giovani in modo così netto che di ben pochi fra essi si può dire che vadano studiando e coltivando l'una e l'altra. Vi sono dei giovani analisti e dei giovani geometri; ma dei giovani che considerino la matematica tutta come il loro campo, seguendo i grandi esempi che noi pure abbiamo, ve ne son pochissimi. *Ond'è che nel rivolgermi ai miei studenti di Geometria io sento il dover di raccomandar loro col massimo calore lo studio dell'Analisi. Un giovane che voglia oggidì coltivare la Geometria staccandola nettamente dall'Analisi, non tenendo conto dei progressi che questa ha fatto e va facendo, quel giovane, dico, per quanto grande abbia l'ingegno, non sarà mai un geometra completo.*“ (*op. cit*, str. 394, moj kurziv)

je u cijelosti u znaku *purificazione*, prema Segreu zapravo može biti i ograničavajuće, a to osobito vrijedi za inzistiranje na „čisto sintetičkoj metodi (*metodo sintetico puro*) u geometrijskim istraživanjima“, koje podrazumijeva potpuno izbjegavanje koordinata i brojeva (*op. cit.*, §5). Zanimljivo je da je i Pasch, unatoč svome empirizmu, bio na sličnom tragu kao Segre kada je istaknuo da se „geometrija neposredno oslanja na teoriju brojeva“, i to zbog „naše sposobnosti da geometrijske strukture prikazujemo kao aritmetičke“, čime se geometrijski problemi prevode u analitičke (Pasch 1921, *ap.* Pollard 2010, §4.2). Segreova je poanta da u *kontekstu otkrivanja novih rezultata* – što je u konačnici primarni cilj matematike – „geometar ne bi trebao robovati jednoj jedinoj metodi, nego se treba služiti bilo kojim instrumentom kako bi postigao važan rezultat“, drugim riječima:

> „U svakom bi istraživanju trebalo slobodno odabrati metodu koja je najprikladnija. To će često značiti izmjenjivanje sintetičke metode, koja se čini prodornijom i više rasvjetljujućom (*più penetrante e luminoso*), i analitičke [metode], koja je u mnogim slučajevima moćnija, općenitija ili rigoroznija (*più potente, generale o rigoroso*). Često će se događati da isti problem neće biti posve jasan sa svakoga stajališta ako ga ne razmatramo pomoću obje metode. […] Zbog toga mi se čini da su, uopće uzev, bolji i preporučljiviji oni pristupi u kojima se problemi razvijaju oslanjanjem na različite metode od onih u kojima se prihvaća samo jedna metoda. […] *Kao što je čistoća metode od sekundarne važnosti, tako se često događa da pri otkrivanju novih rezultata moramo žrtvovati i strogost.*[169] […] Naravno, matematičar ne može uistinu biti zadovoljan rezultatom koji je postigao oslanjajući se na nerigorozne metode. […] No to ne znači da će se, kada se bavi teškim problemom, olako odreći tih nesavršenih metoda, osobito ako ih ne može zamijeniti boljima. Povijest znanosti pokazuje kolika je oduvijek bila uloga i doprinos takvih metoda.“ (Segre 1891, §§ V–VI, str. 453–4, moj kurziv)

Segre je uvjeren da je upravo takvo slobodno kombiniranje različitih metoda pridonijelo proširenju područja istraživanja u geometriji, a kao najbolji primjer „neograničenog proširenja“ (*allontanamento indefinito*) navodi proučavanje geometrije hiperprostora, „područja koje je zahvaljujući znamenitom Veroneseovu radu [„Behandlung des projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen usw.“] tijekom posljednjeg desetljeća potaknulo niz [od preko dvadeset] talijanskih geometara, osobito mlađih, da mu se energično posvete.“ (*op. cit.*, §VIII). Međutim, kao što smo vidjeli u Odjeljku [1.2], Veronese je u tom radu eksplicitno istaknuo da su svi njegovi prethodnici, slijedeći Riemannov pristup iz habilitacije „Über die Hypothesen usw.“ (1854), obrađivali pojedina poglavlja n-dimenzionalne geometrije isključivo u analitičkom obliku (*alle diese Arbeiten analytische Form besitzen*), dok se on prvi put služi sintetičkom metodom „koja proizlazi iz temeljnih operacija projiciranja i presijecanja“ (*die aus den beiden Fundamentaloperationen des Projicirens und Schneidens hervorgeht*) i koja osigurava najveći stupanj jednostavnosti i intuitivnosti (*Einfachheit und Anschaulichkeit*), a čak i kada se tu i tamo eventualno oslanja na analitičku

[169] „Žrtvovanje strogosti“ za Peana je predstavljalo *peccatum originale* budući da je on, u Weierstraßovu duhu, inzistirao na „apsolutnoj strogosti“ (*il rigore assoluto*) u matematici (usp. Peano 1891a: 66ff.). Zanimljivo je da je i Veronese u jednoj fusnoti u *Fondamenti* (str. 586, nap. 1) istaknuo da za njega „naročito u kontekstu zasnivanja [geometrije], dokazi uvijek moraju biti rigorozni, a kada to nisu, onda su manje ili više manjkavi“ (*per noi la dimostrazione, specialmente nella questione dei principi, deve essere sempre rigorosa, e quando non lo è, essa è più o meno diffettosa*).

metodu, „uvijek je interpretira na intuitivan način (*ich interpretire sie immer in anschaulicher Weise*)“ (Veronese 1882a: 161, 177). Također, Veronese u tom radu prvi put ističe da je *fundamentalni geometrijski prostor* (*Fundamentalraum unserer Operationen*) zapravo n-dimenzionalni prostor R^n (u suvremenoj terminologiji: $\mathbb{R}^n$), budući da, prema njegovu mišljenju (usp. nap. 50), razmatranje složenih geometrijskih konfiguracija postaje znatno jednostavnije promatraju li se one kao projekcije ili presjeci hiperploha takva fundamentalnog odnosno *općeg prostora* (*spazio generale*), nego kada bismo ih pokušali obrađivati u takozvanom običnom trodimenzionalnom prostoru R^3 ($\mathbb{R}^3$) (*spazio ordinario*) (usp. Veronese 1891, Prefazione).

Povrh toga, Veronese je još u korespondenciji s Fiedlerom iz 1882. iznio uvjerenje da geometrije ne može biti bez čiste geometrijska ideja prostora (*reine geometrische Gedanke des Raumes*). U tome je zapravo suglasan s Peanom, ali uz jednu važnu razliku: u Veroneseovu slučaju „geometričnost“ ponajprije proizlazi iz zahtjeva da „metoda izlaganja bude elementarna i utemeljena na konstruktivnom procesu prostorne intuicije“ (*che il metodo di trattazione sia elementare e basato sul processo costruttivo dell'intuizione spaziale*), dok se znatno manje odnosi na izravno opažanje fizičkih objekata, na čemu pak inzistira Peano (v. Condizione V u *Fondamenti*, str. xvi). Prednost takve metode, koju Veronese naziva i *čistom geometrijskom* ili *sintetičkom* (*il metodo geometrico puro o sintetico*), leži u tome što geometrijske objekte uvijek promatra i tretira kao geometrijske (*tratta sempre le figure come figure*) te što nam omogućuje da s njima radimo izravno (*lavoriamo direttamente cogli* […] *ogetti geometrici*) (*op. cit.*, str. xix–xx). Prva rečenica kojom započinju *Fondamenti*, koji su, ne zaboravimo, posvećeni zasnivanju geometrije *a più dimensioni*, izražava Veroneseovo mišljenje da uzrok i izvor „živih rasprava“[170] među samim matematičarima, kao i između matematičara i filozofa o geometriji s više od tri dimenzije, treba tražiti upravo u čisto analitičkoj metodi (*metodo puramente analitico*) kojom se ona gotovo isključivo obrađivala i u okviru koje „se činilo i još uvijek se čini poistovjećivanje apstraktnih ili numeričkih n-dimenzionalnih mnogostrukosti s geometrijskim prostorima u pravom smislu“, kao i u „općem uvjerenju da se u razmatranju takvih prostora uvijek krije neki analitički pojam koji se jedino može sa sigurnošću obrađivati posredstvom analize“.[171] Kao što možemo vidjeti iz navedenoga citata (nap. 171), Veronese, posve u skladu s uvjerenjima iznesenima u pismu Fiedleru i u „Behandlung des projectivischen Verhältnisse der Räume usw.“, i u *Fondamenti* nastoji obraniti čisto geometrijsku koncepciju hiperprostora

[170] Veronese daje sumarni prikaz tih rasprava u *Fondamenti*, str. 614–15, nap. 2.

[171] Cjelovit citat glasi:

> „Le vive dispute intorno alla geometria a più di tre dimensioni fra matematici e fra matematici e filosofi, originate a parer nostro in gran parte dal metodo puramente analitico col quale essa veniva trattata, e dallo scambio che si faceva e si fa tuttora delle varietà astratte numeriche a n dimensioni cogli spazi geometrici propriamente detti; la credenza comune che sia sempre nascosto un concetto analitico nella considerazione di questi spazi e non si possano trattare sicuramente che con l'analisi, la conseguente confusione sul concetto di spazio e quindi anche sull'essenza della geometria stessa, ci persuasero fin dal 1882 di ciò, che un libro inteso a mostrare elementarmente coma la geometria degli spazi a più di tre dimensioni si possa svolgere in modo perfettamente analogo a quella del piano e dello spazio ordinario, sarebbe riuscito utile e importante, sia perchè avrebbe difeso *il concetto prettamente geometrico di tali spazi*, come anche perchè avrebbe reso più facile e comune lo studio di questa geometria.“ (Veronese 1891: v, moj kurziv)

te, posljedično, ujedno afirmirati autonomiju čisto geometrijske odnosno sintetičke metode kako bi „etablirao principe čiste hipergeometrije“ (*ipergeometria pura*) (usp. Veronese 1893/94: 195, 206).

Ne bi, međutim, trebalo pomisliti da je Veronese zbog toga bio protivnik analitičke metode u geometriji. Naprotiv, već Veroneseovo predavanje „Dei principali metodi in geometria, e in ispecial modo del metodo analitico“, održano studentima Matematičkog fakulteta u Padovi 10.12.1881. povodom preuzimanja Bellavitisove katedre za analitičku geometriju, svjedoči o suprotnom stajalištu. Veronese tako govori o tome kako će sa studentima proučavati osnove geometrije analitičkom metodom (*studiare con me i fondamenti col metodo analitico*), kombinirajući rezultate dobivene analitičkim putem (*risultati del calcolo*) s čisto geometrijskim razmatranjima (*considerazioni geometriche*), što će im omogućiti da geometriju promatraju kao „primjenu [matematičke] analize na prostor“ (*l'applicazione dell'analisi allo spazio*) (Veronese 1882b: 22, 28, 31). Dakle, Veronese u potpuno istom duhu kao i Segre smatra da su analitička i sintetička metoda *komplementarne* te da bi ih, osobito u didaktičkom kontekstu, trebalo primjenjivati usporedno.[172]

Međutim, Veronese ipak ističe da čista odnosno sintetička geometrija (*geometria pura o sintetica*), koja potječe iz klasične grčke geometrije i projektivne geometrije 17. stoljeća (Apolonije, Pap, Desargues, Pascal), ima prednost pred analitičkom[173] utoliko što „u dokaznom postupku ništa ne ostaje skriveno“ (*nel processo dimostrativo nulla rimane oscuro*) budući da se u njoj izravno manipulira konfiguracijama i relacijama između geometrijskih objekata i njihovih elemenata, a ne posredstvom nekoga analitičkoga medija (koordinata odnosno realnih brojeva); upravo ta neposrednost (*immediatezza*) jest ono što sintetičku metodu čini rasvjetljujućom i uvjerljivijom (*più luminoso e alletto*) budući da „čini stvari vidljivijima, transparentnijima i plastičnijima“ (*ci rende le cose più visibili, più trasparenti, più plastiche*) (*op. cit.*, str. 9–11). Drugim riječima, u sintetičkoj i analitičkoj geometriji razlikuju se i sami dokazi odnosno načini izvođenja: prema Veroneseovu mišljenju, većina rezultata dobivenih analitičkim putem predstavlja „puku posljedicu računanja“, čime ostajemo uskraćeni za neposredan uvid u pravi razlog (*l'intima ragione*) na kojem počiva istinitost tih rezultata, dok, nasuprot tome, u čistoj geometriji ne možemo doći ni do jednoga rezultata a da nismo u potpunosti i neposredno uvidjeli kako je točno izveden svaki prethodni korak u dokazivanju nekoga zadanoga stava (*op. cit.*, str. 12).

Utječu li i na koji način takva metodološka stajališta na tretman n-dimenzionalne geometrije? S analitičkoga stajališta, ističe Veronese, stvar je jednostavna: „u analizi ne moramo razmatrati samo jednadžbe s tri, nego s bilo kojim brojem n varijabli“, tako da se točka u n-dimenzionalnom prostoru, za razliku od točke u trodimenzionalnom prostoru, „može odrediti s n koordinata.“ (*op. cit.*, str. 24) Na istom će tragu biti i Segre desetak godina kasnije: „na temelju metode koordinata promatramo točke pravca, ravnine i prostora kao

[172] Sada vidimo na čemu se temelji gore navedena Grayova opaska o „pedagoškoj misiji“ talijanskih matematičara – i Segre (u tekstu iz 1889.) i Veronese (u predavanju iz 1881.) u svojim se razmatranjima geometrijske metode i, općenito uzev, zasnivanja geometrije obraćaju svojim *studentima*.

[173] Izuzev, možda, u slučaju proučavanja *metričkih svojstava*, gdje je analitička metoda svakako prikladnija. Usp. Veronese 1882b: 12.

predstavljene analitičkim varijetetima (*varietà analitiche*) koji se sastoje od svih mogućih vrijednosti jednoga, dvaju ili triju brojeva, tako da su sustavi jednadžbi s jednom, dvjema ili trima varijablama predstavljeni određenim grupiranjima točaka (*aggruppamenti di punti*), itd. To nas prirodno vodi proširenju jezika geometrije na slučaj bilo kojega broja n varijabli, pri čemu zadržavamo riječ *točka* kako bismo označili bilo koju skupinu vrijednosti n varijabli (sc. koordinate točke), riječ (n-dimenzionalni) *prostor* kako bismo označili skup (*insieme*) svih tih točaka ili skupina vrijednosti, itd., itd." (Segre 1891: 405) No, unatoč prirodnosti takvoga proširenja (ili poopćenja) jezika geometrije, i Veronese i Segre suglasni su da hipergeometrija time zapravo prestaje biti geometrija u pravom smislu (*vera geometria*) i postaje posve nalik algebri budući da su njezini osnovni objekti u biti analitički (Segre, *op. cit.*, *ad loc.*; usp. Veronese 1882b: 26).[174] S time bi se složio i Peano jer je, kao što smo vidjeli, u duhu sintetičko-aksiomatske izgradnje geometrije inzistirao na autonomnim temeljima, onima koji ne počivaju na izvan- ili negeometrijskim pojmovima i idejama (usp. Bertran San-Millán 2023, §3.2):

> „Ako se točkom nazove bilo koja skupina n varijabli, onda je jasno da time prestaje svaka rasprava o postulatima geometrije; teorije koje se [odatle] izvode razvijaju posljedice principa aritmetike, a ne geometrije. Svaki tako dobiven rezultat neovisan je i nema nikakve veze ni s jednim geometrijskim postulatom. […] Bavimo li se na taj način još uvijek matematikom? Sigurno je da se bavimo algebrom, ako ispravno rasuđujemo; ali pojedini autori tim se pitanjima *uglavnom* bave protivno pravilima algebre." (Peano 1891b: 157)

No ni to još uvijek ne znači da – matematički promatrano – postoji ikakva načelna razlika između trodimenzionalnoga prostora i prostora od četiri, pet ili n dimenzija: „za matematičara oni postoje na potpuno isti način kao i prostor od tri dimenzije te ih može proučavati na potpuno isti način." (Segre 1891: 408). Kao što će istaknuti Veronese, način na koji se elementarna geometrija dotad uobičajeno razvijala u pravilu je podrazumijevao prihvaćanje „svojstva da je fizički svijet trodimenzionalan u granicama našega opažanja, *svojstva koje nipošto nije nužno za znanstveno razvijanje geometrije*." (Veronese 1891: vi, Veroneseov kurziv). Drugim riječima, za potrebe rada u n-dimenzionalnom prostoru dovoljno je samo odbaciti Peanov aksiom (P16).[175] Očekivano, Peanova je reakcija bila oštra i, s obzirom na činjenicu da se polemika vodila na stranicama *Rivista di Matematica*, čiji je bio osnivač i glavni urednik, čak i neprimjerena, utoliko što je Peano zloupotrijebio uredničke prerogative objavivši čak dva svoja osvrta[176] na Segreov tekst (objavljen, inače, na Peanovo inzistiranje –

---

[174] *Ad loc*, Segre eksplicitno kaže: „Ma è stato osservato che con ciò non si viene più a fare della *vera geometria*, poiché *gli enti considerati sono essenzialmente analitici* ; e che ad esempio la geometria proiettiva generale che così si viene a costruire non è altro in sostanza che l'algebra delle trasformazioni lineari." (moj kurziv)

[175] Usp. Segre, *op. cit*, str. 462: „Infine si può riguardare lo spazio ad n dimensioni come definito al modo stesso di quello ordinario, *solo che si tolga il postulato delle 3 dimensioni*, e si modifichino in conseguenza alcuni di quelli relativi alla retta ed al piano." (moj kurziv)

[176] Prvo, „Osservazioni del Direttore sull'articolo precedente" (str. 66–69), a potom i „Risposta (a una Dichiarazione di Corrado Segre – v. Segre 1891a)" u okviru odjeljka Corrispondenza (str. 156–159), gdje je čak rekao da će njegova riječ biti posljednja u raspravi: „quindi questa questione è finita" (Peano 1891b: 156). Povijesno je zanimljivo uočiti jednu neobičnu okolnost. Sâm Veronese nije izravno polemizirao s Peanom u *Rivista* (premda se osvrtao na Peanove kritike u dodatku *Fondamenti* i u drugim svojim spisima, osobito u dvjema

v. uvodnu napomenu u kojoj Segre eksplicitno navodi da je tekst nastao „aderendo alle gentili insistenze del Direttore di questa *Rivista*“), a koji su se neizravno zapravo odnosili na Veroneseove ideje o hipergeometriji. Naime, govoreći o odbacivanju aksioma trodimenzionalnosti, Segre se pozvao na Veroneseovu studiju „La superficie omaloide normale etc.“ (1883/84). Iako je Veroneseov primarni cilj u tom radu bio konstruiranje takozvane Veroneseove hiperplohe (usp. Odjeljak [1.2]), u jednoj je fusnoti iznio određena zapažanja koja će postati od središnjeg značaja za *Fondamenti*, kao i za Segrea. Pogledajmo što je Veronese točno napisao.

> „Metoda koju ovdje slijedim prije svega je sintetička i *intuitivna*, kao i u drugim mojim radovima o n-dimenzionalnoj geometriji. **Kažem intuitivna jer su za mene točka, pravac, ravnina i trodimenzionalni prostor u n-dimenzionalnom prostoru *elementi poznate prirode*** (***elementi di natura nota***)**, odnosno, ti pojmovi uvijek imaju isto značenje** (***lo stesso significato***) **koje posjeduju i u uobičajenom** [**trodimenzionalnom**] **prostoru** (***spazio ordinario***). Stoga su i geometrijski objekti s više od tri dimenzije, koji su generirani iz tih elemenata, i sami po sebi djelomično intuitivni (*parzialmente intuitivi*) budući da su predstavljeni ne posredstvom jednadžbi, nego posredstvom geometrijskih figura. (2)
>
> (2) Čini mi se prikladnim, premda to nije nužno, ovom prilikom dobro pojasniti **pojam n-dimenzionalnog prostora koji predstavlja temelj mojih istraživanja** (*fondamento delle mie ricerche*), naprosto kako ne bih bio pogrešno shvaćen.
>
> U predavanjima iz osnova elementarne n-dimenzionalne geometrije koja sam ove godine držao u Padovi postavio sam aksiome koji se odnose na dužine (*segmenti rettilinei*) i, konstruiravši pravac (*la retta*), dodao sam i aksiom o paralelama u euklidskom smislu. **Kao fundamentalnu hipotezu pretpostavio sam** da izvan bilo koje dužine i entiteta koji se pomoću dužine mogu konstruirati uvijek postoje točke ili, drugim riječima, pretpostavio sam **da ne postoji nikakvo ograničenje u pogledu broja dimenzija entiteta koje je moguće konstruirati pomoću dužine** (*costruibili col segmento rettilineo*), a potom sam pokazao kako se konstruiraju ravnina i prostor od tri ili bilo koliko dimenzija, dokazujući za sve njih, i to na analogan način, njihova fundamentalna svojstva (*le loro proprietà fondamentali*). Nakon toga **deskriptivna geometrija služi za konstruiranje modela** (**projekcija**) **figura četverodimenzionalnog ili n-dimenzionalnog prostora u našem** [**trodimenzionalnom**] **prostoru. Stoga ne može biti nikakve sumnje da figure dobivene** (*dedotte*) **projekcijom ili presjekom figura n-dimenzionalnoga prostora postoje**. **Dakle, odavde se vidi da je moje polazište ne toliko sintetičko koliko prije svega *reprezentativno*** (*rappresentativo*)**, i to bez ikakva**

studijama objavljenima 1892. u *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, posebno u „A proposito di una lettera del prof. Peano: Osservazioni di G. Veronese“). No čini se da je Veronese imao svoje pristaše ili „glasnogovornike“. Kada je riječ o raspravi o statusu n-dimenzionalne geometrije, to je prije svega bio Segre, dok ga je u raspravi o statusu infinitezimala i nearhimedovske geometrije zastupao Bettazzi (a Vivanti i Peano zastupali su antiinfinitezimaliste). S druge strane, Peano je već u prvom broju *Rivista* objavio otvoreno pismo Veroneseu, a potom i izrazito negativnu recenziju *Fondamenti* (koju je sam napisao) u drugom broju (1892). Više pojedinosti o raspravi Vivanti–Bettazzi i o ulozi koju je ona, zajedno s Peanovom recenzijom, imala u povijesti recepcije Veroneseovih ideja v. u odjeljcima [3.11] i [3.1.2].

analitičkog supstrata, pri čemu *generativni element* (*elemento generatore*) ***nije neki element bilo koje prirode, nego upravo točka onakva kakvom je zamišljamo i u našem*** [***trodimenzionalnom***] ***prostoru*** (*ma il punto tale quale che lo immaginiamo nel nostro spazio*).[177] Upravo se zato u istraživanjima možemo neprekidno služiti crtežima i dijagramima (*figure tracciate sulla carta*) radi prikazivanja točaka, pravaca, ravnina, krivulja i ploha n-dimenzionalnog prostora, utoliko što su ti crteži na određen način perspektiva (*la prospettiva*) odgovarajućih geometrijskih objekata u ovom [sc. trodimenzionalnom] prostoru. To je i razlog zbog kojega […] je za mene ravnina uvijek ista, kako u uobičajenom, tako i u bilo kojem drugom prostoru (*si nello spazio ordinario come in un altro spazio qualunque*). To je također razlog zbog kojega ne mogu prihvatiti općeprihvaćenu čisto analitičku definiciju takvoga prostora kao kontinuuma čiji je [konstitutivni] element (bilo koje prirode) određen s n veličina; jer, premda je možda istina da ta definicija u sebi obuhvaća sve moguće geometrijske interpretacije, nije ništa manje istina da, obuhvaćajući ih sve, zapravo ne određuje nijednu te da, slijedom toga, nije reprezentativna (*non è quindi rappresentativa*). Dakle, nije riječ o tome da rezultate analize predstavljam sintetičkim jezikom, nego *polazim od geometrijskih konstrukcija na koje potom, ako to smatram korisnim, eventualno primjenjujem analitičku metodu.* […] *Sve konfiguracije od* $n+1$ *točaka i svi geometrijski objekti od* $m-1$ *dimenzija nekoga prostora* S_m (*pa stoga i našega prostora*) *izvode se* (*si deducono*) *jednoznačnom projekcijom ili presjekom iz odgovarajućih konfiguracija točaka ili* (m–1)*-dimenzionalnih objekata* n*-dimenzionalnog prostora.*“ (Veronese 1883/84: 345–46, nap. 2, Veroneseov izvorni kurziv; moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Kao što možemo vidjeti, Veroneseova „fundamentalna hipoteza“ svodi se na negaciju Peanova aksioma (P16) iz *Principii di Geometria*. U jednom od posljednjih odjeljaka *Fondamenti*, naslovljenom „Sulle definizioni di spazio e di geometria a n dimensioni e del principio di proiezione e sezione“, Veronese daje i svoju definiciju n-dimenzionalnog prostora S_n:

DEF. 1 Ako su zadani trodimenzionalni prostor S_3 i jedna točka *izvan* (*fuori*) toga prostora, konstruiramo prostor S_4 i, analogno tome, n-dimenzionalni prostor S_n, podvrgavajući ga aksiomima općega prostora. (Veronese 1891: 611)

Donekle sličnu, premda manje preciznu definiciju možemo pronaći i u predgovoru *Fondamenti*:

DEF. 2 Opći prostor (*spazio generale*) zadan je sustavom točaka takvim da, ako je zadan ili konstruiran bilo koji geometrijski objekt (*figura*) koji pripada tom prostoru, uvijek postoji barem jedna druga točka izvan njega (*fuori di essa*), pri čemu se njezina nedokaziva svojstva (*proprietà non dimostrabili*) djelomično izvode iz vanjskog opažanja (*osservazione esterna*), a djelomično iz apstraktnih principa [sc. aksioma], pri čemu ta svojstva nisu u proturječju s prethodno utvrđenim svojstvima. Kada je riječ o geometrijskim objektima, sve dok [pojam] točke zadržava svoje izvorno značenje (*finchè il punto conserva il suo primo significato*), oni

[177] Na ovome će Veronese inzistirati i u *Fondamenti*, usp. str. 611ff.

su uvijek praćeni prostornom intuicijom (*sono sempre accompagnate dall'intuizione spaziale*) (Veronese 1891: xxiv; v. i Cap. I, §1, str. 211)[178]

Ono na čemu će inzistirati i Veronese i Segre jest da su te definicije *potpuno neovisne* o fizičkom ili metafizičkom, a ne matematičkom, pitanju o tome koliko zapravo (*effettivamente*) dimenzija ima fizički prostor (usp. Segre 1891: 407). U recenziji *Fondamenti* Peano će istaknuti da je glavni nedostatak Veroneseove „geometrijske odnosno sintetičke teorije n-dimenzionalnih prostora" to što, za razliku od elementarne geometrije, ona „zahtijeva veći broj postulata" i, štoviše, „da je broj postulata potrebnih za uspostavljanje teorije prostora s više dimenzija zapravo neograničen (*illimitato*), odnosno aktualno beskonačan (*attualmente infinito*)" (Peano 1892b: 144). Povrh toga, u svojim „Osservazioni" o Segreovu tekstu Peano ističe i da zamjena njegova aksioma

(**P16**) „Uobičajeni prostor (*spazio ordinario*) jest S_3"

Veroneseovim aksiomom

(**V**) „Postoje točke izvan uobičajenoga prostora S_3"

ima za posljedicu da iskazi za koje je dokazano da su istiniti u prostoru S_4 (ili, općenito uzev, S_n) *prestaju vrijediti* (*cessano di valere*) u prostoru S_3 jer je dokazano da slijede kao posljedica Peanovih aksioma 1–15 i Veroneseova aksioma, a ne kao posljedica skupa aksioma elementarne trodimenzionalne geometrije (odnosno Peanovih aksioma 1–16 iz *Principii di Geometria*) (Peano 1891a: 68; usp. i Segre 1891: 410, nap. 44). Peanove se primjedbe ne odnose toliko na samu Veroneseovu definiciju S_n i prethodno citiranu temeljnu hipotezu odnosno aksiom (V)[179], koliko na stajalište koje Veronese iz nje izvodi, a Segre preuzima *ad verbum*, naime da točke općega hiperprostora S_n imaju *ista svojstva* kao i točke uobičajenoga trodimenzionalnog prostora S_3, što nam zapravo omogućuje *prijenos* sa prostora viših na prostore nižih dimenzija. U tom će duhu i Segreov student Francesco Severi u predgovoru prvomu tomu Segreovih sabranih djela napisati da su za Veronesea i Segrea, kao i „za sve naše majstore geometrije hiperprostora, točke, pravci i ravnine linearnoga prostora S_n istinski geometrijski entiteti" (*vere entità geometriche*) i, povrh toga, da za njih linearni n-dimenzionalni prostor „*kao da realno postoji*" (*come se realmente esistesse*):

> „Samo je uz takvo uvjerenje moguće postupno oblikovati *jednu vrstu hiperprostorne intuicije* (*una sorta di intuizione iperspaziale*), s kojom se, doduše, javlja i problem logičkoga značenja (*il problema del significato logico*) koje ta intuicija može imati, značenja koje je isprva pomalo maglovito (*un po' vago*), ali za koje je postupno moguće uspješno izgraditi racionalnu osnovu." (Severi 1957: vii–viii, navedeno prema Manara & Spoglianti 1977: 3, moj kurziv)[180]

---

[178] Veronese dodaje da pojam tako definiranoga prostora implicitno figurira već u njegovoj studiji „Behandlung des projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen usw." iz 1882. godine.

[179] Iako u polemici sa Segreom ništa ne sugerira da Peano ima bilo kakvu primjedbu protiv Veroneseova aksioma, u recenziji *Fondamenti* bez ikakva će dalja obrazloženja ustvrditi da on predstavlja *principio assurdo*, „apsurdan princip" (Peano 1892b: 144).

[180] S druge strane, moglo bi se reći da je Peano uvelike slijedio svoga mentora budući da je Angelo Genocchi (1817–1889), kao što navodi i Veronese u *Fondamenti* (1891: 614, nap. 2), bio veliki protivnik n-dimenzionalne

Dublji razlog *logičke prirode* zbog kojega Peano ne može prihvatiti Veroneseovo i Segreovo stajalište tiče se činjenice da on geometriju – riječima njegova učenika Pierija – tretira kao hipotetičko-deduktivni odnosno aksiomatsko-deduktivni sustav u kojem aksiomi, i to ne pojedinačno nego zajedno, dakle kao cjelovit aksiomatski sustav, *holistički* odnosno *kontekstualno*, figuriraju kao *implicitne definicije* osnovnih odnosno primitivnih geometrijskih pojmova. Povijest pojma „implicitna definicija" (u samoj matematičkoj praksi, ali i u raspravama o filozofiji i osnovama matematike), koja započinje još 1818. klasičnim radom „Essai sur la theorie des definitions" francuskoga matematičara Josepha Dieza Gergonnea (1771–1859), složena je, zamršena i, kako je ispravno primijetio Gottfried Gabriel, može se opisati kao svojevrsna *povijest konfuzija* (*Verwechselungsgeschichte*, usp. Gabriel 1978). Za potrebe ovoga rada, kao ni za razumijevanje Peanove argumentacije, nije potrebno detaljno rekonstruirati njezin razvoj; čitatelja stoga upućujem na pregled u Giovannini & Schiemer 2021. Ono što je, međutim, važno imati na umu jest da je pitanje statusa definicija u matematici i logici predstavljalo jedno od središnjih pitanja Peanove škole. Štoviše, sâm Peano inzistirao je na tome da su sve definicije u matematici uvijek samo *nominalne*, što znači da im je funkcija specificiranje odnosno fiksiranje *značenja* matematičkih pojmova (Peano 1911: 52, usp. 1921, §2). S time je suglasan i Veronese (usp. *Elementi*, 1897: 7). Govoreći pak o „primitivnim idejama" (*idee primitive*), odnosno o osnovnim, nedefiniranim pojmovima, Peano ističe sljedeće:

> „Fundamentalna svojstva primitivnih ideja određena su takozvanim 'primitivnim iskazima', odnosno iskazima koji se ne dokazuju i iz kojih se izvode sva druga svojstva [matematičkih] entiteta koje razmatramo. *Primitivni iskazi*, *koji odgovaraju onome što su antički geometri nazivali aksiomima ili postulatima* […] *na određeni način funkcioniraju kao definicije primitivnih ideja.*" (Peano 1911: 58, moj kurziv)

Istaknuti član Peanove škole i Peanov asistent u Torinu, Cesare Burali-Forti (1861–1931), u predavanju „Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel", održanom na Međunarodnom filozofskom kongresu u Parizu 1900. godine, nazvao je vrstu definicija o kojima govori Peano *définitions par postulats* te kao primjer naveo pojmove „točka" i „dužina", onako kako su definirani u Peanovoj aksiomatizaciji iz *Principii di Geometria* (Burali-Forti 1901: 290, 295ff.). Drugim riječima, značenje osnovnih odnosno primitivnih geometrijskih pojmova u aksiomatski izloženoj teoriji konstituira se i fiksira posredstvom njihovih uzajamnih *logičkih relacija*, i to onako kako su one izražene odnosno određene aksiomima.[181] Ali upravo nas to vodi poanti Peanove kritike Veronesea i Segrea.

---

geometrije, smatrajući ne samo da ne bi trebalo nego da bi bilo i pogrešno pretpostavljati kako u n-dimenzionalnoj geometriji imamo posla s nečim što ima bilo kakvo stvarno geometrijsko značenje (*si avrebbe torto di lasciar supporre che si creda alla realtà del significato geometrico dei nomi impiegati*) i, štoviše, da rezultati n-dimenzionalne geometrije neminovno moraju „djelovati apsurdno ako su izraženi geometrijskim u geometrijskim terminima (*con una nomenclatura geometrica*), pretpostavljajući nekakve točke, pravce i prostore koji više nemaju nikakvu stvarnu egzistenciju (*che non hanno alcuna esistenza reale*)."

[181] U znamenitoj natuknici „Prinzipien der Geometrie" za treći svezak Kleinove *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Enriques će, govoreći o postpaschovskom, rigoroznom aksiomatskom tretmanu geometrije (u kojem se, prema njegovu mišljenju, osobito ističu Peano, Veronese i Hilbert), istaknuti da, „s apstraktno logičkoga stajališta", postulati odnosno aksiomi predstavljaju „arbitrarne konvencije" (*willkürliche Verabredungen*),

Naime, budući da cjelina logičkih relacija koje izražava cjelokupan aksiomatski sustav definira osnovne pojmove, promjene čak i pojedinih aksioma – primjerice Peanova aksioma trodimenzionalnosti (P16) – neminovno moraju prouzročiti i promjenu definicije te, slijedom toga, i značenja osnovnih geometrijskih pojmova. Dakle, zamijenimo li (P16) Veroneseovim aksiomom (V), strogo govoreći više nećemo govoriti o *istim* geometrijskim entitetima, premda ćemo se na njih i dalje referirati istim pojmovima.

S tim u vezi Peano će podsjetiti i na takozvani *spor o fuzionizmu* u elementarnoj geometriji (i njoj pripadajućoj metodici i didaktici), koji je bio vrlo aktualan u Italiji 1880-ih[182], a ticao se legitimnosti primjene metoda i tehnika *stereometrije* (trodimenzionalne geometrije) pri rješavanju problema i dokazivanju teorema u *planimetriji*, odnosno geometriji ravnine. Nasuprot Segreu, Peano je bezrezervno inzistirao na čistoći metode te je bio protivnik fuzionizma, odnosno stapanja planimetrije i stereometrije, i nije prihvaćao postojanje analogije između ravninskih i prostornih figura (na kojoj je, slijedeći Cremonu, primjerice inzistirao njegov učenik De Paolis (1854–1892) u predgovoru svojih *Elementi*; v. nap. 175 i Arana & Mancosu 2012: 304). Prema Peanovu mišljenju, teoremi planimetrije prestaju vrijediti u rektimetriji (geometriji pravca), a teoremi stereometrije ne vrijede u planimetriji (Peano 1891a: 69). Općenito uzev, to znači da geometrija ravnine bitno ovisi o tome je li ravnina utopljena u trodimenzionalni ili čak višedimenzionalni prostor, što, kao što smo vidjeli, ovisi o izboru aksioma poput (P16) ili (V), koji kodificiraju pretpostavke o dimenzionalnosti geometrijskoga prostora s kojim radimo. Međutim, ni Veronese nije bio fuzionist u uobičajenom smislu. U uvodu *Elementi* zastupa negativno ili barem pesimistično stajalište o korisnosti i primjenjivosti stereometrijskih razmatranja u planimetriji i rektimetriji, ponajprije kada je riječ o metričkim svojstvima[183], te ističe da je „u svojim geometrijskim radovima“ prije svega bio „pristaša fuzije višedimenzionalne geometrije s geometrijama nižedimenzionalnih prostora, jer upravo proučavanje *projektivnih svojstava* potonjih nalazi svoj najpotpuniji i najviši izraz posredstvom onih prvih.“ (Veronese 1897: xiv–xv)

Ovdje možemo vidjeti gdje se i kako se Peano i Veronese zapravo „mimoilaze“ kada je riječ o sporu oko n-dimenzionalne geometrije. Kao što sam već rekao, Veronese je u radovima iz 1870-ih i, osobito, 1880-ih razvijao tehnike i metode za geometriju hiperprostora, odnosno, preciznije, za sintetičko proučavanje geometrijskih objekata uobičajenoga prostora S_3 utopljenoga u n-dimenzionalni prostor S_n. To su prije svega bili *metoda* odnosno *princip projekcije i presjeka* (*das Prinzip des Projicirens und Schneidens*), uvedeni u radu iz *Mathematische Annalen* (1882), Veroneseovo utapanje $\mathcal{V}$ (iz 1883/84.) kao *metoda*

a da „cjelokupnost logičkih relacija“ (*die Gesamtheit der logischen Beziehungen*) koje aksiomi izražavaju „konstituira jednu vrstu *implicitne definicije primitivnih pojmova*.“ (Enriques 1907: 11)

[182] Od ranih publikacija osobito su bili relevantni De Paolisovi *Elementi di geometria* (1884) i Andrianijevi *Elementi di geometria euclidea esposti con nuovo metodo* (1887), a vjerojatno najpoznatiji udžbenik bio je Lazzeri–Bassanijev *Elementi di geometria* (1891).

[183] Zato što je, prema Veroneseu, elementarna euklidska geometrija (a osobito geometrija pravca i ravnine) prije svega metričke naravi (*è per sua natura metrica*) budući da počiva na pojmu jednakosti (figura). Usp. Veronese 1897: ix, xiv.

linearizacije i desingularizacije (krivulja i ploha), ali i generalizirana *metoda centralne projekcije*[184] za prostor S_4 i prostore S_n iz rada „Sulla Geometria descrittiva a quattro dimensioni" (1881/82), za koju Veronese kaže da proizlazi iz metode projekcije i presjeka.[185] Dakle, promatrano iz perspektive matematičke prakse, Veroneseov je pristup bio *konstruktivan*: pomoću čisto geometrijskih konstrukcija osigurati korisne i učinkovite nove *instrumente* za tretman konkretnih problema u n-dimenzionalnoj geometriji, osobito u vezi s projektivnim svojstvima i relacijama. Pojednostavljeno rečeno, višedimenzionalni prostori S_n za Veronesea prije svega imaju status „pomoćnoga sredstva" (*Hilfsmittel*) koje nam omogućuje da što jednostavnije i učinkovitije proučavamo strukture u S_3 (usp. Odjeljak [1.2]), i to bez pribjegavanja čisto analitičkim sredstvima koja geometriju pretvaraju u algebru i analizu, s čime su se, kao što smo vidjeli, slagali i Peano i Veronese, pri čemu Veronese, za razliku od Peana, nije bio radikalno protiv analitičkih metoda. Drugim riječima, Veronese je bio *fleksibilniji* i dopuštao je „fuziju" različitih metoda i tehnika, osobito u kontekstu dokazivanja (novih) teorema. Stoga nije neobično što je Peano, inzistirajući bez iznimke na čistoći metode, bio znatno *rigidniji* i isključiviji od Veronesea. Ono gdje je zapravo nastalo pravo neslaganje ticalo se pokušaja eventualnoga naknadnog opravdanja „*instrumenata* za koje je već bilo dokazano da su izuzetno učinkoviti", i to posredstvom „aksiomatskoga i gotovo filozofskog konceptualnog zasnivanja" (Avellone *et al.* 2002: 381). Čini se da je Peanova kritika bila motivirana uvjerenjem da su Veronese i Segre upravo to pokušavali učiniti, osobito Veronese u svojim *Fondamenti di geometria a più dimensioni*.

Iako Veronese nije izravno sudjelovao u sporu između Peana i Segrea u *Rivista di Matematica* (v. i nap. 176), u dodatku *Fondamenti* ipak je moguće pronaći njegov osvrt na tu polemiku, i to u jednoj fusnoti iz odjeljka „Sulle definizioni di spazio e di geometria a n dimensioni e del principio di proiezione e sezione". Govoreći o principu projekcije i presjeka (*principio di proiezione e di sezione*), Veronese ističe da je taj postupak tek u njegovim radovima prvi put sustavno primijenjen te da u njegovu „mogućnost i prednosti više nema nikakve sumnje, kao što nema sumnje ni u njegovu primjenu na uobičajeni [trodimenzionalni] prostor i na ravninu" (1891: 613), dodajući sljedeću opasku:

> „Protiv spomenutoga rada prof. Segrea, objavljenog u *Rivista di Matematica*, čiji je urednik prof. Peano, potonji je smatrao prikladnim započeti polemiku čiji se jedan dio odnosi na hiperprostor u smislu u kojem ga ja shvaćam, a osobito protiv primjene metode projekcije i presjeka, i to ne samo u slučaju [primjene]

[184] Kao što je poznato, deskriptivna odnosno nacrtna geometrija predstavlja skup tehnika i metoda – u osnovi je riječ o geometrijskim konstrukcijama – koje nam omogućuju dobivanje *ravninskih prikaza* ili slika trodimenzionalnih prostornih objekata, odnosno njihovo predstavljanje u dvije dimenzije. Veroneseovim riječima, *la geometria descrittiva ordinaria insegna a rappresentare un corpo a tre dimensioni sopra un piano* (1881/82: 987). Kod centralne projekcije sve točke nekoga zadanog trodimenzionalnog objekta A projiciraju se na ravninu iz jedne centralne točke (takozvanoga *centra projekcije*) C (Veronese, *op. cit.*, Parte I, „Projezione centrale", §1, str. 995).

[185] Srodnim metodama, osobito projekcijama i presjecima, služio se i Segre još u svojoj disertaciji *Studio sulle quadriche* iz 1884. Za dobar pregled različitih pristupa središnjoj projekciji prostora S_4 v. Majcenovu studiju u *Radu JAZU* iz 1906., u kojoj nastoji pojednostaviti Veroneseovu konstrukciju (Majcen 1906: 82ff.). Usp. i Majcen 1910, drugi dio „Temelji matematičkih metoda u istraživanju viših prostora", §3. „Deskriptivna geometrija", str. 280ff.

> hiperprostora na uobičajeni [trodimenzionalni] prostor, nego i uobičajenoga prostora na ravninu. *Gospodin Peano griješi i u pogledu forme i u pogledu sadržaja*; no, premda na njegove prigovore ne bi bilo teško odgovoriti, činjenica da za nedostatak zdravoga razuma (*mancanza di buon senso*) optužuje one geometre koji ne misle poput njega (*loc. cit.*, str. 157), *onemogućuje svaku dostojanstvenu i prijateljsku raspravu*. Uvjeren sam da su pitanja o principima matematike, a osobito geometrije, već sama po sebi dovoljno teška te da nema potrebe zapaljivim i netolerantnim raspravama (*polemiche appassionate e intolleranti*) dodavati nove teškoće druge naravi, kao što sam jednako *uvjeren da odredene kritike već samim načinom na koji su formulirane i iznesene jasno izazivaju i u sebi nose vlastitu osudu* (*portano chiaramente in sé la loro condanna*) *i odbacivanje*." (*op. cit.*, *ad loc.*, nap. 2, moj kurziv)

Pišući ovu napomenu, Veronese najvjerojatnije nije mogao ni zamisliti kako će tek izgledati Peanova izrazito negativna recenzija *Fondamenti*, koja će se pojaviti 1892., premda se to već moglo naslutiti iz Peanova otvorenog pisma Veroneseu, objavljenog u *Rivista* 1.12.1891. U navedenom pismu Peano inzistira da su njegovi prigovori protiv n-dimenzionalne geometrije, budući da na njih ni Segre ni Veronese nisu dali zadovoljavajući odgovor – štoviše, očito uopće nisu ni željeli polemizirati s Peanom o *opravdanosti* metode koja je očigledno davala valjane i zanimljive nove matematičke rezultate – zapravo konkluzivni te da, „ako su istiniti, uništavaju temelje knjige koju je [Veronese] upravo objavio", zbog čega ga poziva da se oglasi i pruži mu „taj ne-težak-odgovor" (*questa non difficile risposta*) (Peano 1891c: 268–69). Veronese se oglasio 13.3.1892. u *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, gdje je iznio niz zapažanja (*osservazioni*) o Peanovu pismu. Kao što je i sâm naglasio, razlozi zbog kojih nije ranije odgovorio na Peanov izazov bili su osobne prirode (*una recente e grave sventura domestica*, usp. Veronese 1892a: 46, nap. 1): naime, u tom su mu razdoblju istoga dana preminula dvoje djece (Bordiga 1931: 73).[186] Veroneseov odgovor Peanu sastojao se u inzistiranju na tome da sâm tekst *Fondamenti*, uzet zajedno s njegovim prethodnim publikacijama, govori sam za sebe te da će svatko tko ih pažljivo čita (*chi legga attentamente*) uvidjeti kako njegova knjiga odgovara na gotovo sve navedene primjedbe (*risponde anzitutto da sé alle suddette osservazioni*). Povrh toga, Veronese je istaknuo i da Peanove rezerve u pogledu čisto geometrijskih postupaka kojima se prenose i izvode relevantna svojstva (*l'uso dei procedimenti geometrici con quali si deducono proprietà*) figura i objekata uobičajene geometrije nižedimenzionalnih prostora (uključujući stereometriju, planimetriju i rektimetriju) iz geometrije S_n ni na koji način ne dovode u pitanje temeljne principe njegove teorije niti proturječe njezinim postulatima (*non combatte i postulati*) (Veronese 1892a: 43). Štoviše,

[186] Veronese se 1885. godine oženio barunicom Beatrice Bartolini i, prema Segreovu svjedočanstvu (1917: 483, nap. 21), imali su petero djece, među kojima i dvojicu sinova koji su sudjelovali u borbama na strani Saveznika tijekom Prvoga svjetskog rata. Cantù (1999: 29) i pojedini drugi izvori spominju čak osmero djece – primjerice Paolo Freguglia, v. njegov popratni tekst uz natuknicu o Veroneseu na Edizione Nazionale *Matematica Italiana*; v. također i biografsku natuknicu o Veroneseu na mrežnim stranicama Odsjeka za matematiku Sveučilišta u Padovi, na poveznici https://mostre.cab.unipd.it/modellimatematici/it/29/giuseppe-veronese). Sigurno je da je troje djece umrlo već u ranoj mladosti (otprilike u razdoblju izlaska *Fondamenti* i tijekom spora s Peanom o geometriji hiperprostora, početkom 1890-ih), dok se u Veroneseovu dosjeu iz Povijesnog arhiva Senata Kraljevine Italije (za razdoblje od 1848. do 1943. godine) među njegovim potomcima spominje samo kći Antonia.

> „u mojoj prvoj studiji o teoriji hiperprostora, objavljenoj u *Mathematische Annalen*, koja predstavlja temelj svih mojih kasnijih radova [u ovom području], nisam govorio ni o kakvim posebnim i dodatnim postulatima, ni za S_4 ni za S_n, nego sam jedino uklonio postulat trodimenzionalnosti." (*op. cit.*, str. 42–43)

U nastavku ćemo vidjeti da je upravo to bio Veroneseov pristup i pri uvođenju i razvijanju nearhimedovske geometrije. Naime, njegova opća ideja vodilja u geometrijskim istraživanjima – za koju možemo reći da je bila i dio „duha vremena", osobito u kontekstu istraživanja neeuklidskih geometrija, u kojima je Veronese također bio međunarodno priznati autoritet[187] – bila je iznimno *moderna*: pretpostavimo da je neki zadani aksiom $\mathfrak{A}$ *nezavisan* od preostalih aksioma i pogledajmo može li se i kako razviti *konzistentan* geometrijski sustav u kojem $\mathfrak{A}$ ne vrijedi. Za detaljniju analizu Veroneseova modernizma v. Odjeljak [2.5].

Osvrćući se izravno na gore navedeno Peanovo stajalište da zamjena aksioma (P16) Veroneseovim aksiomom (V) prouzrokuje da svaki iskaz za koji je, pretpostavljajući (V), dokazano da je istinit u četverodimenzionalnom ili, općenito uzev, n-dimenzionalnom prostoru prestaje vrijediti (*cessa di valere*) u trodimenzionalnom prostoru, Veronese ističe sljedeće:

> „Izraz '[iskaz] prestaje vrijediti' ne bi trebalo tumačiti u smislu 'više nije istinit' ili 'više ne slijedi logički iz postulata uobičajenoga prostora ili ravnine', nego u smislu da 'može prestati biti istinit', premda [taj iskaz] i dalje ostaje kompatibilan s tim postulatima. On [sc. Peano] nije pružio ni jedan jedini primjer nekoga iskaza izvedenoga iz S_4 u S_3, niti iz S_3 u S_2, koji prestaje vrijediti [u prethodno specificiranom smislu] u S_3 ili u S_2, u situaciji u kojoj su **postulati S_3 ili S_2 oni koji su općeprihvaćeni kao njihove definicije** i u skladu s načinom na koji ih uobičajeno sebi predstavljamo (*corrispondentemente alla representazione che abbiamo gia di essi*). Štoviše, i sâm sam predvidio taj prigovor i već sam bio naznačio jedan mogući odgovor u svojoj studiji 'La superficie omaloide ecc.' (*Atti della R. Accademia dei Lincei*, 1884., str. 2)." (*op. cit.*, str. 47, nap. 5, Veroneseov izvorni kurziv; moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Podebljani dio ovdje je osobito zanimljiv utoliko što nam pokazuje da je Veronese, kao i Peano (i njegovi sljedbenici), shvaćao postulate odnosno aksiome kao vid (implicitnih) definicija osnovnih geometrijskih pojmova. Veronese će to ponoviti posve eksplicitno i u *Elementi*: „postulati u pojedinim slučajevima zamjenjuju definicije" (*postulati in alcuni casi tengono luogo delle definizioni*) (1897: 7, nap. 1). Izgleda da već i u *Fondamenti* Veronese pojmove „definicija", „postulat" i „hipoteza" tretira kao sinonimne i, samim tim, uzajamno zamjenjive

[187] O čemu, primjerice, svjedoči obilje referenci na Veroneseove *Grundzüge* (Scheppov njemački prijevod *Fondamenti* iz 1894.) u Russellovoj disertaciji koja je pretočena u njegovu prvu knjigu, *An Essay on the Foundations of Geometry* (Cambridge, 1897), ali i u odrednici „Geometry, Non-Euclidean" koju je Russell napisao za deseto izdanje *Encyclopaedia Britannica* (1902) i u kojoj navodi Veroneseove *Grundzüge* kao „jedno od najvažnijih djela" za proučavanje neeuklidske geometrije. V. također i Russellov neobjavljeni rukopis „Recent Italian Work on the Foundations of Mathematics" iz 1901. godine, dostupan u *Bertrand Russell Archives* (McMaster University) pod signaturom RA 220.010840 (ukupno 28 listova). Govoreći o stanju i stupnju razvoja istraživanja u području geometrije u Italiji, Russell kaže da „kod Talijana pronalazimo jasnoću [pojmovnih] distinkcija, preciznost definicija i rigoroznost u izvođenjima i dokazima kakvi se teško mogu susresti igdje drugdje." (navedeno prema Moore 1993: 361.10–13)

(usp. 1891: ix *et passim*).[188] Tako, primjerice, na str. xvi predgovora kaže da u geometriji shvaćenoj kao apstraktnom deduktivnom sustavu „aksiomi zauzimaju mjesto definicija ili dobro određenih apstraktnih hipoteza“ (*gli assiomi occupino il posto di definizioni ipotesi astratte ben determinate*). Posve u skladu s takvim apstraktnim shvaćanjem geometrije jest i sljedeća Veroneseova opaska upućena Peanu:

> „Za mene geometrija nije ograničena samo na dimenzije fizičkoga prostora, niti pak na neki konačan cijeli broj n dimenzija (*Fondamenti*, str. vi). **Ja oštro razlikujem teorijsku geometriju od njezinih** [**mogućih**] **praktičnih primjena, za koje su neki aksiomi naprosto nužni** (primjerice, aksiom [slobodnog] gibanja[189] ili [aksiom] trodimenzionalnosti fizičkoga prostora), **dok za** [**teorijsku geometriju**] **oni nipošto nisu nužni** (str. ix). Svaki skup točaka za koje, s obzirom na zadane aksiome, možemo pretpostaviti da su upravo onakve kakvima ih sebi predstavljamo u uobičajenom [trodimenzionalnom] prostoru jest opći prostor (*spazio generale*). Taj prostor […] ima aktualno beskonačno mnogo dimenzija. Tako je geometrija znanost o općem prostoru i o figurama koje su u njemu sadržane. […] **Opći prostor je geometrijski moguć** (*geometricamente possibile*) **i stoga posjeduje apstraktnu realnost** (*realtà astratta*). […] **Stoga su geometrijske konstrukcije i hipoteza o četvrtoj dimenziji sasvim različite od metafizičke hipoteze o četverodimenzionalnom prostoru koji aktualno postoji izvan nas** (*effetivamente*

[188] U prethodno navedenom citatu iz „Sui fondamenti della Geometria“ mogli smo vidjeti da i Peano pojmove „hipoteza“ i „postulat“ koristi kao sinonime. Stoga je ironično što Peano u otvorenom pismu iz 1891. optužuje Veronesea za „konfuziju između hipoteza i postulata“ (usp. Peano 1891c: 267), kada će i sâm činiti isto tri godine kasnije, u publikaciji iz 1894. Na mjestu u *Fondamenti* koje Peano kritizira, Veronese naprosto kaže da „nema nikakve supstantivne razlike između apstraktnih hipoteza ili postulata i definicija […] nužnih za razvoj znanosti [sc. geometrije].“ (1891: xxviii)

[189] Riječ je o aksiomu koji je, kao što je općepoznato, operativan već kod Euklida u *Elementima*, gdje se podudarnost geometrijskih figura pretpostavlja na temelju mogućnosti njihova međusobnog poklapanja odnosno superponiranja: καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα (Usp. *Elem.* I, Aksiom 4). Međutim, aksiom slobodnoga gibanja imao je središnju ulogu u raspravama o zasnivanju neeuklidskih geometrija u 19. stoljeću, osobito u von Helmholtzovoj razradi Riemannovih ideja. Smatralo se da se ovim aksiomom isključuje mogućnost takozvane *kinematičke relativnosti oblika* (usp. Arsenijević 2007, §123), odnosno pretpostavljalo se da prostorne figure ostaju *invarijantne* – bez distorzija, dilatacija ili kontrakcija – pri transformacijama, odnosno da zadržavaju oblik prilikom pomicanja u prostoru (ili rotiranja oko bilo koje proizvoljne osi, s tim da se tada u pravilu govori o takozvanom *aksiomu monodromije*). U literaturi je poznat i kao *zakon konzervacije figura*, a matematičari su se na njega najčešće pozivali u kontekstu rasprava o metričkim svojstvima prostora. V. von Helmholtzove klasične radove iz 1868. godine, „Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen“ i „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“, dostupne u *Schriften zur Erkenntnistheorie* (Springer, Berlin, 1921). Usp. također i Torretti 1978, osobito Chs. 2.2.8 i 3.1.1–3.1.7. U dodatku *Fondamenti* i Veronese posvećuje čitav jedan odjeljak („Sul movimento senza deformazione“) raspravi o aksiomu slobodnoga kretanja, dodajući napomenu da smo upravo „posredstvom proučavanja hiperprostorâ (o kojima nemamo nikakvu osjetilnu predodžbu) prepoznali ne samo mogućnost nego i nužnost isključivanja principa kretanja [sc. aksioma slobodnog gibanja] iz osnova teorijske geometrije.“ (Veronese 1891: 616) I ne samo to, on već u predgovoru kritizira ono što je Torretti prikladno nazvao „Helmholtzovom dogmom o potpuno slobodnom kretanju“ (Torretti 1978: 185), ističući da aksiom slobodnoga gibanja „mora biti isključen kao nužan princip iz zasnivanja teorijske geometrije“ (Veronese 1891: xxxvi). Zanimljivo je da su Segre i Enrico d'Ovidio (1842–1933) u prikazu Pierijeva rada „Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo: Monografia del punto e del moto“ (1900) istaknuli da, za razliku od Pierijeva izlaganja elementarne geometrije, u kojem „[slobodno ili nedeformabilno] gibanje igra izuzetno važnu ulogu“ (budući da kod Pierija figurira kao primitivan odnosno osnovni pojam), „ima nekih (posebno Veronese) koji bi ga [sc. kretanje] protjerali iz geometrije.“ (citirano prema Marchisotto & Smith 2007: 145–46)

essistente fuori da noi)." (Veronese 1892a: 43, Veroneseov izvorni kurziv; moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Ono što ovi citati nedvosmisleno pokazuju jest da je Veronese bio ne samo znatno fleksibilniji od Peana u pogledu toga što se dopušteno može smatrati autonomnim geometrijskim istraživanjem ili tehnikom i metodom, nego i znatno liberalniji u pogledu dopuštenih osnovnih pretpostavki (aksioma ili, kako ih Veronese nerijetko naziva, hipoteza) na kojima počiva apstraktno teorijsko odnosno deduktivno razvijanje geometrije. Prethodno je već rečeno da je Peano u „Sui fondamenti della Geometria" zastupao empirističko stajalište u pogledu prirode i podrijetla geometrije, koje je bilo vrlo slično Paschovu, a u kojem se osjetilno, osobito vizualno, iskustvo ispostavlja kao ograničavajući čimbenik za apstraktno i čisto logičko zasnivanje geometrije. Peano je, dakle, smatrao da je nužno da geometrijske hipoteze ili postulati budu sukladni „najjednostavnijim i najelementarnijim opažanjima fizičkih figura" i u toj činjenici treba vidjeti pravi razlog zbog kojega se uopće upustio u polemiku sa Segreom i Veroneseom i zbog kojega je *dogmatski* inzistirao na univerzalnom važenju aksioma (P16) o trodimenzionalnosti. U Odjeljku [3.1] vidjet ćemo da su donekle slični „razlozi" odnosno, bolje rečeno, predrasude sprječavali Cantora da uvidi kako je jednako moguće negirati i Arhimedov aksiom kao, primjerice, i Playfairov aksiom o paralelama. Veronese je u dodatku *Fondamenti* poduzeo detaljnu i opsežnu kritiku Paschova empirizma za koju možemo reći da se, *mutatis mutandis*, odnosi i na Peana. Tako Veronese konstatira da

> „Ono što prije svega odlikuje Paschovu metodu jest to što *on ne priznaje da je geometrija apstraktna znanost čiji su objekti tipovi* (*le cui forme siano tipi*) *koje realni* [*fizički*] *predmeti izvan nas samo aproksimiraju, nego su sami ti* [*fizički*] *objekti za njega stvarni geometrijski entiteti*. […] Geometrijski aksiomi trebaju biti zadani [sc. formulirani] samo za one objekte koji potpadaju unutar ograničenoga opsega naših opažanja (*per gli oggetti stessi del campo limitato delle nostre osservazioni*) i nijedan drugi aksiom niti ijedna druga hipoteza ne može biti zadana za bilo koji drugi objekt izvan toga opsega. […] Dakle, Pasch želi primijeniti diktate čistoga empirizma na geometrijske objekte, ne dokazujući pritom da je metoda koju su slijedili Euklid i drugi geometri nemoguća. […] *Ne možemo odobriti tu metodu i zbog činjenice da, premda* [*Pasch*] *također želi matematičku strogost u dokazima, i to neovisno o* [*osjetilnom*] *opažanju* (*il rigore matematico nelle dimostrazioni indipendentemente dalla osservazione*), *on u svaki aksiom i u svaki dokaz ipak unosi neizvjesnost i nepreciznost samoga* [*osjetilnog*] *opažanja* (*l'incertezza e l'inesattezza dell'osservazione stessa*), *što rezultira time da za mnoge teoreme načelno postoji neizvjesnost u pogledu opsega njihove valjanosti* (*vi è l'incertezza del campo della loro validità*)." (Veronese 1891: 585–86, moj kurziv)

Neovisno o rezervama u pogledu Paschova empirizma, Veronese u nastavku teksta ipak pohvalno govori o Paschovoj aksiomatizaciji projektivne geometrije iz *Vorlesungen* kao o značajnom doprinosu proučavanju principa na kojima počiva geometrija, dodajući međutim da je očito kako je Pasch svojom metodom isključio iz geometrije prostore s više od tri dimenzije, kao uostalom i neke druge aksiome (poput aksioma neprekidnosti) (*op. cit.*, str. 587–88). U narednom odjeljku vidjet ćemo na koji je način Veronese uspio iskombinirati izvjesne (prihvatljive) aspekte empirizma sa shvaćanjem geometrije kao čisto apstraktne i teorijske discipline, prevladavajući ograničenja s kojima su bile suočene i Paschova

aksiomatika i Peanova logistika.[190] Controvim riječima, Veronese je u pogledu zasnivanja geometrije zauzeo „slobodnije i više kritičko stajalište“ (*eine zugleich freiere und kritischere Haltung*) (Contro 1968, Kap. III, §1, ¶3.02, str. 50–51). Povijesno je zanimljivo da nakon Veroneseovih *osservazioni* o sadržaju njegova otvorenog pisma Peano nije bio voljan dalje nastavljati polemiku s Veroneseom.[191] Ali, može se reći da ju je nastavio posredno, i to u tandemu s Cantorom.[192]

[2.4] Veroneseova aristotelovska filozofija geometrije iz *Fondamenti*: od prostorne intuicije k teoriji intuitivnoga kontinuuma

Povijesno promatrano, Aristotelove ili, bolje rečeno, *aristotelovske* ideje o ontološkom statusu geometrijskih objekata i, osobito, o strukturi kontinuiranih veličina te o prirodi

---

[190] U *Fondamenti* Veronese je iznio i nekoliko kritičkih opaski o Peanovoj *simboličkoj logici* (kako je izložena u *Arithmetices principia* i u *Principii di geometria* iz 1889. godine), odnosno o onome što je nazivao *signisticizmom* (*il signicismo*), dodajući da je riječ o stajalištu koje „svoj najviši izraz dobiva u Peanovim radovima“. Veronese nije bio protiv uporabe simboličkoga jezika (posredstvom kojega bi se svi relevantni pojmovi transformirali u sustav znakova, *sistema di segni*) u kombinaciji s „računom deduktivne logike“ (*il calcolo della logica deduttiva*). Štoviše, smatrao je da s teorijske strane proučavanje logike uopće nije upitno (*l'interesse teorico di una tale dottrina nello studio della logica non ci pare si possa contrastare*) i da matematičari trebaju sa zadovoljstvom promatrati i podupirati primjene matematičkih postupaka i tehnika u razvoju same logike, kao što je to, primjerice, činio Frege, čija *pojmovna notacija* ili *pojmopis* (*Begriffsschrift* iz 1879. godine), kao što je poznato, predstavlja formalni jezik izrađen po uzoru na aritmetiku (*eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache*). Međutim, ono čemu se protivio bilo je pretjerano inzistiranje na važnosti logike za samu matematiku i, osobito, za područje osnova matematike, naročito u onoj fazi (povijesnog) razvoja logike u kojoj Veronese piše *Fondamenti*, odnosno početkom 1890-ih. Njegove su se rezerve prije svega ticale nedoumica oko alternativnih načina zasnivanja same deduktivne logike, odnosno specificiranja principa na kojima bi ona trebala počivati, a koji su u toj fazi još uvijek ostavljali otvorenom mogućnost različitih i *uzajamno proturječnih*, odnosno *nekomplementarnih* logičkih računa zasnovanih na različitim početnim principima i operacijama (*non è esclusa la possibilità di diversi calcoli logici secondo i principi e le operazioni da cui si parte*) (usp. Veronese 1891: 605ff.). Veroneseova je poanta, *pace* Peano, da je i posredstvom prirodnoga jezika (*col linguaggio comune*), uz dovoljno pozornosti (*con la debita attenzione*), moguće jasno i precizno izložiti principe i operacije same logike koju je potom moguće iskoristiti za uspostavljanje temeljnih matematičkih pojmova. I ne samo to, „nitko nikada nije pokazao da postoje iskazi u matematici koji se ne mogu egzaktno izraziti prirodnim jezikom […] dok je u najmanju ruku neizvjesno mogu li se sve relacije u matematici izraziti poznatim logičkim znacima.“ (*op. cit.*, str. 606) Kada bi ti nedostaci bili uklonjeni, Veronese bi bio spreman priznati „da deduktivna logika može poslužiti za daljnje i bolje razvijanje i tretiranje pojedinih pitanja u vezi s principima [matematike] od prirodnoga jezika, čak i za uspostavljanje svojevrsnoga službenog jezika za izlaganje matematičkih istraživanja (*stabilire una specie di lingua ufficiale per l'esposizione delle ricerche matematiche*).“ (str. 607) Ali, dok se to ne dogodi, pristup poput Peanova bit će neminovno *più di forma che di sostanza* (str. 606, nap. 2).

[191] V. njegovu „Breve replica al prof. Giuseppe Veronese“ od 23.5.1892. objavljenu u *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, Vol. 6, str. 160.

[192] Čitatelja koji bi se želio detaljnije upoznati s povijesnim razvojem kao i sa specifičnostima različitih metoda za tretiranje geometrije hiperprostora upućujem na izvanredno detaljnu studiju Juraja Majcena „Temelji hipoteza i matematičkih metoda za geometriju prostorâ sa četiri dimensije (*sic.*) i više njih“, za čiji nastanak, tvrdi Majcen, „osobitu zahvalnost dugujem prof. Veroneseu u Padovi koji mi je dao nekoliko razjašnjenja i savjeta.“ (usp. Majcen 1910: 211). V. prvi dio, „Historički postanak i razvoj hipotezâ o prostorima sa više dimensija“, §2. „Pojam dimensije u višim prostorima i metode istraživanja tih prostora uopće“ (str. 223ff.) i, naročito, ¶4. i ¶5., koji su u cijelosti posvećeni Veroneseu, kao i ¶6., u kojem je izvedena komparativna analiza Veroneseova sintetičkog i Plückerova analitičkog pristupa. V. također i drugi dio, „Temelji matematičkih metoda u istraživanju viših prostora“, §2. „Sintetička geometrija“, ¶1. i ¶2. (str. 263ff.), u kojima se Majcen osvrće i na spor Peano–Veronese.

beskonačnosti u matematici bile su dominantne od Aristotelova vremena pa sve do početka 19. stoljeća i niza reformsko-modernizacijskih pomaka, osobito u području matematičke analize. Ti su pomaci 1870-ih rezultirali uspostavljanjem jedne nove i po svojoj biti i intenciji *antiaristotelovske matematičke filozofije* (usp. Odjeljak [1.4]) koja se tijekom razdoblja *fin-de-siècle* pokazala pobjedonosnom u nizu sporova o osnovama matematike (*Grundlagenstreite*), učvrstivši time svoj status nove, dominantne i moderne filozofije matematike u 20. i 21. stoljeću te potisnuvši dvijetisućljetnu aristotelovsku tradiciju kao nestandardnu, kontramodernu i, općenito uzev, prevladanu alternativu (usp. odjeljke [1.1] i [1.3] i Dodatak B).

Različite suvremene verzije aristotelovske filozofije matematike postupno su se počele pojavljivati tek osamdesetih godina 20. stoljeća, od kada je artikuliran niz različitih realističkih, ali ipak *neplatonističkih* pristupa koji se nerijetko zbirno nazivaju *naturalizmom* u filozofiji (ontologiji, epistemologiji i metodologiji) i osnovama matematike (usp. Franklin 2022).[193] Zanimljivo je da je otprilike u istom razdoblju nastupio i porast zanimanja za Aristotelove ideje u metafizici, premda je prava „renesansa aristotelovske metafizike" (usp. Tahko 2012: xi) novijega datuma, otprilike s početka 21. stoljeća. I ne samo to, tijekom posljednjih nekoliko godina pojedini suvremeni metafizičari-aristotelovci počeli su se baviti i filozofskim aspektima posebnih znanosti, prije svega filozofijom fizike i filozofijom kognitivnih i bioznanosti, što je 2018. godine rezultiralo reprezentativnim zbornikom *Neo-Aristotelian Perspectives on Contemporary Science* (prir. W. M. R. Simpson *et al.*). Doduše, iako svoje stajalište nije eksplicitno okarakterizirao kao aristotelovsko, Jeremy Butterfield je prije autora priloga u zborniku Simpson *et al.* u nizu radova početkom 2000-ih, od kojih je najvažnije istaknuti dvije studije programskoga karaktera, „Against *Pointillisme* about Geometry" (Butterfield 2005) i prateću „Against *Pointillisme* about Mechanics" (Butterfield 2006), artikulirao osnovne crte širega projekta koji je nedvojbeno srodan aristotelovskom pothvatu, a koji se tiče *opovrgavanja kantorovskoga poentilizma*, kako u matematici (geometriji), tako i u klasičnoj, relativističkoj i kvantnoj mehanici. Butterfieldova kritika poentilizma svodi se na odbacivanje (i) ideje da su fundamentalni entiteti neke dane ontologije ili fundamentalne veličine neke dane fizikalne teorije određeni ili definirani posredstvom točaka prostora ili prostor–vremena i (ii) ideje da su svojstva prostornih ili prostor-vremenskih regija ili područja i njihov materijalni sadržaj određeni točkastim odnosno „točku-po-točku činjenicama" (eng. *point-by-point facts*, usp. Butterfield 2005: 181).[194]

Nova, neoaristotelovska metafizika, sasvim nalik neoaristotelovskoj filozofiji matematike, također je (umjereno) naturalizirana i *ab initio* koncipirana kao komplementarna

[193] Svakako treba biti oprezan u vezi s nomenklaturom budući da naturalizam, posve nalik alternativnim pozicijama poput realizma, ima različite i nerijetko međusobno suprotstavljene varijante, zbog čega „naturalizam" s pravom možemo smatrati neodređenim i u biti spornim pojmom (u smislu Gallie 1955/56) koji se opire jednoznačnim i nedvosmislenim određenjima (usp. Brown 2012: 30ff), zbog čega ga je bolje promatrati kao krovni pojam ili pak kao *obitelj* (u smislu Wittgensteinovih *Familienähnlichkeiten* iz *PI*, §§ 66–71) manje-više srodnih koncepcija.

[194] S obzirom na to da se ovdje ponajprije bavimo nearhimedovskom matematikom, zanimljivo je da Butterfield u radu iz 2005. godine pokazuje kako eventualni pokušaj poentilista da se obrane pozivanjem na Robinsonovu nestandardnu analizu, čak i kada bi bio moguć, „ne bi bio ni plauzibilan ni zadovoljavajući".

prirodnim i egzaktnim znanostima, osobito fizici (usp. Morganti & Tahko 2017). Promatrano donekle pojednostavljeno, ali za naše potrebe ipak dovoljno precizno, moglo bi se reći da je jedan od ishoda debate koju su u razdoblju između 1948. i 1960. godine vodili Rudolf Carnap (1891–1970) i Willard Van Orman Quine (1908–2000) bila snažna tendencija prema naturalizaciji filozofije, a krilatica odnosno ideja vodilja toga trenda postalo je Quineovo stajalište da „filozofiju u bitnim točkama njezine svrhe i metode ne bi trebalo razlikovati od [...] znanosti" (Quine 2013: xi, 3). Iz povijesne je perspektive zanimljivo primijetiti da se rana analitička filozofija 20. stoljeća ugledala prije svega na *fin-de-siècle* matematiku i njoj pripadajuću matematičku filozofiju (usp. Odjeljak [1.4]), a da je postquineovska analitička filozofija u drugoj polovici 20. stoljeća mnogo više nalikovala Carnapovoj *Wissenschaftslogik* usmjerenoj prije svega na fiziku, ali ne i na „anti-metafizičko istraživanje činjenica" (*antimetaphysischen Tatsachenforschung*), koje su kao središnje obilježje svoga znanstvenog pogleda na svijet još 1929. istaknuli Neurath, Hahn i Carnap u manifestu Bečkoga kruga. Naime, drugi važan ishod debate između Quinea i Carnapa bila je rehabilitacija metafizike u okvirima suvremene analitičke filozofije, s tim da bi se moglo reći kako je značaj metafizičkih problema do pojave neoaristotelovaca bio donekle minimaliziran svođenjem ontoloških pitanja (o tome čega ima odnosno što postoji) na pitanja kvantifikacije, u skladu s Quineovom poznatom devizom „biti znači biti vrijednost [vezane] varijable" (Quine 1948: 32 *et passim*) i s njom povezanim stajalištem da je „postojanje ono što izražava egzistencijalni kvantifikator" (Quine 1969: 97, usp. i Quine 1968). Dakle, postoje svi i samo oni entiteti preko kojih možemo kvantificirati (po modelu $\exists x(x = y)$), a zadaća metafizike svodi se na katalogizaciju odnosno sastavljanje svojevrsnoga *ontološkog inventara* svih onih entiteta koji predstavljaju vrijednosti varijabli kvantifikacije.

S druge strane, aristotelovci nisu usmjereni na pitanje *da li* postoje ovi ili oni entiteti, nego prije svega na netrivijalno pitanje *ontološkoga statusa* već zadanih entiteta, odnosno entiteta za koje se već pretpostavlja da *na neki način* postoje – *kako*, odnosno na koji način ili u kojem smislu oni postoje (usp. Schaffer 2009: 348) i u kakvim se *relacijama ontološke zavisnosti* nalaze. Stoga se oni prirodno zanimaju za različite ontološke gradacije i za hijerarhizaciju entiteta: koji su objekti *supstancijalni* odnosno *ontološki primarni*, koji su pak *ontološki sekundarni* i zavisni u pogledu svojega *metafizičkog utemeljenja* (eng. *ground*) od onih prvih, a osobito to koji su objekti uopće (metafizički) *mogući*. Drugim riječima, aristotelovci promatraju ontologije kao relacijske strukture tipa $\mathcal{O} = \langle F, D, \mathfrak{G} \rangle$, gdje F predstavlja temelj odnosno osnovu ontologije – skup ontološki primarnih, (apsolutno) fundamentalnih entiteta, D skup ontološki sekundarnih odnosno derivativnih entiteta, a $\mathfrak{G}$ relaciju utemeljenja koja povezuje elemente F i D.[195] Gdje se i kako u takvim ontologijama pojavljuju matematički objekti?

Sâm Aristotel svoje je najznačajnije i najkarakterističnije matematičko-filozofske ideje izložio prije svega u *Fizici* i *Metafizici*, ali, nažalost, ne u obliku zaokružene i cjelovite teorije, nego radije posredstvom niza rasutih kritičkih opaski te u polemici s prethodnicima ili u kritičkom otklonu od njih, osobito od Zenona i Platona ili pak platonističke (napose

[195] Suvremena literatura o *metafizičkom fundamentizmu* i relaciji utemeljenja (eng. *grounding*) izuzetno je opsežna. Za nas je trenutačno najvažnije istaknuti da se teoretičari utemeljenja u pravilu deklariraju kao neoaristotelovci. Za više pojedinosti v. Popović 2020.

Speusipove i Ksenokratove[196]) i – imajući u vidu srodnost u pogledu temeljnih principa i stajališta na kojima su počivale – njoj praktički istovjetne neopitagorejske filozofije matematike kakvu, primjerice, susrećemo u sačuvanim spisima Nikomaha iz Gerase (oko 60. – oko 120. godine), naročito u *Uvodu u aritmetiku* (Ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή). Tu filozofiju, međutim, nipošto ne bi trebalo poistovjećivati s učenjem takozvanih ranih Pitagorejaca (οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι), o kojima Aristotel iznosi svega nekoliko lapidarnih, uopćenih i nerijetko kriptičnih napomena, poput znamenitoga i spornoga mjesta *Met.* 985 b 23.[197] Doduše, Aristotel u *Met.* 986 a 12 uzgredno referira i na svoju „prethodnu i iscrpniju raspravu o Pitagorejcima" (διώρισται δὲ περὶ τούτων ἐν ἑτέροις ἡμῖν ἀκριβέστερον), ali, nažalost po povjesničare rane grčke filozofije i matematike, Aristotelov spis *O pitagorejcima* nije sačuvan *in extenso*, nego tek u nekoliko fragmenata.[198] S obzirom na to da bi nas podrobna rekonstrukcija Aristotelove filozofije matematike odvela predaleko od naše glavne teme – aristotelovskih aspekata Veroneseove filozofije geometrije – čitatelja upućujem na Popović 2015, a ovdje ćemo se usredotočiti samo na njezine najrelevantnije sastavnice: (i) *in re realizam* u pogledu egzistencije i ontološkoga statusa geometrijskih objekata zasnovan na svojevrsnoj ekstrapolaciji sa vizualnog modela koji počiva na geometrijskoj intuiciji, (ii) *intervalizam*[199] u pogledu strukture jednodimenzionalnoga linearnog kontinuuma i s njime povezan (iii) *indefinitizam* u pogledu statusa beskonačnosti u matematici. Mogu li se aristotelovski elementi (i)–(iii) pronaći u Veroneseovu matematičkom opusu?

Prije nego što odgovorimo na to pitanje, pogledajmo kako je sâm Aristotel formulirao problem u vezi s ontološkim statusom geometrijskih objekata.[200] U takozvanim matematičkim knjigama *Metafizike*, M i N, on artikulira vlastito *in re* realističko stajalište u kritičkom otklonu od Platonova ekstremnog *ante rem* realizma, i to posredstvom razmatranja

---

196 U tom je kontekstu osobito informativan pseudoaristotelovski, ali sasvim sigurno peripatetički spis *O nedjeljivim linijama* (Περὶ ἀτόμων γραμμῶν), koji sadrži razornu kritiku *geometrijskoga atomizma* koji je, prema dostupnom doksografskom svjedočanstvu, zasigurno bio proučavan pa čak i eksplicitno zastupan u Akademiji. Naime, Aleksandar Polihistor u komentaru jednoga mjesta iz Aristotelove *Metafizike* (992 a 20), gdje se kaže da je Platon često govorio o nedjeljivim linijama (τοῦτο δὲ πολλάκις ἐτίθει, τὰς ἀτόμους γραμμάς), precizira da je Platon *samo istraživao*, dok je Ksenokrat *smatrao* da nedjeljive linije postoje (ἱστορεῖ ὡς καὶ Πλάτωνος, οὐ μόνον Ξενοκράτους ἀτόμους γραμμὰς τιθεμένου). Za jednu moguću rekonstrukciju toga platonističkog učenja v. Popović 2015, §2.2.

197 Dosad najbolja rekonstrukcija rane pitagorejske aritmetike sadržana je u Lučić 2025.

198 Kasnija svjedočanstva poput, primjerice, DL 5.1.22ff. uz Περὶ τῶν Πυθαγορείων navode i druge Aristotelove spise posvećene Pitagorejcima, poput polemičkog spisa Πρὸς τοὺς Πυθαγορείους.

199 Aristotelovski shvaćen kontinuum u suvremenoj se anglofonoj literaturi, radi kontrastiranja s kantorovskim punktiformnim (točkastim, eng. *point-based*) kontinuumom, nerijetko naziva još i *region-based* ili *gunky*, a samo stajalište *gunkology*, za razliku od Cantorova *poentilizma* (fr. *pointillisme*). Kao što je poznato, izraz (*atomless*) *gunk* skovao je David Lewis kako bi njime označio individue čiji svaki dio sadrži daljnje prave dijelove (eng. *proper parts*, usp. 1991: 20 *et passim*), a i danas se koristi u tom značenju u raspravama iz suvremene mereologije i mereotopologije. Za *gunkology* v. Arsenijević & Adžić 2014 i Arsenijević, Popović i Vuletić 2019, a za *region-based topology* v. istoimeni rad Roeper 1997, kao i White 1988.

200 Pojedini tumači, poput Wernera Sauera, s čijim se mišljenjem slažem, smatraju čak da su Aristotelova osnovna namjera i glavni cilj u *Metafizici* zapravo provođenje ispitivanja ontološkoga statusa *nematerijalnih entiteta* (usp. *Met.* 1028 b 28–32, 1029 b 3–12 i 1041 a 7–9), poput onih kojima se bavi matematika (v. *Met.* 1026 a 7). Usp. Sauer 2014: 109.

aporije o ontološkoj lokaciji geometrijskih objekata koja se može prikazati u obliku sljedeće dileme:

> Ako matematički objekti postoje (εἴπερ ἔστι τὰ μαθηματικά), onda moraju postojati ili (a) u osjetilno opažljivim [fizičkim] objektima (ἐν τοῖς αἰσθητοῖς εἶναι) ili (b) odvojeno od osjetilno opažljivih [fizičkih] objekata (κεχωρισμένα τῶν αἰσθητῶν). (*Met.* 1076 a 33–35)

Poteškoća nastaje utoliko što Aristotel primjećuje da je jednako nemoguće da matematički objekti postoje u osjetilno opažljivim objektima (1076 a 38) koliko i da postoje odvojeni od njih (1076 b 12). Međutim, to ipak ne znači da uopće ne postoje (ὅλως οὐκ ἔστιν). Kada je riječ o drugom kraku dileme, Aristotel ga odbacuje utoliko što ta alternativa podrazumijeva raskidanje veze između geometrije i fizike, čineći geometrijske objekte *idealnima*, kauzalno inertnima te potpuno neovisnima o fizičkom svijetu dostupnom osjetilnom odnosno vizualno-taktilnom opažanju (ὁρατόν). Povijesno je zanimljivo što Aristotel na ovom mjestu zapravo prepoznaje jedan od filozofski najzanimljivijih i ujedno najintrigantnijih problema u vezi s matematikom, a to je *primjenjivost matematike* u fizici i, općenito uzev, empirijskim znanostima. Suvremenu verziju toga problema najpregnantnije je formulirao 1960. godine mađarsko-američki fizičar i nobelovac Eugene P. Wigner (1902–1995), zbog čega je i danas najpoznatija pod nazivom *Wignerova zagonetka*:

> „Prvo, nevjerojatno velika korisnost matematike u prirodnim znanostima nešto je na granici misterioznoga za što nemamo racionalno objašnjenje. Drugo, upravo ta uznemirujuća korisnost matematičkih pojmova nameće pitanje jedinstvenosti naših [matematički formuliranih] fizikalnih teorija. […] Teško je oduprijeti se dojmu da smo ovdje suočeni s čudom. […] Čudo prikladnosti jezika matematike za formuliranje zakona fizike predivan je dar koji ne razumijemo niti zaslužujemo.“ (Wigner 1960: 2, 7, 14)

Aristotel je smatrao da matematički platonizam nije u stanju pružiti rješenje Wignerove zagonetke zbog inzistiranja na tome da je geometrija, kako je to formulirao Bošković, *tota imaginaria et idealis* (usp. *Theoria*, §374) i da, slijedom toga, geometrijski objekti na razdjelnici između osjetilima opažljivog fizičkog svijeta (ὁρατόν) i konceptualnoga svijeta o kojemu se može samo misliti (νοητόν) moraju biti eliminirani iz fizičkoga svijeta kao puke „fikcije geometara“ (γεωμετρικῷ δόγματι), na čemu je inzistirao već sâm Platon (usp. *Met.* 992 a 20).[201] Stoga je Aristotelova alternativa i rješenje koje će potom usvojiti mnogi matematičari, od Newtona[202] do Gauβa, Riemanna, Helmholtza i Poincaréa, uključujući, kao

[201] Sekst Empiričar bio je još radikalniji od Platona utoliko što je tvrdio da geometrijske objekte ne samo da nije moguće vidjeti odnosno opažati (αἰσθάνεσθαι), nego ih nije moguće *čak ni zamisliti* (φαντασιοῦν), tako da geometrijski objekti ne postoje ni među osjetilno opažljivim (ἐν τοῖς αἰσθητοῖς) ni među zamislivim objektima (ἐν τοῖς νοητοῖς) – naprosto ne postoje *tout court* (usp. *Adv. Phys.* 390–392). Naime, ako, slijedeći Euklida, želimo tretirati pravac kao „duljinu bez širine“ (DEF. 2 prve knjige *Elemenata*: γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές), nešto takvo niti možemo vidjeti niti zamisliti jer „svaka duljina koju opažamo uvijek ima neku širinu odnosno debljinu (πάχος)“, a „kad bismo neku duljinu potpuno lišili njezine širine, time bismo *eo ipso* uklonili i samu koncepciju duljine.“

[202] Newtonov slavni *dictum* iz predgovora *Principia mathematica* – *fundatur igitur geometria in praxi mechanica* – figurirat će, uz manje ili veće izmjene, kod većine navedenih kasnijih autora.

što ćemo uskoro vidjeti, i samoga Veronesea, počivalo na *naturaliziranju geometrije* i isticanju njezine specifične i bliske veze s fizikom.[203] S filozofskoga je gledišta osobito zanimljivo to što se kod Aristotela veza između geometrije i fizike ostvaruje i na ontološkoj razini, i to posredstvom povezivanja geometrijskih i fizičkih objekata. Naime, opažajni trodimenzionalni fizički objekti ili tijela predstavljaju paradigmatski primjer one vrste entiteta koju Aristotel naziva *supstancijama* (οὐσία) i koji predstavljaju elemente skupa F u $\langle F, D, \mathfrak{G}\rangle$, drugim riječima, ontološki primarne i fundamentalne entitete na kojima počiva čitava ontologija $\mathcal{O}$. Tako Aristotel raspravu u *Met.* M zaključuje sljedećim riječima:

> „Matematički objekti nisu više supstancije od [fizičkih] tijela koja opažamo (οὔτε οὐσίαι μᾶλλον τῶν σωμάτων εἰσὶν) niti su u pogledu postojanja primarniji od njih (οὔτε πρότερα τῷ εἶναι τῶν αἰσθητῶν)“, zbog čega „ne mogu postojati samostalno (οὔτε κεχωρισμένα που εἶναι δυνατόν)“ (*Met.* 1077 b 12–15).

Supstancijalna razlika između matematičkih i fizičkih entiteta objašnjava se time da „fizička tijela doista sadrže plohe, linije i točke (αἱ γὰρ ἐπίπεδα [...] ἔχει τὰ φυσικὰ σώματα καὶ μήκη [sc. γραμμᾶς] καὶ στιγμάς)“ (*Phys.* 239 b 23–25), ali ne kao konstitutivne elemente jer se tijelo (τὸ σῶμα) „ne može sastaviti od linija, ploha i točaka (οὐθὲν γὰρ ἐκ γραμμῶν οὐδ᾽ ἐπιπέδων οὐδὲ στιγμῶν φαίνεται συνίστασθαι δυνάμενον)“ (*Met.* 1077 a 34–35). Razlog zbog kojega Aristotel odbacuje mogućnost da niždimenzionalni geometrijski objekti budu konstitutivni elementi trodimenzionalnih fizičkih objekata proizlazi iz činjenice da usvaja takozvani *Zenonov aksiom* (Ζήνωνος ἀξίωμα, usp. *Met.* 1001 b 7–15), koji se u generaliziranom obliku može formulirati ovako:

(**A**$_{\mathbf{Z}}$) Entiteti viših dimenzija ne mogu se sastojati od entiteta nižih dimenzija.

Zato Aristotel i ne tvrdi da su točke, linije ili plohe doslovno „u“ materijalnim tijelima (ἐν ὕλῃ, usp. *Met.* 1026 a 15–16) kao njihovi sastavni dijelovi, nego samo u specifičnom smislu (ὑλικῶς, 1078 a 31), i to kao njihove *granice ili vanjski oblici* (πέρατα τῶν αὐτῶν τούτων, 1060 b 15–17), a kao što je ispravno primijetio Bošković, koji je i sâm prihvaćao (**A**$_{\mathbf{Z}}$), granica nije dio onoga što ograničava (*distingui debet* [...] *quod est limes, ab eo, cujus est limes*) (usp. *De continuitatis lege*, §8). Dakle, geometrijski objekti shvaćeni kao granice predstavljaju paradigmatski primjer elemenata skupa D u $\langle F, D, \mathfrak{G}\rangle$, to jest ontološki sekundarnih i derivativnih *entia minora* koji, budući uvijek za barem jednu dimenziju niži od fizičkih entiteta koje ograničavaju, ne mogu pretendirati na neovisnu supstancijalnost (usp. Arsenijević 2007, §68 i Casati 2009: 382–383). Samim time što postoje fizički objekti, postoje i geometrijski objekti koji su s njima povezani nekom relacijom ontološke zavisnosti tipa $\mathfrak{G}$, poput utemeljenja ili supervenijencije (usp. Arsenijević 1994).

Veronese će u nizu radova, osobito u *Fondamenti* (usp. *Intr.*, Cap. IV, §1), *Elementi* (usp. *Preliminari*, §1. *Gli enti geometrici*) i u *Appendice agli Elementi* (v. nap. „Idea del punto“, str. 2–3), kao i u *Nozioni elementari di geometria intuitiva* (Cap. I), praktički doslovno i iznova podcrtavati aristotelovsku tezu prema kojoj osnovni geometrijski objekti – točke, linije i

[203] Slično shvaćanje geometrije tijekom 20. stoljeća dijelit će i pojedini članovi Bečkoga i Berlinskoga kruga (osobito Schlick, Carnap i Reichenbach), koji su se bavili problemima filozofije prostora i vremena u kontekstu zasnivanja Einsteinove relativističke fizike. V. §3.3 manifesta Bečkoga kruga.

plohe – predstavljaju granice trodimenzionalnih fizičkih tijela (*les limites des corps*, usp. Veronese 1902: 444)[204], ističući u posve aristotelovskom duhu njihovu uzajamnu zavisnost. Naime, Veronese smatra da čak i same ideje odnosno pojmove osnovnih geometrijskih objekata oblikujemo posredstvom razmatranja izvjesnih materijalnih tijela (*corpi materiali*), te tako u *Elementi* određuje osnovne geometrijske objekte na sljedeći način:

> „*Geometrijsko tijelo* (*il corpo geometrico o solido*) predstavlja sliku materijalnoga tijela (*l'immagine del corpo materiale*) koja se podudara s onim dijelom prostora koji zauzima samo tijelo. […]
>
> *Ploha* predstavlja ono što ograničava neko dano tijelo ili što, općenito uzev, razdvaja dva dijela nekoga tijela. […]
>
> *Linija* predstavlja ono što ograničava neku plohu ili što, općenito uzev, razdvaja dva dijela neke plohe. […]
>
> *Točka* predstavlja ono što ograničava liniju ili što razdvaja dva dijela neke linije. Točke se ne mogu rastavljati na dijelove." (Veronese 1897: 3–4)[205]

Iako, kao što smo već vidjeli, granice nisu dijelovi entiteta koje ograničavaju, one same mogu imati dijelove i, kao što kaže Veronese *ad loc. cit.*, uvijek možemo zamisliti beskonačno mnogo načina na koje se tijela, plohe i linije mogu rastavljati, pri čemu to ne vrijedi za točke koje su neprotežne i utoliko nerastavljive na dijelove (*indecomponibili*; usp. s DEF. 1 iz Euklidovih *Elemenata*: σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν). Premda se može reći da u nekom danom tijelu ima nebrojeno mnogo ploha i, analogno tome, nebrojeno mnogo linija u nekoj danoj plohi i isto toliko točaka u nekoj danoj liniji (usp. *op. cit.*, ¶8), Veronese – kao i Aristotel – zbog prihvaćanja (**A**z) dodaje napomenu da „to nipošto ne znači da je moguće reći da je tijelo *sastavljeno* (*composto*) od ploha, niti ploha od linija, kao ni linija od točaka". Drugim riječima, Zenonov aksiom ne dovodi se u pitanje. Kao što ćemo uskoro vidjeti, na njemu će počivati i Veroneseova aristotelovska teorija intuitivnoga kontinuuma (*il continuo*

---

[204] Pored pojma „granice", Veronese koristi i sinonimne talijanske izraze *spigoli*, *facce*, *confini* i *orli*. V. *Elementi*, §1, ¶5–6, str. 2–3.

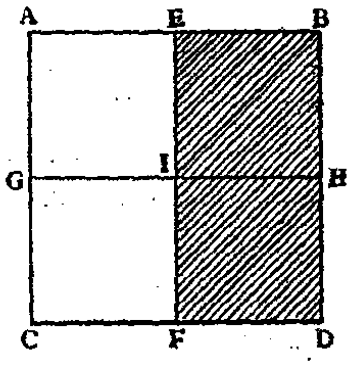
[205] Dodirivanje geometrijskih tijela Veronese definira standardno, preko posjedovanja zajedničkih točaka, linija ili (dijelova) ploha. Zanimljivo je da je i Aristotel ovako shvaćao dodirivanje, s tim da je razlikovao dodirivanja posredstvom kojih se ostvaruje *kontinuitet* (συνεχῶς) od onih kojima se ostvaruje samo *kontigvitet* ili *konglomerat* (ἁπτόμενον) (*Phys.* 227 a 6, 227 a 10ff.). Naime, za geometrijske kocke reći ćemo da se dodiruju kontinualno budući da dijele jedinstvenu zajedničku granicu i takoreći prelaze jedna u drugu jer je kraj jedne početak druge i obratno (za Aristotelovu definiciju neprekidnosti – συνεχῆ ὧν τὰ ἔσχατα ἕν – v. *Phys.* 231 a 21–23ff.). S druge strane, za drvene kocke reći ćemo da se dodiruju samo kontigualno, tvoreći kontingentnu cjelinu koja se akcidentalno drži na okupu. Arsenijevićeva analiza takozvane *aporije dodirivanja* (Arsenijević 1978) pokazala je da su moguća i mješovita, kontinualno-kontigualna dodirivanja, što je posve u skladu s Aristotelovom karakterizacijom geometrove prakse u *Met.* M.3 i *Phys.* II.2. Za dva geometrijski određena dijela jednoga homogenog tijela reći ćemo da se dodiruju samo kontinualno ako granica između ta dva dijela nije ničim fizički aktualizirana. Takav geometrijski objekt koji postoji kao granica između fizički još nerazlučenih, ali fizički razlučivih dijelova *samo je potencijalno* ili *moguće postojeći* (ὂν δυνάμει) u materijalnom, fizičkom svijetu (Arsenijević 1978: 92). Kada se tijelo pak podijeli ili presiječe, pa se tako dobivena dva tijela ponovno prislone jedno uz drugo, granica je aktualizirana (ἐνεργείᾳ), a dodirivanje je kontinualno-kontigualno (*Met.* 1002 a 34–b 4). Osnovna je ideja sljedeća: dijeljenje i slične demarkacijske operacije samo *otkrivaju* geometrijske objekte (εὑρίσκεται δὲ καὶ τὰ διαγράμματα ἐνεργείᾳ· διαιροῦντες γὰρ εὑρίσκουσιν) (1051 a 21ff.), ali *ne kao dijelove* tijela, nego samo kao granice (usp. *Phys.* 226 b 18ff.). Isto tako, možemo reći da geometrijski objekti koji postoje kao granice između fizički već razlučenih, heterogenih dijelova jednoga tijela *postoje aktualno* u fizičkom svijetu, a dodirivanje je kontinualno-kontigualno jer sada raznorodnost materijala dopušta da se govori o kontigvitetu.

intuitivo) iz *Fondamenti*. Prije toga treba istaknuti da Veronese u predgovoru *Fondamenti* iznosi još neka aristotelovska zapažanja u vezi s metodom i prirodom geometrije koja smatra važnima za ispravno razumijevanje svojega pristupa zasnivanju geometrije, iako, strogo uzev, nisu nužna za praćenje čisto matematičkoga dijela Veroneseova izlaganja.

Jedno od tih zapažanja tiče se statusa geometrije kao *eksperimentalne znanosti* (*scienza sperimentale*) budući da se bavi objektima koji aktualno (*effettivamente*) postoje u vanjskom odnosno fizičkom svijetu ili su pak utemeljeni u vanjskim, fizičkim objektima (*oggetti esterni*, usp. Veronese 1891: vii–viii). Veronese suprotstavlja eksperimentalne čisto *formalnim znanostima* (*scienze formali*), čiji su objekti konceptualne naravi i ne zahtijevaju ništa izvanjsko kako bismo ih mogli sebi predočiti i njima manipulirati. Primjeri formalnih znanosti koje Veronese navodi jesu aritmetika i logika, čija istinitost ovisi o *konzistentnosti* i *koherentnosti* među iskazima. S druge strane, u eksperimentalnim znanostima poput geometrije (koju Veronese smatra najegzaktnijom) istinitost ovisi i o izvjesnoj korespondenciji između iskaza i objekata o kojima su ti iskazi formulirani, kao i o „istinama koje *zahvaćamo intuitivnim putem prilikom opažanja* [*realno postojećega*] *objekta* (*che si intuiscono colla percezione di quell'oggetto*)" i koje se nazivaju aksiomima (*op. cit.*, str. viii, moj kurziv). Ovdje možemo vidjeti još jedan *par excellence* aristotelovski uvid. Veronese, naime, smatra da geometrijski aksiomi u osnovi kodificiraju relevantna kvantitativna i strukturna svojstva osnovnih geometrijskih objekata, pri čemu ta svojstva možemo neposredno identificirati pomoću prostorne intuicije (*intuizione spaziale*) odnosno, kao što ćemo ubrzo vidjeti, uobičajene vizualne percepcije (*ibid.*, str. xix; usp. i Franklin 2014: 165–180, Shapiro 1997, Ch. 8). Kao što sam to već istaknuo (u Popović 2017: 99–100), za Veronesea, kao i za suvremene neoaristotelovce, geometrija (i općenito uzev matematika) *naturalizirana* je u smislu da predstavlja znanost *o* fizičkom svijetu, ali i znanost *u* fizičkom svijetu (usp. Franklin 2009: 101). Kako to slikovito kaže Franklin, „aristotelovcu je prirodno da prvo *opazi* matematičku strukturu." (Franklin 2014: 187) Znači li to onda da možemo opažati geometrijske objekte – linije bez ikakve širine ili debljine ili točke bez ikakve veličine i boje?

Da, i to doslovno. Iako suvremenom čitatelju to može djelovati neočekivano, još od Aristotelova vremena niz je matematičara i filozofa smatrao da možemo opažati geometrijske objekte, i to ni u kojem smislu složenije nego što inače opažamo uobičajene fizičke objekte. Koliko mi je poznato, prvi konkretan primjer ove vrste opažanja formulirao je Ruđer Bošković, i sâm aristotelovac, u spisu *De continuitatis lege* (1754), a zatim su ga slijedili devetnaestostoljetni autori poput Franza Brentana (1838–1917) ili C. S. Peircea, koji su bili središnje figure svojevrsnoga ponovnoga zaokreta Aristotelovoj filozofiji u duhu popularne krilatice *ad fontes* u drugoj polovici 19. stoljeća, osobito kada je riječ o metafizici kontinuuma, odnosno o onome što je Peirce u svojim *Cambridge Conferences Lectures* iz 1898. nazvao *synechism* (od grč. συνεχής, neprekidno).[206] U §13. svojega spisa Bošković navodi sljedeću sliku (*Sl. 9*) i kaže:

[206] V. sabrane Brentanove radove o problemu kontinuuma u Körner & Chisholm 1976, osobito Körnerov i Chisholmov uvod (str. viii ff.) te Teil I: *Das Kontinuum*, §§ I–II („Vom Kontinuierlichen" i „Vom Maß des Kontinuierlichen"). V. također i Peirceove *New Elements of Mathematics*, Vol. III/1, osobito Ch. 2, „Multitude and Quantity", odjeljke C i D (Peirce 1976: 82ff.).



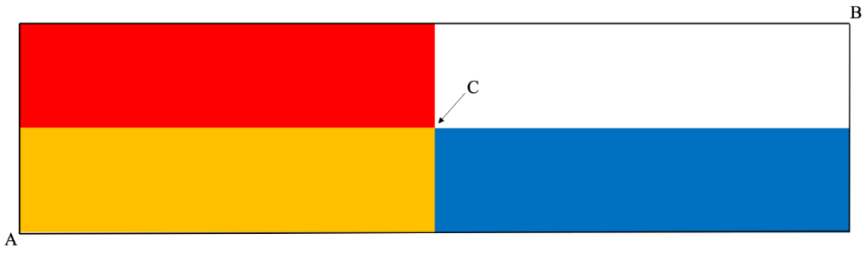
Sl. 9

„Neka slika $ABCD$ bude neprekidna i vješto dorađena te neka se zamisli da je jedna njezina polovica $EFDB$ crne boje, a druga polovica $AEFC$ bijele boje. Samim će se očima doista nametnuti granica EF između bijeloga i crnoga dijela (*limes* EF *inter partem albam & nigram*), za koju će se sasvim pouzdano tvrditi da ima onoliku dužinu kolika je dužina cijele slike, ali da je posve bez širine (*sed latitudine*). Čim, naime, malo skreneš s ove ili s one strane granice, bit ćeš u bijeloj ili u crnoj boji. *Eto predodžbe o liniji koja ima dužinu, a nema širinu* (*en ideam lineae habentis longitu dinem & latitudine carentis).*" (*Bošković* 1754, §13, moj kurziv[207])

Gotovo istovjetan primjer navodi i Veronese u *Fondamenti*, u odjeljku karakterističnoga naslova „Empirijska razmatranja o intuitivnom linearnom kontinuumu" (Intr., Cap. IV, §1, ¶55, str. 45ff.), koji započinje čuvenom rečenicom:

> „Što je to *kontinuum*? Eto riječi čije značenje svi razumijemo bez potrebe za bilo kakvom matematičkom definicijom, zato što **kontinuum *opažamo*** (*intuiamo il continuo, das Continuum anschauen*), i to u njegovu najjednostavnijem, elementarnom obliku, **kao nešto zajedničko mnogim konkretnim stvarima poput [fizičkih] objekata** u prostoru i vremenu […] **pri čemu ne uzimamo u obzir njihova fizička svojstva** (*sue qualità fisiche*) niti njihovu veličinu (u empirijskom smislu)." (Veronese 1891: 45; Veroneseov izvorni kurziv, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Štoviše, moglo bi se reći da je Veronese u izvjesnom smislu i eksplicitniji od Boškovića utoliko što ne govori o „predodžbi o liniji", što bi moglo sugerirati nekakvo naknadno domišljanje; naprotiv, Veronese inzistira na *izravnom viđenju linije* jer, kako to donekle slikovito kaže, „geometrijska intuicija omogućuje nam da *a colpo d'occhio* identificiramo svojstva geometrijskih objekata", dakle jednako jasno i gotovo jednako jednostavno kao što, primjerice, opažamo i identificiramo boje (usp. 1891: xxiii). Neznatno modificirajući Boškovićev i Veroneseov primjer, pogledajmo *Sl. 10*:



Sl. 10. Opažanje geometrijskih objekata (usp. Arsenijević 2007: 84 i Popović 2017: 100)

Očito je da se crna linija koja uokviruje sliku ne može nazvati geometrijskom. Već sama činjenica da je vidimo kao crnu omogućuje nam da ustanovimo kako ima određenu

[207] Usp. i Bošković 1975: 18.

širinu odnosno debljinu, što je u suprotnosti s Euklidovom definicijom linije. Međutim, usmjerimo li pozornost na „lijevu polovinu" pravokutnika na *Sl. 10* i pogled usmjerimo odozdo, od žute prema crvenoj površini, vidimo da se žuta i crvena površina međusobno omeđuju; isto vrijedi i kada pogled pomičemo zdesna nalijevo, od gornje bijele prema donjoj plavoj površini. Nadalje, promatrajući sliku slijeva nadesno, vidimo da se „lijeva" i „desna polovica" pravokutnika također međusobno omeđuju. U sva tri slučaja vidimo *forme uzajamnoga omeđivanja* koji nisu ni crveni, ni žuti, ni plavi, ni bijeli jer, za razliku od vanjskih crnih linija koje uokviruju figuru, nemaju apsolutno nikakvu širinu te su stoga jednodimenzionalni i geometrijski *par excellence*.[208] Na potpuno isti način na koji vidimo linije, na *Sl. 10* vidimo i *graničnu točku* različito obojenih pravokutnika koji se međusobno omeđuju – bezbojan i neprotežan nuladimenzionalni geometrijski entitet, posve u skladu s Euklidovom definicijom točke, a *ne* – na čemu Veronese osobito inzistira – nekakvu perceptivnu, fizičku točku shvaćenu kao *minimum visibile*, koja bi nužno morala biti ekstenzivna i crveno-žuto-plava (Veronese 1891: 47, nap. 1 *contra* Giaquinto 2008: 57–58).[209]

Činjenica je da viđenje linija ili točaka nije moguće na potpuno isti način na koji opažamo boje. Za razliku od dvodimenzionalnih ploha koje naprosto opažamo izravno, viđenje nula- i jednodimenzionalnih geometrijskih objekata složenije je utoliko što zahtijeva opažanje dviju ili više različito obojenih ploha koje se međusobno omeđuju. Ali, to ne znači da su linije i točka koje vidimo na *Sl. 10* naknadno domišljene, i na tome je inzistirao sâm Bošković: *non esse aliquid mente nostra confictum* (*op. cit.*, §16). Stvar je u tome što mi i ne možemo ništa domisliti ako već ne *vidimo* raznobojne plohe *kako se međusobno omeđuju* (usp. Arsenijević 2007, §12). Prema Strollovu mišljenju (Stroll 1988: 4ff.)[210], ono što takozvanu „geometriju

[208] Član Bečkoga kruga Friedrich Waismann (1896–1959) u svojoj je popularnoj studiji posvećenoj pregledu središnjih ideja moderne *fin-de-siècle* matematike, *Einführung in das mathematische Denken. Die Begriffsbildung der modernen Mathematik*, u kontekstu rasprave o krizi intuicije i statusu znamenitih krivulja (*merkwürdige Kurven*, usp. Odjeljak [1.3]) postavio pitanje što su *intuitivne krivulje* (*anschauliche Kurven*) te je predložio – u aristotelovskom duhu – da se one čak *definiraju* kao „granice između različito obojenih ploha" (*die Grenze zwischen zwei Farbflächen*) (Waismann 1936: 128). Ovakav pristup donekle nalikuje onome što je Jean Nicod (1893–1924) pokušao učiniti u svojoj disertaciji (objavljenoj posthumno, s predgovorom B. Russella, kod kojega se Nicod usavršavao u Cambridgeu za vrijeme trajanja Prvoga svjetskog rata), osobito u njezinu prvom dijelu, poznatom kao *thèse principale*, *La géométrie dans le monde sensible*. Naime, Nicod je želio razviti takozvanu osjetilnu geometriju (*la géométrie sensible*) na sljedeći način. Polazeći, sasvim nalik Helmholtzu, od osjetilno opažljivih činjenica o fizičkom svijetu (*die Tatsachen in der Wahrnehmung*, usp. Helmholtz 1878 u Hertz & Schlick 1921/1977) i uzimajući ih kao fiksirani model, nastojao ga je aksiomatski okarakterizirati, odnosno utvrditi na koje se sve načine, odnosno posredstvom kojih se sve formalnih sustava takav model može opisati. Njegov pristup možemo najbolje razumjeti kao obrtanje procedure na koju smo inače navikli u modernoj, posthilbertovskoj teoriji modela: kod Nicoda stvar teče *od modela prema aksiomima, a ne od aksiomatskoga sustava prema eventualnim modelima koji ga realiziraju odnosno instanciraju* – način na koji opažamo geometrijske entitete u fizičkom prostoru određuje koji ćemo aksiom o njima formulirati (usp. Nicod 1924, Ch. II, „Termes et relations sensibles"). Doduše, svakako treba istaknuti da je Nicod u svojoj tezi, slijedeći Russellov *Essay on the Foundations of Geometry* (1891/1897), inzistirao na antikantovskom stajalištu da se geometrija može razviti potpuno neovisno o bilo kakvoj intuiciji (Nicod 1924, Ch. I, „L'ordre géométrique"; za više pojedinosti v. Gandon 2023), s čime je, kao što smo već vidjeli, također bio suglasan i Veronese (usp. Odjeljak [2.3]).

[209] Za više pojedinosti o opažanju geometrijskih objekata v. knjigu *Visual Thinking in Mathematics: An Epistemological Study* (Giaquinto 2007) i, za neoaristotelovsku perspektivu, poglavlja 10 i 11 u Franklin 2014, „Pattern Recognition and Perception of Quantity and Structure" i „Visualization and Understanding".

[210] Iako se nije deklarirao kao aristotelovac, Strollova knjiga *Surfaces* predstavlja izvrstan primjer analize ontološkoga statusa geometrijskih objekata – osobito ploha – u aristotelovskom duhu.

običnoga govora" (*the geometry of ordinary speech*), koja uključuje, između ostaloga, Veroneseove izraze iz nap. 204 *supra*, kao i naš prethodni opis *Sl. 10* posredstvom horizontalnih i vertikalnih „polovica", uopće čini mogućom i opravdanom jest činjenica da postoje granični entiteti poput geometrijskih točaka i linija, shvaćeni kao granice ili rubovi materijalnih objekata u fizičkom svijetu. Naposljetku, može se reći da se Aristotelovo *in re* realističko stajalište o ontološkom statusu geometrijskih objekata može dobiti ekstrapolacijom iz prethodno opisanoga modela vizualnoga opažanja geometrijskih objekata. To naprosto znači da se točke i linije ne samo *ne mogu vidjeti izolirano* odnosno neovisno o (različito obojenim[211]) plohama na *Sl. 10* nego *ne mogu ni postojati izolirano* odnosno odvojeno od ontološki primarnih trodimenzionalnih fizičkih objekata o kojima ontološki ovise i koji ih utemeljuju.

U *Nozioni elementari di geometria intuitiva* Veronese pravi razliku između fizičkih odnosno materijalnih i geometrijskih točaka, linija i ploha (1912: 1–5) te tvrdi, donekle nalik gore citiranom uvodu u Cap. IV iz *Fondamenti*, da do relevantnih geometrijskih svojstava dolazimo *apstrahiranjem* od fizičkih svojstava materijalnih tijela (poput boje). Štoviše, apstrahiranje i u *Fondamenti* figurira kao jedna od fundamentalnih operacija (usp. Intr., Cap. I, „Nozioni e operazioni comuni", §1, 7. DEF. I). To predstavlja još jedan aristotelovski aspekt Veroneseove filozofije geometrije.[212] Naime, i sâm Aristotel smatrao je da su geometrijski objekti proizvodi apstrahiranja, doslovno „stvari o kojima se govori s obzirom na apstrahiranje" (τὰ ἐξ ἀφαιρέσεως λεγόμενα) ili ogoljavanje (περιαιρουμένων) fizičkih objekata (usp. *Met.* 1029 a 11ff.). Jasno je da apstrahiranje, naravno, ne podrazumijeva idealiziranje u smislu platonističkoga osamostaljivanja geometrijskih i drugih matematičkih entiteta. Aristotelovu i Veroneseovu poantu možemo razumjeti na sljedeći način. S obzirom na to da realni fizički objekti predstavljaju hilemorfne sklopove koji su ujedno i *materijalni* i *geometrijski*, aristotelovsko rješenje Wignerove zagonetke i problema primjene geometrije u fizici svodi se na to da se i geometar i fizičar bave fizičkim objektima odnosno materijalnim tijelima, s tim da se geometar ne bavi njihovim materijalnim, nego isključivo kvantitativnim i strukturnim karakteristikama (usp. Arist. *Met.* 1077 b 20–1078 a 8 i Franklin 2009: 101–102). Dakle, kao što se u prethodnoj raspravini geometrijska intuicija nije ispostavila kao nekakva mistična *sui generis* sposobnost[213], nego kao uobičajena vizualna percepcija[214], tako ni ovdje

[211] Jasno je da se „boja" ovdje može shvatiti i shematski, kao *placeholder* ili shema za bilo koje drugo distinktivno svojstvo kojim se uvodi heterogenost i, samim time, omogućuje razlučivanje inače samo potencijalnih dijelova nekoga danog objekta te, slijedom toga, i aktualizacija granice između tih dijelova. Usp. Arsenijević 1989.

[212] Cantù s pravom tvrdi da „konstrukcija geometrijskih pojmova posredstvom apstrahiranja od opažanja izvjesnih materijalnih tijela predstavlja tradicionalnu koncepciju grčke geometrije" te da je Veroneseovo stajalište „analogno stajalištu grčke geometrije" (1999, §4.2).

[213] Kakvom se nerijetko pokazuje u platonističkim odnosno *ante rem* realističkim pokušajima objašnjenja matematičke epistemologije, od Kleina i Gödela do danas. Za više pojedinosti i zanimljivu taksonomiju različitih vrsta intuicije v. Burgess 2014. Burgess (*op. cit.*, §I), primjerice, tumači geometrijsku intuiciju kao vrstu neosjetilne intuicije, dakle ne kao vrstu vizualizacije opisanu u kontekstu *Sl. 9* i *Sl. 10*. Zanimljivo je da je Gödel u jednom pismu Marvinu Greenbergu od 2.10.1973. istaknuo da „geometrijska intuicija, strogo govoreći, nije matematička nego *a priori* fizička intuicija." (citirano prema Burgess 2014: 14)

[214] *Pace* Cantù, koja smatra da geometrijska intuicija za Veronesea nije isto što i vizualna percepcija, usp. Cantù 2009: 133. Naime, Cantù *ad loc.* ističe da je Veroneseovo shvaćanje intuicije najbliže Kleinovu. Klein je smatrao da geometrijska intuicija predstavlja neposredan čin kojim zahvaćamo čiste, idealne objekte, razlikujući pritom *naivnu intuiciju*, koja se svodi na sposobnost pukoga oblikovanja slika i posve je neprecizna (primjerice, Klein

apstrahiranje odnosno Aristotelovo ἀφαιρεῖν ne podrazumijeva ništa mistično – naprosto je riječ o usmjeravanju pozornosti na formalne aspekte materijalnih tijela koji jedini i figuriraju u geometrijskim rasuđivanjima (usp. Arist. *An. Post.* 74 a 33–b1 i White 1993: 176).[215]

Veronese je u izvjesnoj mjeri modificirao ovo gledište u apendiksu *Elementi*, istaknuvši da se „s napretkom geometrije intuitivna predodžba točke [i drugih geometrijskih objekata] sve više usavršava", tako da „prema najmodernijoj koncepciji […] geometrijski objekti više nisu vanjski [sc. fizički] objekti od čijih pojedinih fizičkih svojstava neprekidno apstrahiramo, nego postaju same *slike* (*l'immagini*)" odnosno, kako će to reći u predgovoru *Fondamenti*, „*apstraktni oblici* (*forme astratte*) *kojima u geometriji zamjenjujemo vanjske objekte* koji nam služe za inicijalno specificiranje aksioma." (Veronese 1898a: 2, 1891: vii–viii; moj kurziv) To je Veronesea navelo i da geometriju dodatno i preciznije okarakterizira kao *mješovitu znanost* (*scienza mista*), to jest kao kombiniranu, *eksperimentalno-formalnu znanost* koja počiva na trima vrstama pretpostavki:

(i) **Aksiomi** odnosno *empirijske premise* temelje se na neposrednom intuitivnom sagledavanju odnosno opažanju ili promatranju konkretnih fizičkih objekata.

(ii) **Postulati** odnosno *poluempirijske premise*, iako u osnovi proizlaze iz promatranja konkretnih fizičkih objekata, kao i aksiomi, ipak se proširuju (*si estendono*) i na karakterizaciju onih objekata za koje smatramo da realno postoje i izvan područja entiteta koji su neposredno osjetilno opažljivi.

(iii) **Hipoteze** odnosno *apstraktne premise* koje služe za karakterizaciju entiteta za koje samo zamišljamo da postoje i koji su, stoga, čisto apstraktni (*puramente astratti*) utoliko što nam nije potreban nikakav vanjski objekt kako bismo ih sebi predočili; drugim riječima, nisu nam potrebne nikakve *slike* kako bismo ih matematički okarakterizirali, nego samo odgovarajući *oblik* koji konstruiramo „sredstvima čiste logike" (Veronese 1891: vii–viii, usp. Cantù 1999, §3.1.3).[216]

Geometrija je tako formalna znanost jer su njezini objekti apstraktni (u prethodno obrazloženom smislu apstrahiranja) i jer sadrži apstraktne odnosno pretpostavke čisto

---

kaže da sebi ne možemo predočiti liniju kao „duljinu bez širine", nego samo kao nekakvu traku), od *profinjene intuicije* koja „strogo govoreći i nije nikakva intuicija" jer „proizlazi iz logičkoga razvijanja aksioma koji se smatraju savršeno egzaktnima i preciznima" i koja tako dobivene zaključke čini neverifikabilnima posredstvom intuicije (v. Kleinova *Evanston Colloquium Lectures*, održana sudionicima ICM-a u Chicagu od 28. 8. do 9. 9. 1893., osobito Lecture VI, Klein 1894: 42). Cantù tumači Kleinovu profinjenu intuiciju kao „kombinaciju empirijske intuicije i apstrahiranja", iako ju je sâm Klein *ad loc. cit.* očito smatrao čisto logičkom ili inferencijalnom sposobnošću. Doduše, Veronese na jednom mjestu govori o geometrijskoj intuiciji kao o „proizvodu kombinacije [vizualnog] opažanja i apstrahiranja (*osservazione combinata coll'astrazione*)". Usp. Veronese 1906: 11ff. Ali, s druge strane, Veronese u „Osservazioni sui principii della geometria" eksplicitno govori o geometrijskoj intuiciji kao o običnom, svakodnevnom viđenju i koristi glagol *vedere* (v. primjerice: „gli oggetti rettilinei che noi vediamo nel campo della nostra osservazione", „non potremmo vedere il segmento infinito", itd.) (Veronese 1893/94: 208 *et passim*).

[215] Moguće je govoriti i o definiranju geometrijskih objekata posredstvom apstrahiranja odnosno, preciznije, posredstvom neke verzije neologicističkih principa apstrakcije ili, alternativno, posredstvom Whiteheadove metode „ekstenzivne apstrakcije", koja se svodi na definiranje točaka kao klasa ekvivalencije skupova trodimenzionalnih regija ili oblasti. Više u Shapiro & Hellman 2017 i Shapiro & Hellman 2018, Chs. 2 i 5.

[216] V. Odjeljak [2.7] za još neke specifične, dodatne vrste pretpostavki koje figuriraju u Veroneseovu projektu zasnivanja geometrije te u aksiomatizacijama iz *Fondamenti* i *Elementi*.

logičke naravi; ali ona je istodobno i eksperimentalna znanost jer se svojstva nekih njezinih objekata dobivaju apstrahiranjem od fizičkih svojstava materijalnih objekata i jer su neke njezine pretpostavke čisto empirijskoga karaktera. Geometrija je za Veronesea najegzaktnija od svih eksperimentalnih znanosti utoliko što zamjenjuje vanjske objekte, posredstvom kojih inicijalno formuliramo aksiome, apstraktnim formama tako da se iskazi odnosno teoremi „dokazuju kombinacijom prethodno već ustanovljenih formi (*colla combinazione delle forme già ottenute*) […] posredstvom čisto deduktivne metode (*col metodo deduttivo*)" i potpuno neovisno o bilo kakvoj naknadnoj empirijskoj verifikaciji. „Zbog toga se", dodaje Veronese, „geometrija s pravom smatra dijelom čiste matematike, iako je ona u svojem korijenu eksperimentalna znanost." (*Fondamenti*, *ad loc. cit.*) Sljedeći citat dobro ilustrira Veroneseovu glavnu poantu:

> „Teorijska geometrija se, dakle, razlikuje od ostalih vanjskih eksperimentalnih znanosti po tome što joj je za utvrđivanje aksioma u pravom smislu potrebno opažanje vanjskih [sc. fizičkih] objekata, ali ubrzo postaje potpuno neovisna o vizualizaciji jer ne razmatra sama tijela, nego mjesto (*il luogo*)[217] koje ona zauzimaju u praznom intuitivnom prostoru (*spazio intuitivo vuoto*), pretvarajući se tako *u čisto deduktivnu znanost* (*una scienza puramente deduttiva*). […] U svakom slučaju, u pogledu svojih osnova teorijska geometrija ni na koji način ne zahtijeva pomoć nijedne druge eksperimentalne znanosti, primjerice mehanike ili fizike, dok je, naprotiv, tim znanostima geometrija neophodna." (Veronese 1891: ix, moj kurziv)

Ovakvo, možda idiosinkratično, shvaćanje statusa i prirode geometrije povlači i donekle neobično *dvostruko shvaćanje kriterija istinitosti* geometrijskih stavova odnosno iskaza. Naime, istinitost geometrije kao eksperimentalne znanosti, dakle u pogledu aksioma odnosno empirijskih premisa, ovisi, kao što je prethodno već naznačeno, o izvjesnoj korespondenciji između aksioma i objekata čija su svojstva aksiomatski opisana. S druge strane, istinitost geometrije kao formalne znanosti, dakle u pogledu postulata i hipoteza, regulirana je *principom neproturječnosti*. Ta Veroneseova ideja predstavlja jezgru njegova modernističkog shvaćanja geometrije, koje ćemo podrobnije razmotriti u Odjeljku [2.5].

Do sada smo se uvjerili da je Veronese zastupao niz stajališta o ontologiji i prirodi geometrije koja se nedvojbeno mogu okarakterizirati kao aristotelovska. To predstavlja svojevrstan povijesni kuriozitet utoliko što u Veroneseovim radovima (za razliku od, primjerice, Cantorovih) nije moguće pronaći ni jednu referencu na Aristotela, čak ni u povijesnom pregledu iz apendiksa *Fondamenti*. Kada je riječ o drugim autorima, većina suvremenih tumača nije prepoznala aristotelovske aspekte Veroneseove filozofije geometrije. Međutim, uspio sam utvrditi da je Weierstraßov i Kummerov učenik, Maximilian (Max) Simon (1844–1918), još na ICM-u u Rimu 1908. godine u predavanju naslovljenom „Historische Bemerkungen über das Continuum, den Punkt und die gerade Linie" eksplicitno povezao Veroneseovu teoriju s Aristotelom, smatrajući tu vezu, kao i ja, očitom (usp. Simon 1909: 387). Iako Veronese nije referirao na Aristotelove spise, na jednom mjestu u predgovoru *Fondamenti*, govoreći o različitim metodama kojima se može pristupiti proučavanju geometrije i, osobito, onoga njezina dijela koji je iz perspektive osnova sâm

[217] V. Dodatak C o Leibnizovoj situacijskoj analizi.

Veronese smatrao najvažnijim i koji je u jednom od svojih kasnijih spisa nazvao *rektimetrijom* (*la rectimétrie*), odnosno (aksiomatskom) teorijom jednodimenzionalnoga linearnog kontinuuma, Veronese će reći da slijedi *grčku metodu* (*il metodo greco*) budući da upravo ta metoda najbolje odgovara prirodi problema (*corrisponde meglio alla natura del problema*) kojim se bavi, naime problemom utvrđivanja odnosno zahvaćanja intuitivne ili predmatematičke koncepcije strukture onoga što Veronese smatra „fundamentalnom formom" kontinuuma – jednodimenzionalnom linijom euklidske geometrije (usp. Veronese 1891: xxii, v. i str. 603; 1898b: 83; usp. White 1988: 1–3 i Roeper 1997: 251). I u tom pogledu, dakle kada je riječ o strukturi kontinuuma, Veronese je zauzeo aristotelovsko stajalište. S time je suglasan i Laugwitz: „u svojoj koncepciji kontinuuma Veronese pripada tradiciji koja seže do Aristotela" i koja tretira „intuitivni kontinuum kao *locus punctorum*, odnosno geometrijsko mjesto potencijalnih krajnjih točaka segmenata odnosno dužina." (Laugwitz 2002: 103, 118)[218]

Glavna motivacija za aristotelovsku koncepciju linearnoga kontinuuma počiva na uvidu da je izrazito „kontraintuitivno tretirati kontinuum posredstvom diskretnoga pojma kakav je 'točka'." (van Benthem 1991, §I.1.1) I doista, čak i kada je riječ o matematičarima druge polovice 19. stoljeća, Russell i Hobson su, primjerice, smatrali da je upravo problematika koja se tiče neprekidnosti i, općenito uzev, strukture kontinuuma „jedan od bastiona škole koju možemo nazvati intuicionističkom" (Russell 1903, §149), misleći, naravno, ne (samo) na Brouwera ili Weyla nego, prije svega, na Veronesea (usp. Hobson 1921, §45):

> „Sporna ideja da ovdje izložena [Cantorova] teorija [kontinuuma] podrazumijeva da se kontinuum mora smatrati sastavljenim od točaka – elemenata koji ne posjeduju veličinu – često je predstavljala glavnu prepreku prihvaćanju [Cantorova] shvaćanja neprekidnosti. Smatralo se da, ako prostor [i druge kontinuirane veličine] treba promatrati kao sastavljene od elemenata, ti elementi moraju i sami imati prostornu prirodu [sc. biti trodimenzionalni]. […] *Najmoderniju i najpotpuniju teoriju ove vrste razvio je Veronese*." (*op. cit.*, str. 56, moj kurziv)

Osnovna aristotelovska ideja u ovom kontekstu, dakle, tiče se usvajanja Zenonova aksioma ($\mathbf{A_Z}$) kao svojevrsnoga kriterija *dimenzijske homogenosti* koji mogući konstitutivni elementi kontinuuma moraju zadovoljiti: n-dimenzionalne neprekidne strukture mogu se izgraditi samo od n-dimenzionalnih elemenata. Dakle, unatoč tome što čak možemo vidjeti točku na pravcu (*sull'ogetto rettilineo*), onako kako smo to objasnili na primjeru *Sl. 9* i *Sl. 10*, Veronese smatra da, strogo govoreći, *točka na pravcu* nije *točka pravca*,[219] „iako možemo priznati da u nekom smislu pripada kontinuumu" (Veronese 1891: 46). Drugim riječima, iako točke posvudno *prekrivaju* kontinuum, one ipak ne predstavljaju niti uopće mogu biti konstitutivni dijelovi jednodimenzionalnoga linearnog kontinuuma: „sve točke koje možemo zamisliti na

[218] Bell (2019: 157) samo neodređeno i usputno konstatira „Veronese, nadovezujući se na Aristotela…" (engl. *Veronese, echoing Aristotle*), ne eksplicirajući pritom o kakvoj je vrsti srodnosti ovdje zapravo riječ.

[219] Da je ta suptilna distinkcija prisutna već i u samoj Aristotelovoj izvornoj teoriji, pokazao je G. E. L. Owen (v. Owen 1957, osobito str. 218ff.), a možemo je pronaći i kod neoaristotelovaca koji su se bavili problemom kontinuuma, usp. Arsenijević 2007 i Roeper 2006.

kontinuumu, ma koliko ih bilo, uzevši zajedno ne konstituiraju kontinuum (*non costituiscono uniti insieme il continuo*)" (*op. cit.*, str. 47). Veroneseova je poanta da točke figuriraju samo kao *znakovi* (*segni*)[220] ili markeri na liniji kojima se samo obilježavaju *krajevi* (*estremi*) ili pak mjesta nadovezivanja i razgraničavanja odnosno razdvajanja (*posti di unione o di separazione*) *dužina* odnosno segmenata (intervala), koji zapravo predstavljaju konstitutivne elemente kontinuuma i koji su i sami također uvijek neprekidni (*parti sempre continui*). Tako Veronese u *Fondamenti*, u posve aristotelovskom duhu, kaže sljedeće: „znak razdvajanja ili spajanja [dijelova kontinuuma], iako pripada kontinuumu, nije njegov pravi dio." (1891: 46) Veronese će inzistirati i na klasičnoj Aristotelovoj ideji o *bešavnosti kontinuuma* (engl. *seamlessness* ili *viscousness* u Hellman & Shapiro 2013, §1), prema kojoj je kontinuum – shvaćen kao *compositum ideale*[221] – jedinstvena cjelina koja je ontološki primarna u odnosu na svoje samo *potencijalne* ili *moguće dijelove* koje otkrivamo odnosno individuiramo (aktualiziramo) dijeljenjem, što je, kao što smo prethodno vidjeli (usp. nap. 205 *supra*), smatrao i Aristotel. O tome svjedoči i činjenica da Veronese u *Fondamenti* govori o kontinuumu kao o *unità rettilinea*, doslovno „linearnom jedinstvu". Dakle, kontinuum nije *aktualno podijeljen* na dva ili više disjunktnih pravih dijelova, nego je *potencijalno djeljiv* na neodređeno mnogo dijelova koji su i sami neprekidni i uvijek dalje djeljivi. Zaključimo još jednim aristotelovskim odlomkom:

> „Intuitivni linearni kontinuum potpuno je neovisan o sustavu točaka koje možemo zamisliti na njemu. Sustav točaka, promatran kao [skup] znakova razdvajanja dvaju uzastopnih dijelova linije ili pak kao [skup] krajeva (*estremi*) tih dijelova, nikada nam ne može dati cjelokupan intuitivni kontinuum u apsolutnom smislu (*non può mai dare in senso assoluto tutto il continuo intuitivo*) jer točke nemaju dijelove [sc. veličinu i dimenziju]. […] *Linearni kontinuum, dakle, nikada nije sastavljen od svojih točaka, nego od dužina* (*tratti*) *koje ih povezuju dvije po dvije i koje su i same također uvijek kontinuirane*." (Veronese 1891: 48, nap. 1, moj kurziv)

Time je rekonstrukcija posljednjega aspekta Veroneseove nepogrešivo aristotelovske filozofije geometrije završena. Jedna uzgredna opaska Paole Cantù (1999, §4.2) zavrjeđuje da bude spomenuta. Naime, ona je *ad loc.* primijetila da bi „Veroneseovo stajalište, posve nalik stajalištu grčke geometrije", moglo „djelovati ne osobito originalno". I doista, na prvi pogled to je točno. Da se Veronese zadržao samo na tim filozofskim aspektima geometrije, njegova teorija ne bi bila osobito zanimljiva niti vrijedna pozornosti povjesničara, pa čak ni filozofa matematike. Štoviše, zbog specifičnoga sadržaja svoje filozofije geometrije, Veronese bi se prema Mehrtensovoj klasifikaciji mogao svrstati među *kontramoderniste* (*die Gegenmoderne*), odnosno reakcionarne figure procesa modernističke transformacije matematike u razdoblju *fin-de-siècle*. Ali, kao što ću ubrzo pokazati u Odjeljku [2.5], Veronese se po mnogočemu može smatrati prethodnikom i anticipatorom Davida Hilberta, kojega je Mehrtens smatrao, kako

[220] Usp. s Bolzanovim ranim shvaćanjem točaka iz Odjeljka [2.4.1] *infra*.

[221] Da je uistinu opravdano iskoristiti ovaj Kantov izraz kako bismo opisali Veroneseov i, uostalom, Aristotelov kontinuum proizlazi iz činjenice da su obojica smatrali kontinuum nekom vrstom *idealne cjeline* čiji su dijelovi samo potencijalni (za razliku od *composita realia*, stvarnih cjelina koje su sastavljene od aktualnih, već individuiranih dijelova). Tako Veronese na jednom mjestu eksplicitno kaže da se intuitivni linearni kontinuum dijeli na svoje „moguće elemente" (*il continuo rettilineo, intuitivamente considerato, è diviso nei suoi possibili elementi*). Usp. Veronese 1909: 199ff.

je to duhovito istaknuo Jeremy Gray, „generalnim direktorom i rukovoditeljem projekta modernizacije“ (Gray 2008: 10). Prije analize hilbertovskih aspekata Veroneseova pristupa zasnivanju geometrije i evaluacije njegovih doprinosa matematičkom modernizmu, radi lakšega razumijevanja sukoba između Veronesea i Cantora (v. odjeljke [3.1] i [3.1.1]), u nastavku ću ukratko predstaviti osnovne matematičko-filozofske ideje na kojima počiva Cantorova antiaristotelovska teorija kontinuuma.

[2.4.1] Cantorova poentilistička koncepcija kontinuuma

Russell je u *Principima matematike* primijetio da su „do Cantorova revolucionarnog otkrića […] filozofi u pravilu shvaćali pojam kontinuiteta kao nešto što se ne može analizirati“, te da su stoga „diskretno i kontinuirano šutjeli o tome što su uopće podrazumijevali pod kontinuitetom i diskretnošću“ (Russell 1903, §271). Ta Russellova opaska nedvojbeno se odnosi i na aristotelovsku koncepciju kontinuuma koju je, kao što smo prethodno vidjeli, usvojio i Veronese, a čiji je jedan od glavnih uvida da kontinuum predstavlja *compositum ideale*, odnosno u biti jedinstven entitet o čijoj se strukturi jedino može govoriti iz perspektive *modalne analize* (a ne faktičke), odnosno u terminima njegovih samo potencijalnih ili mogućih dijelova i relacija u kojima bi se ti dijelovi mogli nalaziti.[222] Povrh toga, vidjeli smo da je ključna odlika aristotelovskoga pristupa usvajanje Zenonova aksioma ($\mathbf{A_Z}$), odnosno odbacivanje mogućnosti da se neprekidne n-dimenzionalne strukture izgrade od točaka koje nemaju nikakvu dimenziju niti veličinu. Cantorova revolucija o kojoj govori Russell ogleda se u činjenici da je Cantor, nasuprot Aristotelu i devetnaestostoljetnim aristotelovcima, pa samim time i Veroneseu, prilikom formuliranja vlastite poentilističke teorije kontinuuma eksplicitno odbacio ($\mathbf{A_Z}$) i, posredstvom skupovnoteorijske analize kontinuuma ne *qua compositum ideale* nego, sasvim suprotno, *qua compositum reale*, pokazao na koji je način moguće izgraditi kontinuum polazeći od *aktualno* i *neprebrojivo mnogo*, to jest prema Cantorovoj hipotezi kontinuuma, 2^{ω_0} *izoliranih točaka*. Cantor je bio svjestan Zenonova prigovora da se pukim konkateniranjem nuladimenzionalnih, neekstenzivnih točaka, dakle točku po točku, ne može izgraditi linija jer čak i kada bismo ih „nanizali“ beskonačno mnogo, i dalje bi vrijedio zenonovski zaključak τὸ προσγινόμενον οὐδὲν ἐστιν – ništa ne bi bilo dodano jer je ono što je dodano ništa (DK 29 **B** 2).[223] A kako je Cantoru bilo izrazito stalo da izbjegne proturječja zenonovskoga tipa prilikom formuliranja vlastite teorije kontinuuma, tom je pothvatu pristupio sustavno, kako s filozofske, tako i s čisto matematičke strane. Tako u pismu Tanneryju od 5.10.1888. Cantor o svojem pristupu kaže sljedeće:

[222] Keren Wilson nedavno je pružila srodnu analizu, govoreći o nužnosti da se relacija „biti dio“ kod Aristotela shvati modalno (*modal kind of parthood*, Wilson Shatalov 2020: 38ff.). Pored relacije „biti dio“, u slučaju jednodimenzionalnoga linearnog kontinuuma možemo govoriti i o jednakosti (podudarnosti) intervala ili dužina, kao i o relacijama uzajamnoga slijeđenja ili prethođenja, (neposrednoga) nadovezivanja, preklapanja te uzajamne uključenosti jednih dužina u druge. Usp. Arsenijević 2003a: 43ff.

[223] Jasno je da već standardni uvjet gustoće, kojim se tvrdi da se između ma koje dvije točke na pravcu uvijek može naći neka treća točka, onemogućuje sukcesivno nizanje točaka bez razmaka.

„S pravom ističete da ja, u izvjesnom smislu, obnavljam pitagorejsku koncepciju utoliko što *zastupam tezu o stvarnoj kompoziciji geometrijskoga kontinuuma od izoliranih točaka* (*eine reale Zusammensetzung des geometrischen Continuums aus getrennten Punkten*). […] Ali, dok Pitagorejci kontinuum shvaćaju kao prost zbroj točaka (*als eine Summe von Punkten*), protiv čega su Zenonovi dokazi iz Eleje potpuno valjani, za mene je to [sc. kontinuum] skup točaka određene, sasvim precizno određene prirode (*eine Punktmenge, ensemble de points, von bestimmter, genau angegebener Beschaffenheit*). *Moja koncepcija geometrijskoga kontinuuma stoga je ona koja skladno kombinira prednosti Aristotelova pristupa s onim što vrijedi za pitagorejsku metodu objašnjenja*, tako da nijedan Zenon neće uspjeti pronaći bilo kakva proturječja u mojoj pomno promišljenoj koncepciji kontinuuma (*in meinem wohlerwogenen Continuumsbegriffe*)." (citirano prema standardnom izdanju Cantorove sabrane korespondencije, Meschkowski & Nilson 1991, № 126; moj kurziv)[224]

Povijesno-filozofski promatrano, ovaj je izvadak višestruko zanimljiv, osobito Cantorove reference na antičku filozofiju, Pitagorejce, Zenona i Aristotela. Naime, geneza Cantorove teorije kontinuuma u literaturi se tipično tumači u terminima odbacivanja središnjih elemenata aristotelovske filozofije geometrije – osobito intervalizma u pogledu strukture kontinuuma i indefinitizma u pogledu statusa beskonačnosti u matematici – koje je pak, kao što smo vidjeli u Odjeljku [2.4], usvojio i zastupao Veronese. Također, mahom slijedeći Russella, povjesničari tipično ističu da je upravo Cantor bio *prvi* u povijesti matematike i filozofije koji je načinio definitivan raskid s Aristotelom, makar kada je riječ o negiranju Zenonova aksioma. Međutim, u Popović 2017 (v. nap. 9 na str. 88) ukazao sam na to da je sâm Cantor u *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* iz 1883. istaknuo kako je zapravo Bolzano već 1851. u *Paradoxien des Unendlichen* zastupao poentilističku tezu u vezi s pitanjem o strukturi kontinuuma:

„Prava [sc. aktualna] beskonačnost (*das Eigentlich-Unendliche*) kakvu susrećemo, primjerice, u slučaju dobro definiranih skupova točaka (*wohldefinierten Punktmengen*) ili pak [u slučaju] tijela sastavljenih od točkastih atoma (*in der Constitution der Körper aus punktuellen Atomen*) […] pronašla je svojega najodlučnijeg zastupnika i branitelja u jednom od najoštroumnijih filozofa i matematičara ovoga stoljeća, Bernhardu Bolzanu, koji je razvio svoja stajališta relevantna za ovu temu u lijepom i sadržajnom spisu *Paradoxien des Unendlichen*." (v. Cantor 1883, §7)[225]

Treba imati na umu da ni sâm Bolzano nije oduvijek bio proto-cantorovac. U svom prvom radu „Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie" iz 1804. godine, dakle u fazi u kojoj se još uvijek bavio problemima zasnivanja geometrije i prije zaokreta prema matematičkoj analizi koji najbolje oslikava njegov spis *Rein analytischer Beweis* iz 1817., Bolzano je smatrao da je „neupitno da u geometriji točka predstavlja samo obični znak (*eines bloßen Merkmals*) koji nije dio prostora (*kein Theil des Raumes ist*)" (navedeno prema

[224] V. i klasični rad „Le concept scientifique du continu: Zénon d'Élée et Georg Cantor" (Tannery 1885).

[225] Tvorac takozvane alternativne teorije skupova (AST) Petr Vopěnka (1925–2015) kasnije će tvrditi da je utjecaj Bolzanovih *Paradoxien* bio presudan za razvoj Cantorove teorije skupova: „[R]adikalnu promjenu u Cantorovu shvaćanju ordinalnih brojeva izazvao je sljedeći događaj. Negdje krajem rujna 1882. godine Cantor je u jednoj knjižari otkrio Bolzanovu više od trideset godina staru knjigu *Paradoxien des Unendlichen*." (Vopěnka 2023, §1.4.2)

Bolzano 2004: 69), sasvim u skladu s (**Az**), kao i s prethodnom Veroneseovom karakterizacijom točaka kao znakova (*segni*). U *Paradoxien* je očito napustio svoje prvobitno aristotelovsko stajalište:

> „[B]roj prostih dijelova odnosno točaka od kojih se prostor sastoji *beskonačan* je. [...] Nema potrebe da opravdavam ovo stajalište budući da nema matematičara koji se s njim ne bi složio (*sic!*). [...] *Nužno je inzistirati na činjenici da se naposljetku nijedan kontinuum ne može izgraditi ni od čega drugoga osim od točaka i samo od točaka.*" (*Paradoxien*, §§17, 38; citirano prema Bolzano 2004: 612, 644; moj kurziv)

Također je malo poznato da je i sâm Cantor u pojedinim fazama svoje karijere gajio izvjesne simpatije prema aristotelovskom stajalištu (na što upućuje i prethodno citirani izvadak iz pisma Tanneryju) te je, štoviše, nastojao prikazati vlastiti pothvat kao nadovezivanje na Aristotelove izvorne uvide i kao njihovo poopćavanje. Tako u pismu Gutberletu od 1.5.1888. Cantor kaže da njegova teorija kontinuuma ni u kojem smislu nije „u stvarnoj ili ozbiljnoj suprotnosti s aristotelovsko-tomističkom koncepcijom kontinuuma jer u biti predstavlja samo njezinu bitno usavršeniju, produbljenu i upotpunjenu verziju", a u pismu Peanu od 21.9.1895. naglašava da je njegovo stajalište „u biti shvaćanje antičke geometrije Aristotela i Euklida, osim što je, po mojem mišljenju, mnogo oštrije, jasnije i općenitije razvijeno" (sve citirano prema Meschkowski & Nilson 1991, № 123 i № 146). Štoviše, u jednom pismu Mittag-Leffleru iz 1884. Cantor je čak rekao da smatra Aristotela „najvećim misliocem i znanstvenikom koji je ikada živio" (Meschkowski & Nilson 1991, № 84). Cantorov će tolerantni ton s vremenom, kako bude razvijao teoriju skupova, postajati sve kritičniji, prije svega zbog temeljnoga razilaženja s Aristotelom u vezi s ispravnim razumijevanjem beskonačnosti u matematici, odnosno nemogućnosti da prihvati aristotelovski antiinfinitizam.[226]

---

[226] Ovakve i slične *proaristotelovske* izjave u Cantorovu opusu i sačuvanoj korespondenciji veoma nalikuju stajalištima koja je Cantor također iznosio tijekom prve polovine 1880-ih, a koja pokazuju otvorenost prema mogućnosti da se govori i o nearhimedovskom odnosno infinitezimalima obogaćenom kontinuumu. Naime, iako će Cantor 1890-ih postati najoštriji kritičar *fin-de-siècle* nearhimedovske matematike čiji je pionir bio Veronese (v. Odjeljak [3.1] i Dodatak D), zbog izrazito loše početne recepcije svojih radova iz područja teorije skupova, prije svega u Njemačkoj i Francuskoj, a naročito nakon raskida s Mittag-Lefflerom i *Acta Mathematica* početkom 1885. godine, Cantor je bio spreman u potpunosti odustati od daljnjega bavljenja matematikom te se postupno sve više okretao povijesnim, filozofskim i teološkim razmatranjima. U retrospektivi koju je iznio u pismu Gerbaldiju od 11.1.1896. Cantor je čak eksplicitno rekao da je bio „zgađen matematičkim časopisima" te je stoga počeo objavljivati u filozofskim časopisima poput *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, a održavanje dobrih veza s Gutberletom (koje je moralo podrazumijevati održavanje privida pozitivnoga stava prema aristotelizmu) osiguralo mu je prostor za promicanje njegovih rezultata u neoskolastičkom časopisu *Philosophisches Jahrbuch*. Kada je riječ o Cantorovoj privremenoj suspenziji antiinfinitezimalizma tijekom 1880-ih, razloge tomu treba također tražiti u činjenici da je tada još uvijek pokušavao objaviti neke svoje rezultate i u najvažnijem neokantovskom časopisu *Kant-Studien*, čiji su urednici bili pripadnici takozvane Marburške škole, čiji je osnivač bio Hermann Cohen (1842–1918), autor utjecajne, premda kontroverzne knjige *Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte* (1883), koja je bila izložena nizu razornih kritika, primjerice u Russellovim *Principima matematike* (1903, Glava XLI, §315ff.; v. osobito §324). U ovom su kontekstu posebno zanimljiva i ilustrativna Cantorova pisma Kurdu Laßwitzu iz 1884. godine, u kojima otvoreno koketira s kantovskom filozofijom matematike te čak kaže: „za sada odlažem moje prigovore Cohenu" (Meschkowski & Nilson 1991, № 68–70 i № 91). Evo kako je Laugwitz sažeo ovu epistolarnu razmjenu:

> „Hermann Cohen upravo je objavio svoju knjigu o principu infinitezimalne metode, a u svojim se pismima Laßwitzu Cantor poziva na tu knjigu. Cohen, osnivač neokantovske škole u Marburgu, bio je jedan od najistaknutijih filozofa toga vremena, a Laßwitz jedan od

Međutim, svakako postoji jedna dublja sličnost između Aristotelove i Cantorove teorije kontinuuma, a tiče se činjenice da ni Aristotel ni Cantor nisu promatrali pitanje o strukturi kontinuuma kao isključivo matematičko, nego prije svega kao metafizičko pitanje koje se tiče kako matematičkih objekata, tako i *ontologije fizičkoga svijeta*. Naime, i Cantor je usvojio Aristotelovu „veliku analogiju kontinuuma" iz *Phys.* VI.1, odnosno *tezu o izomorfizmu* struktura jednodimenzionalnoga linearnog kontinuuma (geometrijske linije) te prostora, vremena, materije, gibanja i, općenito uzev, svih vrsta kontinuiranih fenomena.[227] U prilog tome najbolje govori jedan Cantorov kasniji rad, „Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. Zweite Mitteilung", objavljen u *Acta Mathematica* 1885. godine, u kojem Cantor eksplicitno kaže da su njegova istraživanja o skupovima točaka od samoga početka, odnosno počevši od ranih publikacija s početka 1870-ih, bila motivirana ne samo čisto apstraktnim, matematičkim interesima nego prije svega imajući na umu moguću širu primjenu teorije skupova i skupovno-točkaste topologije u matematičkoj fizici i drugim prirodnim znanostima radi objašnjenja konkretnih fizičkih fenomena.[228] Tako, polazeći ponovno od staroga sukoba između aristotelovaca i atomista (epikurejaca)[229], Cantor ističe sljedeće:

> njegovih sljedbenika. Cantor je možda smatrao da je preporučljivo biti u prijateljskim odnosima s Laßwitzom, koji je mogao poslužiti kao posrednik između filozofije i znanosti. Također, Laßwitz je bio autor utjecajnih popularnih knjiga o pitanjima iz područja zasnivanja matematike. Sve to može objasniti Cantorov prilično umjeren ton u pismima Laßwitzu." (Laugwitz 2002: 111)

Za više pojedinosti o povijesti recepcije Cantorove teorije v. Popović 2017, §3 („Ein großer Streit"); usp. Dauben 1990, Ch. 6, osobito str. 137–148.

[227] V. osobito *Phys.* 231 b 18: τοῦ δ' αὐτοῦ λόγου μέγεθος καὶ χρόνον καὶ κίνησιν ἐξ ἀδιαιρέτων συγκεῖσθαι, καὶ διαιρεῖσθαι εἰς ἀδιαίρετα, ἢ μηθέν. Velik broj znanstvenika i filozofa prije Cantora također je smatrao da prostor, vrijeme i materija dijele istu unutarnju konstituciju, primjerice Galilei, Descartes i (rani) Newton. Usp. Palmerino 2011.

[228] Usp. Cantor 1885, §3, str. 275 (stranice uvijek navodim prema Zermelovu izdanju Cantorovih *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin: Springer, 1932): „[…] Untersuchungen über Punktmengen habe ich von Anfang an nicht bloß aus spekulativem Interesse, sondern zugleich im Hinblick auf Anwendungen unternommen, welche ich mir davon in der mathematischen Physik und in anderen Wissenschaften versprach." Slično stajalište moguće je pronaći i u Cantorovu pismu Mittag-Leffleru od 22.9.1884., u kojem kaže:

> „Također radim na istraživanju primjene teorije skupova na prirodnu teoriju organizama (*Anwendungen der Mengenlehre auf die Naturlehre der Organismen*), gdje nije moguće primijeniti tradicionalne mehaničke principe. […] U tu je svrhu bilo nužno stvoriti potpuno nove matematičke alate, koji se u biti mogu pronaći u onim dijelovima teorije skupova koje sam [do sada] razvio. *Već četrnaest godina radim na tom projektu preciznoga produbljivanja u bit svega organskoga. To predstavlja pravu motivaciju* (*die eigentliche Veranlassung*) zbog koje sam se uopće isprva suočio s napornim pothvatom istraživanja točkastih skupova te ga tijekom cijeloga tog razdoblja nikada nisam izgubio iz vida, premda nije obećavao nikakvo osobito priznanje." (Meschkowski & Nilson 1991, № 81, moj kurziv)

[229] Cantor je pisao o „velikom sukobu među filozofima" (*ein großer Streit unter den Philosophen*) već u §10. svojega matematičko-filozofskog spisa *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen* iz 1883. godine, koji je predstavljao petu po redu studiju u seriji radova posvećenih linearno uređenim skupovima točaka (*Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, 1879–1884), zamišljenu kao pokušaj filozofskog opravdanja i zasnivanja teorije transfinitnih brojeva. Zanimljivo je da je Cantor prvobitno nastojao objaviti *Grundlagen* u *Math. Annalen*, pa je tim povodom pisao Kleinu 7.2.1883., uvjeravajući ga da je spis „potpuno matematički (*durch mathematisch ist*) iako sadrži malo formula" te da je bio primoran raspravljati „o mnogo filozofskog materijala koji je relevantan za tu temu", dodajući da su „nažalost,

„*Hipoteze* na kojima počiva većina teorijskih istraživanja *prirodnih pojava* nikada nisam smatrao u potpunosti zadovoljavajućima, a bio sam uvjeren da je to posljedica činjenice da *teoretičari* uglavnom ili ostavljaju *krajnje* elemente *materije* potpuno neodređenima [sc. aristotelovci – prim. S. P.] ili ih zamišljaju kao takozvane *atome* – *veoma male*, ali ipak *ne sasvim lišene prostornosti* [sc. protežnosti] (*nicht gänzlich verschwindendem Rauminhalte annehmen*). Nisam nimalo sumnjao da, kako bismo došli do zadovoljavajućeg *objašnjenja prirode* (*Naturerklärung*), moramo pretpostaviti da krajnjih ili *stvarno prostih* elemenata materije (*eigentlichen einfachen Elementen der Materie*) ima aktualno beskonačno mnogo te da ih, *u prostornom smislu* (*Räumliche*), moramo smatrati *potpuno neprotežnima* i *strogo točkastima* (*völlig ausdehnungslos und streng punktuell*).[230] Međutim, da bi se taj *temeljni uvid* (*Grundanschauung*) mogao ostvariti, činilo se nužnim prethodno provesti opća istraživanja o *skupovima točaka* (*allgemeine Untersuchungen über Punktmengen*), što sam ja i učinio. Slijedeći Leibniza, *proste* elemente prirode iz čijega sastavljanja (*aus deren Zusammensetzung*), u izvjesnom smislu, proizlazi *materija* nazivam *monadama* ili *jedinicama* (*Monaden oder Einheiten*)." (Cantor 1885, §3; Cantorov izvorni kurziv)

Kao što možemo vidjeti, Cantor je nastojao artikulirati svojevrsnu *skupovnoteorijsku monadologiju*, po uzoru na Leibniza.[231] Ono što je karakteristično za ovu vrstu pristupa, nasuprot aristotelovskomu, jest to da se ovdje krećemo *odozdo prema gore*, polazeći od konstitutivnih elemenata prostora, vremena i materijalnih odnosno fizičkih objekata – točaka – kao od ontološki primarnih, odnosno supstancijalnih entiteta, za razliku od aristotelovskoga pristupa, gdje se krećemo *odozgo prema dolje*, odnosno od trodimenzionalnih fizičkih objekata kao paradigmatskih primjera supstancija, tj. fundamentalnih entiteta, dok se

ti elementi toliko isprepleteni u mojem radu da bi mi bilo veoma teško odvojiti čisto matematičke aspekte od ostaloga" (*es ist leider bei mir so in einander verwachsen, daß es mir sehr schwer werden würde, das bloß mathematische in der Arbeit von dem Übrigen zu trennen*; v. Meschkowski & Nilson 1991, № 41). Klein je, posve nalik drugim matematičarima u ovom razdoblju (Weierstraß, Kronecker, Hermite, Poincaré, pa čak i Cantoru veoma naklonjen Mittag-Leffler), bio prilično skeptičan prema Cantorovoj novoj „filozofiji beskonačnoga". Međutim, ovo je pismo Kleinu dragocjeno utoliko što u njemu Cantor po prvi put izražava uvjerenje koje će kasnije postati odlučujuće za njegov rad (uključujući i publikacije iz 1885. godine i nakon nje), naime *da su matematika i filozofija apsolutno nerazdvojne* (v. nap. Meschkowskog i Nilsona uz № 41, 1991: 113). Usp. i nap. 226 *supra*.

[230] Cantor *ad loc.* dodaje napomenu da ga je u tom uvjerenju dodatno učvrstila činjenica da su u to vrijeme istu ideju zastupali i „istaknuti fizičari poput Faradaya, Ampèrea i Webera", kao i Cauchy među matematičarima. Cantorovo spominjanje Cauchyja povijesno je zanimljivo u svjetlu naše prethodne rasprave o Bolzanu kao Cantorovu prethodniku u pogledu negiranja (**A**$_{\mathbf{Z}}$). Naime, iako sâm Cantor ne elaborira na što točno misli kada je riječ o Cauchyju, plauzibilno je pretpostaviti da se ova opaska prije svega odnosi na Cauchyjevu *pointwise* definiciju neprekidnosti funkcije, koja u biti odgovara i našoj suvremenoj odnosno Weierstraßovoj ε, δ definiciji, a intuitivno se može shvatiti ovako: neprekidna je ona funkcija kod koje dovoljno male promjene vrijednosti argumenta uzrokuju proizvoljno male promjene vrijednosti funkcije ili, drugim riječima, ona kod koje je vrijednost funkcije proizvoljno bliska vrijednosti u nekoj zadanoj točki, samo ako je vrijednost argumenta dovoljno bliska toj točki. Nešto formalnije, funkcija $f(x)$ neprekidna je na zadanom intervalu ako za svaki x iz toga intervala apsolutna vrijednost razlike $f(x + \alpha) - f(x)$ neograničeno opada s α. Upravo ta definicija figurira u Bolzano-Cauchyjevu teoremu o međuvrijednosti (Bolzano ju je prvi formulirao u *Rein analytischer Beweis* 1817., s time da ju je Cauchy neovisno dokazao u *Cours d'Analyse* 1821. godine).

[231] Nešto slično će nakon Cantora pokušati učiniti i Gödel, koji će u takozvanim MaxPhil bilježnicama (*Maximen Philosophie*) tvrditi da je njegova teorija „jedna monadologija […] posve nalik Leibnizovoj monadologiji po svojoj općoj strukturi" (navedeno prema Wang 1996, ¶0.2.1).

točke (i drugi geometrijski entiteti) tretiraju kao derivativni odnosno ontološki sekundarni entiteti. Kao što je to ispravno primijetio Ferreirós, Cantor pripada

> „dugoj tradiciji (počevši od Leibniza preko Boškovića do Ampèrea, pa čak i Riemanna) u okviru koje se smatralo da bi trebalo primjenjivati hipoteze o bezdimenzionalnim točkama – prostim elementima kontinuuma – kao i neprekidne funkcije i neprekidnu transmisiju kao ključ za istinsko i pravo objašnjenje prirodnih fenomena." (Ferreirós 2004, §6.1, str. 73)

Kako onda Cantor može objasniti konstituciju fizičkoga svijeta polazeći od točaka? Za početak mu je potreban dovoljan broj izoliranih točaka. Ovdje se prirodno nameće pitanje koliko je točaka zapravo dovoljno odnosno, preformulirano na najopćenitiji način *à la* Gödel, koliko uopće ima točaka na euklidskom pravcu – pitanje koje čini samu srž Cantorova problema kontinuuma (Gödel 1947: 515). Očit odgovor bio bi da ih ima aktualno beskonačno mnogo, kao što i sâm Cantor kaže u prethodno navedenom citatu. Međutim, kao što je dobro poznato, Cantor je još 1874. u pionirskom radu „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" pokazao da nisu svi beskonačni skupovi jednaki, odnosno da je i beskonačne skupove moguće uspoređivati po veličini. Dokazavši da postoji bijekcija između skupa svih prirodnih brojeva i skupa svih algebarskih brojeva[232], ali i da ne postoji bijekcija između skupova prirodnih i realnih brojeva $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$, Cantor je omogućio svojevrsno „rangiranje" beskonačnosti u matematici.[233] U „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre" iz 1878. nalazimo Cantorov poznati kriterij ekvivalencije odnosno ekvipotencije skupova[234]: ukoliko je elemente ma koja dva skupa M i N moguće korelirati tako da se „jedinstveno i potpuno podudaraju jedan s drugim, element po element", odnosno ako je između elemenata M i N moguće uspostaviti bijekciju, onda se za ta dva skupa kaže da imaju isti *kardinalni broj*, $card(M) = card(N)$, odnosno, Cantorovim riječima, da imaju istu „moć" (*Mächtigkeit*) (Cantor 1878, navedeno prema Cantor 1932: 119). Kada je riječ o

---

232 Algebarski brojevi jesu realni ili kompleksni brojevi koji mogu biti rješenja odnosno korijeni polinoma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ čiji su koeficijenti racionalni brojevi $a_i \in \mathbb{Q}$ i $a_n \neq 0$.

233 Poznatiji i jednostavniji dokaz posredstvom *dijagonalizacije* Cantor je formulirao 1890/91. u radu „Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre", tiskanom u prvom broju *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (Bd. 1, str. 72–78).

234 Povijesno gledano, ovaj se kriterij može naslutiti već u Galileijevu posljednjem spisu, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, u okviru rasprave o takozvanom problemu Aristotelova kotača, koji je neposredno povezan s pitanjem o strukturi kontinuuma (Galilei 1638: 32–34; v. osobito opasku „nel numero infinito, se concepir lo potessimo, bisognerebbe dire tanti essere i quadrati, quanti tutti i numeri insieme"), a sasvim je eksplicitno operativan kod Bolzana:

> „Prijeđimo sada na razmatranje jednoga veoma iznimnog svojstva koje se može javiti, i koje se doista uvijek javlja, u odnosu dvaju skupova (*Menge*) ako su oba beskonačna, ali koje je ranije bilo previđano nauštrb nekih važnih istina u metafizici, kao i u fizici i samoj matematici. Čak i sada, kada iznosim ovu tvrdnju, ona će se smatrati paradoksalnom do te mjere da će se možda pokazati potrebnim zadržati se na njezinu razmatranju nešto dulje. *Tvrdim da dva skupa, koja su oba beskonačna, mogu stajati u takvu međusobnom odnosu da je, s jedne strane, moguće svaku stvar koja pripada jednom skupu upariti s nekom stvari iz drugoga skupa, tako da nijedna stvar ni u jednom od tih skupova ne ostane bez svojega para i da se nijedna stvar ne pojavljuje u dvama ili više parova*, a da je, s druge strane, također moguće da jedan od tih skupova sadržava onaj drugi u sebi kao svoj puki dio [sc. podskup]." (*Paradoxien*, §20, moj kurziv; citirano prema Bolzano 2004: 615)

beskonačnim skupovima, najmanji beskonačni skup jest *prebrojivi skup* prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, $card(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Isti kardinalni broj imaju i svi beskonačni pravi podskupovi od $\mathbb{N}$, poput skupa parnih ili skupa neparnih brojeva, kao i skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Prema Cantorovoj hipotezi kontinuuma (**CH**), prvi sljedeći veći beskonačni skup jest *neprebrojivi skup* realnih brojeva $\mathbb{R}$, $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$. Prema (**CH**), $2^{\aleph_0}$ na ljestvici alefa dolazi neposredno iza $\aleph_0$, kao prvi sljedeći veći kardinal; drugim riječima, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (v. „Beitrag" i *Grundlagen*, Cantor 1878 i Cantor 1883).[235]

Fraenkel, Bar-Hillel i Levy u *Foundations of Set Theory* istaknuli su da u osnovi Cantorove teorije skupova leži „koncepcija kontinuuma kao agregata *već postojećih točaka*", s time da se u teoriji skupova, za razliku od geometrije i analize, gdje se polazi od kontinuuma kao osnove odnosno nečega već zadanoga, „*kontinuum konstruira* posredstvom neke od poznatih skupovnoteorijskih metoda (metoda partitivnog skupa, dijagonalizacija, Cantorov teorem)", pri čemu je „*polazište ove procedure diskretan odnosno diskontinuiran agregat*, primjerice prebrojiv skup $\mathbb{Z}$ svih cijelih brojeva ili pak *skup izoliranih točaka neke linije*" (1973, Ch. IV, §1, str. 210–212, usp. i str. 256; moj kurziv). Hermann Weyl (1885–1955) će 1925. godine, u aristotelovskom duhu, govoriti o Cantorovu skupovnoteorijskom pristupu kao o nečemu što „proturječi biti kontinuuma" utoliko što ga „razbija na razdvojene i izolirane elemente" (usp. Scholz 1995: 1593). Evo kako je Cantor mogao osigurati dovoljan broj izoliranih točaka za svoju skupovnoteorijsku rekonstrukciju fizičkoga svijeta. Zamislimo gornju liniju na *Sl. 11* kao tipičnu aristotelovsku ograničenu liniju s kakvom smo se već susreli na *Sl. 10* u Odjeljku [2.4] i koja bi se u načelu mogla shvatiti kao granica između dviju različito obojenih ploha ili rub nekoga fizičkog objekta.



Sl. 11. Cantorov ternarni skup

[235] (**CH**) predstavlja poseban slučaj uopćene ili generalizirane hipoteze kontinuuma (**GCH**), kojom se tvrdi da za svaki ordinal α vrijedi $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Evo kako je Cantor izvorno formulirao (**CH**) 1878. godine:

> „Postavlja se pitanje kako se različiti dijelovi neprekidnoga pravca, odnosno različiti beskonačni skupovi točaka koji se na njemu mogu zamisliti, međusobno odnose s obzirom na svoje kardinalnosti (*Mächtigkeiten*). Oslobodimo se pri razmatranju toga problema geometrijskoga prizvuka te uzmemo li da je *linearni* skup realnih brojeva svaka zamisliva cjelina (*Inbegriff*) beskonačno mnogo različitih realnih brojeva, postavlja se sljedeće pitanje: na *koliko* se i na koje klase dijele linearni skupovi ako se skupovi iste kardinalnosti svrstavaju u istu klasu, a skupovi različitih kardinalnosti u različite klase? Jedan induktivni postupak […] sugerira teorem kojim se tvrdi da je broj klasa linearnih skupova koje proizlaze iz toga principa razvrstavanja konačan i, doista, da taj broj iznosi točno *dva*." (Cantor 1878, usp. Ewald 2005: 879)

Cantor dekonstruira jedinični kontinuum, odnosno zatvoreni interval $[0,1]$, na sljedeći način. Najprije uklonimo njegovu središnju trećinu, odnosno otvoreni interval $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, tako da preostanu dva zatvorena intervala, $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ i $\left[\frac{2}{3},1\right]$. Zatim uklonimo središnju trećinu tih intervala, tako da preostanu intervali $\left[0,\frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$ i $\left[\frac{8}{9},1\right]$. Iteriranjem toga postupka, odnosno neprekidnim uklanjanjem središnje trećine preostalih intervala *in infinitum*, naposljetku dobivamo *Cantorov diskontinuum* ili *ternarni skup* $\mathcal{C}$, odnosno diskretni agregat sastavljen od nuladimenzionalnih izoliranih točaka, koji je Mandelbrot prikladno nazvao *Cantorovom fraktalnom prašinom* (Mandelbrot 1983: 76). Primijetimo da $\mathcal{C}$ sadržava sve točke intervala $[0,1]$ koje nisu uklonjene ni u jednom koraku beskonačnoga procesa uklanjanja središnjih trećina. Budući da je zbroj duljina uklonjenih intervala $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{2^n}{3^{n+1}}=1$, Lebesgueova mera[236] λ skupa $\mathcal{C}$ jednaka je nuli, ali je $\mathrm{card}(\mathcal{C})=2^{\aleph_0}$. Drugim riječima, Cantorov diskontinuum $\mathcal{C}$ sastoji se od istoga broja točaka kao i aritmetički kontinuum $\mathbb{R}$![237]

Budući da je osigurao dovoljan broj točaka te da je smatrao kako bi „svaki neprebrojiv skup mogao biti kontinuum, ako se prikladno uredi“ (postskript pisma Dedekindu od 15.9.1882.)[238], Cantoru je sada preostalo samo specificirati uvjete koje neprebrojiv skup točaka poput $\mathcal{C}$ mora zadovoljiti kako bi konstituirao kontinuum.

---

[236] Lebesgueova mjera predstavlja neposredno uopćenje pojmova duljine (segmenata odnosno dužina), površine (ploha) i volumena (tijela) na širi skup podskupova prostora $\mathbb{R}^n$. Jednostavno i intuitivno rečeno, λ možemo promatrati kao *aritmetički mjerni instrument* za određivanje udaljenosti između točaka geometrijskoga kontinuuma kojima su jednoznačno pridruženi realni brojevi (v. Dedekindovu opasku o mjerenju dužina u Dedekind 1872, §2). Tada je mjera intervala $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ i (a,b), gde $a<b$, $\lambda=b-a$. U slučaju takozvanih degeneriranih intervala, koji se sastoje od samo jedne realne točke, vrijedi $a=b$, a $\lambda=0$.

[237] Povijesno je važno istaknuti da Cantor nije prvi konstruirao diskontinuum. Naime, niz matematičara koji su se bavili teorijom integracije i ispitivanjem ponašanja funkcija u točkama prekida već je sredinom 1870-ih također proučavao „patološke“ strukture poput skupa $\mathcal{C}$, osobito Henry J. S. Smith (1826–1883) u Engleskoj, Paul du Bois-Reymond u Njemačkoj i Vito Volterra u Italiji. Štoviše, u radu „Der Beweis des Fundamentalsatzes der Integralrechnung“, objavljenom u *Math. Annalen* 1880. godine, du Bois-Reymond u fusnoti eksplicitno napominje da raspolaže nizom primjera „distribucije intervala“ (*auf diese Art der Intervallvertheilung, zu der ich verschiedene Beispiele bei der Hand habe*) poput ternarnoga skupa $\mathcal{C}$, dodajući da je na njihovo postojanje upozorio Cantora u pismu „prije nekoliko godina“ (*deren Vorhandensein ich vor Jahren Herrn Cantor in Halle brieflich anzeigte*) (du Bois-Reymond 1880: 127–128, nap. *). Drugim riječima, du Bois-Reymond sugerira da je Cantor bio sklon neakademskoj praksi nenavođenja drugih autora i prisvajanja njihovih rezultata. I doista, može se reći da je od skandala i raskida s Dedekindom povodom objavljivanja prvoga važnog rada iz područja teorije skupova „Ueber eine Eigenschaft usw.“ u Borchardtovu *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1874. godine Cantor stekao vrlo loš glas u matematičkim krugovima. Sâm Dedekind tvrdio je da je Cantor gotovo od njega doslovno preuzeo (*fast wörtlich übergegangen*, usp. Ewald 2005: 849) dokaz da ne postoji bijekcija između $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$, dok Hermite u jednom pismu Mittag-Leffleru od 13.6.1883. ističe da se „du Bois-Reymond žali što ga [Cantor] nije citirao, a Schwarz potvrđuje da njegova žalba nije neosnovana“ (citirano prema Dugac 2003: 207). Za više pojedinosti o genezi ternarnoga skupa v. Ferreirós 1999, §§4.1–4.2, a kada je riječ o sporu Cantor-Dedekind i širem kontekstu pojavljivanja prve važne publikacije iz teorije skupova, v. odličnu nedavnu studiju D. Nahuela Goosa (2025).

[238] „Eine abzählbare Menge dürfte in Bezug auf keinerlei Ordnung als Continuum auffassbar sein. Dagegen jede nicht abzählbare Menge wahrscheinlich immer in Bezug auf gewisse Ordnungen als Continuum betrachtet werden kann.“ (citirano prema Meschkowski & Nilson 1991, № 30)

Cantorovu definitivnu karakterizaciju kontinuuma možemo pronaći u *Grundlagen* iz 1883. godine. U §10 Cantor ističe da namjerava dati „najopćenitiju moguću čisto aritmetičku definiciju točkastoga kontinuuma“ (*Punktkontinuum*), i to

> „polazeći od n-dimenzionalnoga aritmetičkog G_n [sc. $\mathbb{R}^n$ – prim. S. P.] kao od osnove, odnosno od cjeline svih sustava vrijednosti (*Inbegriff aller Wertsysteme*) oblika $(x_1|x_2|\ldots|x_n)$, gdje svako x, neovisno o ostalim [varijablama], može poprimiti *sve realne* brojčane vrijednosti (*aller reellen Zahlenwerte*) od $-\infty$ do $+\infty$. Svaki pojedinačni sustav vrijednosti ove vrste nazivam aritmetičkom točkom [prostora] G_n [sc. $\mathbb{R}^n$]. Tada se udaljenost između dviju takvih točaka može definirati pomoću izraza
>
> $$\left|\sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + \cdots + (x_n' - x_n)^2}\right|.$$
>
> Pod *aritmetičkim skupom* točaka (*Punktmenge*) P, sadržanim u G_n [sc. $\mathbb{R}^n$] podrazumijevam svaku cjelinu točaka prostora G_n [sc. $\mathbb{R}^n$] koja je zadana na neki zakonit način. Sada još samo preostaje postaviti oštru i ujedno najopćenitiju moguću definiciju toga kada se P ima nazvati kontinuumom (*eine scharfe und zugleich möglichst allgemeine Definition dafür aufzustellen, wann P ein Kontinuum zu nennen ist*).“ (Cantor 1883, §10)

U nastavku teksta Cantor formulira svoju znamenitu topološku definiciju kontinuuma: neprebrojiv skup točaka P jest kontinuum AKKO je *savršen* i *koherentan* (§10, ¶12–16). Da bi neki zadani skup točaka P bio savršen, svaka njegova točka mora biti takozvana *točka gomilanja* (*gomilište*) beskonačno mnogo drugih točaka skupa P.[239] U suvremenoj analizi neku zadanu točku x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$) smatramo točkom gomilanja skupa $X \subseteq \mathbb{R}$ AKKO svaka okolina točke x_0 sadržava barem jedan element skupa $X \setminus \{x_0\}$ odnosno AKKO za svako $\varepsilon > 0$ važi $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap X \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. Granična točka može, ali ne mora pripadati osnovnom skupu točaka P. Skup P naziva se *zatvorenim* (*abgeschlossen*, fr. *ensemble fermé*) ako svaka točka gomilanja skupa P pripada skupu P. Skup P naziva se *po sebi* ili, doslovno, *u sebi gustim* (*insichdicht*, fr. *ensemble condensé en soi*) ako je svaka njegova točka ujedno i točka gomilanja. Savršen skup jest skup koji je istodobno zatvoren i u sebi gust (Cantor 1885, §1; usp. Huntington 1917, §62a). Međutim, kao što Cantor ispravno ističe,

> „savršeni skupovi točaka (*die perfekten Punktmengen*) nisu uvijek i *posvuda gusti* (*überalldicht*) te stoga, uzet sam za sebe, uvjet savršenosti još uvijek nije dostatan za potpunu definiciju kontinuuma (premda valja priznati da svaki točkasti kontinuum (*Punktkontinuum*) uvijek mora biti *savršen skup*). Za definiciju kontinuuma potreban je još jedan uvjet, naime, potrebno je uvesti pojam *povezanoga* ili *koherentnoga skupa točaka* (*zusammenhängenden Punktmenge*).“ (Cantor 1883, §10, ¶13–14; Cantorov izvorni kurziv)

Potreba za uvođenjem ovoga dodatnog uvjeta proizlazi iz činjenice da je i diskontinuum C zadovoljavao uvjet savršenosti jer su pri svakom uklanjanju središnjih intervala ostavljane njihove krajnje točke, koje su uvijek bile točke gomilanja i od kojih se

[239] Weierstraß je koristio izraz *Häufungsstelle*, a Hilbert *Verdichtungsstelle*. Huntington je u svojoj veoma elegantnoj prezentaciji Cantorove definicije koristio izraze *cluster point*, *limit point* i *point of condensation* (Huntington 1917, §62a).

ternarni skup naposljetku jedino i sastoji. No, $\mathcal{C}$ očito nije posvuda gust skup jer su sve njegove točke izolirane, a ne „dobro povezane“ (*bien enchaînée*). Naime, skup se naziva *posvuda gustim* (*überalldicht*, eng. *everywhere dense*) ukoliko između bilo koje njegove dvije točke uvijek postoje i druge točke toga skupa.[240] Russell je uvjet koherencije (koji, doduše, naziva *kohezivnošću*) jednostavno objasnio riječima: „popularno rečeno, neki niz [sc. skup] kohezivan je kada ne sadržava nikakve praznine“ (Russell 1903, §272). Nešto formalnije, Cantor uvjet koherencije definira pomoću okolina[241] na sljedeći način:

> „Skup točaka T nazivamo *koherentnim* (*eine zusammenhängende Punktmenge*) ako za svake dvije njegove točke t i t', te za svaki unaprijed zadani proizvoljno mali broj ε, uvijek postoji konačan broj točaka $t_1, t_2, \dots, t_v$ iz skupa T tako da su udaljenosti (*die Entfernungen*) $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \dots, \overline{t_vt'}$ sve manje od ε.“ (Cantor 1883, §10, ¶15, kurziv u izvorniku)[242]

Dakle, točkasti kontinuum (u $\mathbb{R}^n$) definira se kao *savršen koherentan skup* (*als eine perfekt-zusammenhängende Menge*). Ovom definicijom i karakterizacijom kontinuuma Cantor je inaugurirao proučavanje topologije skupova točaka (eng. *point-set topology*) te, u osnovi, trasirao smjer budućega razvoja topologije (usp. Ferreirós 1999: 209).

Na temelju prethodnoga izlaganja mogli smo vidjeti na koji je način Cantor zasnovao svoju poentilističku i infinitističku teoriju kontinuuma, odbacivši Zenonov aksiom i, osobito emfatično, Aristotelove rezerve u pogledu aktualnosti beskonačnosti u matematici. U dugačkom pismu Mittag-Leffleru od 20. i 28.10.1884., napisanom ispovjednim i defanzivnim tonom nakon slabe recepcije teorije skupova u Francuskoj[243], Cantor je istaknuo da je

---

[240] Primijetit ćete da ova definicija odgovara onome kako gustoću uobičajeno shvaćamo: neki zadani skup S gust je AKKO između svaka dva različita elementa $x, y \in S$ uvijek postoji barem jedan element $z \in S, x < z < y$.

[241] U tome slijedi Weierstraßa, koji je nekoliko godina ranije već raspolagao tom definicijom, kao što je to ispravno primijetio Ferreirós (1999, §7).

[242] Budući da smo prethodno vidjeli kako Cantor pretpostavlja da je skup tačaka o kojemu govori, u ovom slučaju skup T, podskup skupa $\mathbb{R}^n$, uvjet koherencije može se zapisati i na sljedeći način: skup T, $T \subseteq \mathbb{R}^n$, povezan je ako je za svake dvije točke t i t' u T te za svaki proizvoljno mali realni broj $\varepsilon, \varepsilon > 0$, postoji konačan niz točaka $t, t_1, t_2, \dots, t_n, t'$ u T takav da vrijedi $d(t, t_1), d(t_1, t_2), \dots, d(t_n, t') < \varepsilon$, pri čemu je d standardno shvaćena *funkcija udaljenosti*, odnosno *metrika*, na $\mathbb{R}^n$. Udaljenost $d(x, y)$ između dvije točke x i y određuje se, kao i kod Cantora (v. citat na prethodnoj stranici), primjenom Pitagorinog teorema na sljedeći način: $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$. Stoga i Zermelo u Cantorovim *Gesammelte Abhandlungen* uz prethodno navedenu Cantorovu definiciju dodaje uredničku napomenu: „dakle, riječ je o jednome ‘metričkom’ svojstvu kontinuuma“ (*es handelt sich also eine ‘metrische’ Eigenschaft des Kontinuums*) (v. Cantor 1932, str. 194). Primjetimo još i da Cantor, umjesto $d(t, t_1), d(t_1, t_2), \dots, d(t_n, t')$, piše $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \dots, \overline{t_vt'}$, kao da je riječ o dužima, a ne o udaljenostima između točaka.

[243] O tome možda najbolje svjedoče primjedbe Hermiteova kruga, koji su činili Paul Émile Appell (1855–1930), Émile Picard (1856–1941) i Henri Poincaré, a koji je na Mittag-Lefflerovu inicijativu trebao prevesti Cantorove pionirske radove na francuski radi njihova objavljivanja u *Acta Mathematica* (v. drugi svezak *Acta* iz 1883. godine). Naime, Hermiteova korespondencija s Mittag-Lefflerom otkriva da je ono što je najviše smetalo *i filozofima i matematičarima* u vezi s Cantorovom teorijom bilo tada još uvijek kontroverzno filozofsko objašnjenje strukture linearnoga kontinuuma i s njime povezano shvaćanje statusa beskonačnosti. Tako u pismu od 13.4.1883. Hermite u ime svojega kruga i francuskih matematičara uopće zaključuje da je

> „*dojam koji ostavljaju Cantorovi radovi razočaravajući* (*désolante*), a samo njihovo čitanje pravo mučenje (*un véritable supplice*); iako poštujemo njegove zasluge jer nam je otvorio jedno novo

Aristotel pogrešno shvatio i protumačio razliku između aktualne i potencijalne beskonačnosti te je, štoviše, tvrdio da je

> „*Aristotel načinio najveću moguću pogrešku negirajući egzistenciju ili realnost kategorematske odnosno aktualne beskonačnosti. To je izvor* raširenoga pogrešnog uvjerenja da ne postoje beskonačni ili, bolje rečeno, transfinitni brojevi, koje se održalo od moderne filozofije do naših dana, kao i možda ne univerzalne, ali sasvim sigurno veoma *raširene odbojnosti suvremenih matematičara prema mojim inovacijama* (*so doch viel verbreitete Abneigung der zeitgenössischen Mathematiker gegen meine Neuerungen*)!" (prema Meschkowski & Nilson 1991, № 84, moj kurziv)

Ovaj je izvadak povijesno iznimno važan utoliko što pokazuje da je Cantor već sredinom 1880-ih smatrao aristotelizam glavnim izvorom izrazito negativne recepcije vlastite teorije. Kao što ćemo vidjeti u trećem dijelu, upravo u *antiaristotelizmu* treba tražiti objašnjenje Cantorove kasnije averzije prema Veroneseovoj nearhimedovskoj geometriji i, općenito uzev, prema Veroneseovu aristotelovski intoniranom projektu zasnivanja matematike iz *Fondamenti* (usp. Odjeljak [2.4]). Prije nego što nastavimo s rekonstrukcijom Veroneseove teorije, na kraju ovoga odjeljka iznijet ću još nekoliko napomena o pojedinim filozofskim aspektima i implikacijama Cantorove teorije kontinuuma, osobito o onim točkama koje odstupaju od aristotelovske koncepcije koju je usvojio Veronese. Prethodno sam već istaknuo da se kod Cantora, za razliku od aristotelovaca, čitava ontologija izgrađuje odozdo prema gore, polazeći od $2^{\aleph_0}$ izoliranih točaka – ontološki primarnih konstitutivnih elemenata ili, vitgenštajnovski rečeno, „supstancije svijeta"[244] – koje se potom mogu prerasporediti u skladu s Cantorovim uvjetima kako bismo dobili ne samo jednodimenzionalni linearni kontinuum nego i čitav trodimenzionalni prostorno-vremenski materijalni svijet shvaćen kao punktiformni *compositum reale*.

Prijelaz s jednodimenzionalnih na dvo- i višedimenzionalne entitete moguće je jednostavno objasniti, ponovno se pozivajući na Cantorove matematičke rezultate, slično kao što smo se prethodno mogli osloniti na njegovu konstrukciju diskontinuuma $\mathcal{C}$. Naime, Cantor je već u pismu Dedekindu od 5.1.1874. otkrio da ga već dulje vrijeme zaokuplja

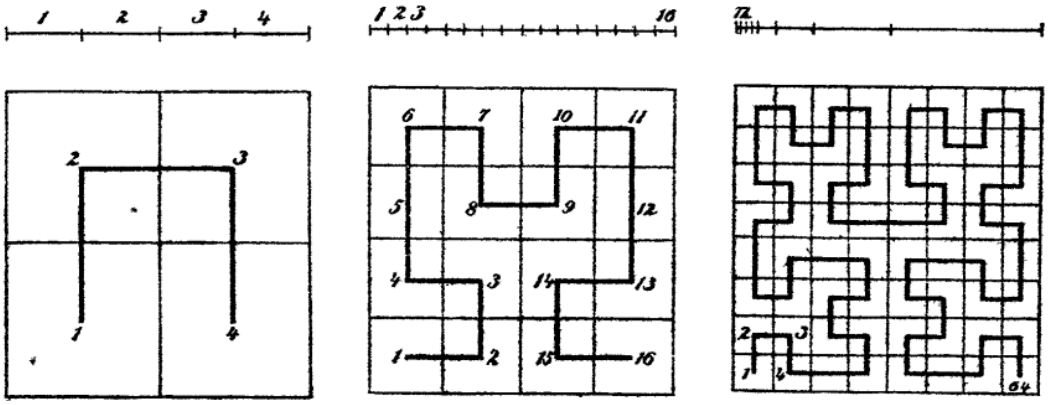
---

> područje istraživanja, *nitko od nas nije u iskušenju slijediti ga* (*personne de nous n'est tenté de le suivre*). Štoviše, posve nam je nemoguće među [Cantorovim] rezultatima koje smo uopće u stanju razumjeti pronaći makar i jedan jedini koji bi bio od stvarnoga interesa [za matematiku] (*d'en voir un seul ayant un intérêt actuel*)." (citirano prema Dugac 2003: 207)

Poincaré će kasnije s pravom govoriti o „užasavanju koje je *cantorizam* (*le cantorisme*) izazvao kod Hermitea" (Poincaré 1908: 939). Za više pojedinosti v. Popović 2017, §3 („*Ein großer Streit*").

[244] Ukoliko bismo ostavili po strani Wittgensteinov negativan odnos prema Cantorovoj teoriji skupova iz *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (1956), doista se može primijetiti izvjesna sličnost između Cantorove skupovnoteorijske monadologije i Wittgensteinove traktarijanske ontologije. Naime, čini se da je Cantor, vitgenštajnovski prije Wittgensteina, shvatio da je supstancija svijeta (*Substanz der Welt*) skup njegovih objekata koji ne mogu biti složeni (*zusammengesetzt*), nego prosti (*einfach*), ali koji moraju biti povezani (*zusammenhängen*), odnosno uređeni na odgovarajući način. Drugim riječima, svijet je samo kompleksna punktiformna relacijska struktura čiji „kontinuitet ovisi o tome na koji su način njezini elementi uređeni" (v. pismo Dedekindu od 30.9.1882. u Ewald 2005: 874). Usp. s *TLP* 2.02 („Der Gegenstand ist einfach."), *TLP* 2.021 („Die Gegenstände bilden die Substanz der Welt. Darum können sie nicht zusammengesetzt sein.") i *TLP* 2.0231 („Die Substanz der Welt kann nur eine Form und keine materiellen Eigenschaften bestimmen."). Zahvaljujem prof. Milošu Arsenijeviću što mi je na to skrenuo pozornost.

pitanje „je li moguće uspostaviti korespondenciju jedan-na-jedan između površine (primjerice jediničnoga kvadrata) i linije (jedinične dužine)“ tako da „svakoj točki površine odgovara jedna i samo jedna točka linije i, obratno, svakoj točki linije jedna i samo jedna točka površine“ (navedeno prema Ewald 2005: 850). Već u pismu od 20.6.1877. Cantor obavještava Dedekinda da je uspio definirati jedno takvo bijektivno preslikavanje te da je, općenito uzev, „moguće analitički korelirati plohe, tijela pa čak i neprekidne strukture od ma koliko proizvoljnoga broja dimenzija ρ sa strukturama koje imaju samo jednu dimenziju“, budući da dvo-, tro- i n-dimenzionalne neprekidne strukture „imaju istu moć [sc. isti kardinalni broj, *Mächtigkeit*] kao krivulje“ (*op. cit.*, str. 853).[245] Ovaj će Cantorov rezultat nekoliko godina kasnije poslužiti kao svojevrsno nadahnuće za konstrukciju takozvane Peanove-Hilbertove krivulje (*Sl. 12*), koja, premda je jednodimenzionalna, prekriva čitavu dvodimenzionalnu ravninu, odnosno trodimenzionalni prostor (v. Peano 1890 i Hilbert 1891). Peano se u svom radu i eksplicitno pozvao upravo na Cantorov dokaz postojanja bijekcije između jediničnoga kvadrata i jedinične dužine, objavljen u radu „*Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*“ 1878. godine.



Sl. 12. Prvih nekoliko iteracija postupka kojim se generira Peano-Hilbertova krivulja (preuzeto iz Hilbert 1891: 459)

U neznatno izmijenjenoj verziji svoga rada, koja će ući u *Formulario mathematico* (T. V, 1908, str. 239–240), Peano je istaknuo sljedeće:

> „Putanja točke koja se kreće iscrpljuje čitav n-dimenzionalni prostor. Postoji neprekidna krivulja koja prekriva sve točke ravnine i postoji krivulja koja prekriva sve točke prostora itd. Ovaj rezultat značajan je za proučavanje principa geometrije: *ne postoji nikakvo specifično svojstvo koje bi razlikovalo krivulju od plohe* (*ce resultatu habe interesse in studio de principio de Geometria; nam non existe charactere specifico, que distingue linea, ab superficie*).“ (citirano prema Peanovim *Opere scelte*, sv. 1, Peano 1957: 115)

Ovakva mjesta posve odgovaraju duhu onoga što smo u Odjeljku [1.3] nazvali krizom intuicije. Naime, rezultati poput Weierstraßove formulacije prve neprekidne funkcije koja nema izvod ni u jednoj svojoj točki, Cantorovih preslikavanja između jednodimenzionalnih i n-dimenzionalnih struktura ili pak konstrukcija znamenitih fraktalnih

[245] Za dokaz v. Cantorovo pismo Dedekindu od 25.6.1877. u Ewald 2005: 856–860. Za komentar v. Ferreirós 1999, §4.2.

krivulja poput Peano-Hilbertove sugerirali su pojedinim matematičarima krajem 19. stoljeća da stari aristotelovski vizualno-intuitivni model, kao ni na njemu utemeljena filozofija geometrije i kontinuuma opisana u Odjeljku [2.4], više nisu zadovoljavajući. U tom je kontekstu i sâm Cantor već u ranoj fazi svoje karijere odbacio vizualizaciju i geometrijsku intuiciju, smatrajući osobito da se teorija kontinuuma ne može razvijati geometrijski, nego isključivo *čisto aritmetički* (*rein arithmetisch*), odnosno skupovnoteorijski (Dauben 1990: 87).[246] Kao što smo prethodno mogli vidjeti, Veronese je zastupao posve suprotno stajalište, inzistirajući na primatu *čisto geometrijskoga gledišta* (*punto di vista puramente geometrico*, usp. Veronese 1891: xxii). Zanimljivo je da je na ovu napetost između aritmetičkoga i geometrijskoga gledišta kada je riječ o Cantorovoj i Veroneseovoj teoriji među prvima ukazao Petronijević u *Die typischen Geometrien und das Unendliche* (1907), istaknuvši da Veroneseova teorija „proizlazi izravno iz geometrijskih razmatranja pravca, za razliku od Cantorove, čije je podrijetlo čisto aritmetičko" (*aus geometrischen Betrachtungen an der Geraden hervorgeht im Unterschied von der Cantorschen, die rein arithmetischen Ursprungs ist*), dodajući, doduše, da upravo ta razlika u pogledu vrste pristupa čini Veroneseovu teoriju logički manje rigoroznom (*nicht logisch scharf gefasst*) od Cantorove (Petronijević 1908: 158).

Naposljetku, za razliku od Veroneseova *in re* aristotelizma, Cantor je zastupao tvrdokorniji *ante rem* realizam. U *Grundlagen* je napisao da se njegovo „posve realističko, ali ujedno i ništa manje idealističko stajalište […] u biti slaže s načelima platonizma" (Cantor 1883, §8; v. i prateću Cantorovu napomenu u fusnoti: *diese Überzeugung stimmt im wesentlichen sowohl mit den Grundsätzen des Platonischen Systems*). U pismu Mittag-Leffleru od 23.12.1883. Cantor će u platonističkom duhu reći i da on nije tvorac teorije skupova, nego da mu je ona samo *otkrivena* – Bog mu je pružio nadahnuće i otkrio cjelokupan sadržaj teorije skupova, a Cantor je, prema vlastitom svjedočanstvu, bio zaslužan i odgovoran samo za način na koji je teorija bila izložena i prezentirana u njegovim radovima (v. i pismo od 31.1.1884. u Meschkowski & Nilson 1991). Upravo iz toga razloga – zato što je teorija skupova bila predmet *objave* – Cantor je bezuvjetno vjerovao u njezinu *apsolutnu istinitost*, smatrajući bilo kakve alternativne teorije kontinuuma i beskonačnosti, poput primjerice Veroneseove, održivima jedino ukoliko su svodive na njegovu vlastitu teoriju, a u suprotnom „monstruoznim odstupanjima od istine" (*Abweichung vom Wahren*; v. pisma Veroneseu od 6.10. i 26.11.1890. u Meschkowski & Nilson 1991).[247] I doista, u odjeljcima [3.1] i [3.1.1]

---

[246] Usp. *Grundlagen*, §10: „Ebenso ist es meine Überzeugung, daß man mit der sogenannten *Anschauungsform* des *Raumes* gar nichts anfangen kann, um Aufschluß über das *Kontinuum* zu gewinnen."

[247] Treba napomenuti da je Cantor 1884. godine doživio prvi u nizu manje ili više ozbiljnih živčanih slomova, zbog kojih je u više navrata bio hospitaliziran u *Halle Nervenklinik*: 1884., zatim 1899., tijekom 1902–1903., a od 1904. do kraja života, 1918. godine, provodio je sve dulja razdoblja u bolnici zbog psihičke nestabilnosti. Upravo u tom razdoblju, a osobito od 1886., Cantor u Halleu počinje predavati filozofiju te se sve više okreće proučavanju *neoskolastičke teologije* i vodi intenzivnu epistolarnu razmjenu s teolozima. Za više pojedinosti o teološkim aspektima Cantorove teorije skupova v. Dauben 1977 i Dauben 1999: 135–148. Primjerice, Dauben na jednom mjestu kaže sljedeće:

> „Duboke teološke preokupacije i razmatranja uvijek su bili iznimno važni Cantoru. […] Zapravo, *smatrao je da se matematički, metafizički i teološki aspekti njegove transfinitne teorije skupova uzajamno podupiru*. Cantor je bio uvjeren da njegova otkrića nisu od presudne važnosti samo za budući razvoj čiste matematike, nego da *teorija skupova može poslužiti i unapređenju filozofije te*

vidjet ćemo da spor između Cantora i Veronesea u osnovi predstavlja rezultat izostanka minimalne tolerancije za bilo kakve inovacije u području (zasnivanja) matematike s Cantorove strane i njegove nespremnosti da prihvati nove, nekantorovske teorije kontinuuma i beskonačnosti. To je tim više ironično s obzirom na činjenicu da je upravo Cantor u *Grundlagen* inzistirao na *freie Mathematik*, odnosno na stajalištu da je „svako pretjerano ograničavanje težnje prema matematičkom istraživanju apsolutno neopravdano" jer „*bit matematike* leži u njezinoj *slobodi*" (Cantor 1883, §8).[248]

[2.5] Od metageometrije k metamatematici: Veroneseov „savršeni prehilbertovski stil" i status „modela" u geometriji od 1870-ih do 1920-ih

U Odjeljku [2.4] istaknuo sam da bi bilo teško braniti relevantnost Veroneseove teorije za suvremena povijesno-filozofska istraživanja razvoja moderne matematike razdoblja *fin de siècle* da se on zadržao samo na aristotelovskoj filozofiji geometrije (ma koliko ona sama po sebi bila zanimljiva) te da bi se, štoviše, zbog inzistiranja na revitalizaciji metoda klasične grčke geometrije Veronese mogao smatrati kontramodernistom, odnosno protivnikom modernizacijske transformacije matematike krajem 19. i početkom 20. stoljeća. To bi onda

> *kao potpora teologiji*. […] Cantor je bio duboko posvećen istraživanju metafizičkoga i religijskog značenja svojih matematičkih rezultata." (*op. cit.*, str. 118–119; moj kurziv)

Evo i jednoga ilustrativnog ulomka iz kasnije faze Cantorove karijere, iz *Mitteilungen zur Lehre von Transfiniten* (1887), koje predstavljaju njegovu posljednju publikaciju posvećenu teoriji skupova (i koja je za moto imala citat iz Prve poslanice Korinćanima 4,5: *veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia*):

> „*Transfinitno*, sa svojim obiljem oblika i konfiguracija, nužno upućuje na *Apsolut* (*auf ein Absolutes*), na ono „istinski beskonačno" (*wahrhaft Unendliche*), čija veličina ne dopušta ni povećanje ni smanjenje te koje se stoga u kvantitativnom smislu mora promatrati kao apsolutni maksimum. Ovo potonje u izvjesnom smislu nadilazi ljudsku sposobnost poimanja i osobito izmiče matematičkom određenju, dok transfinitno ne samo da obuhvaća golemu oblast mogućega unutar Božje spoznaje (*das weite Gebiet des Möglichen in Gottes Erkenntnis erfüllt*), nego nudi i istinsko, bogato i trajno rastuće područje idealnoga istraživanja. Štoviše, ono također doseže, prema mojem uvjerenju, čak i unutar stvorenoga svijeta određeni stupanj stvarnosti i postojanja (*Wirklichkeit und Existenz*), kako bi izrazilo slavu Stvoritelja (*Herrlichkeit des Schöpfers*), prema Njegovoj apsolutno slobodnoj volji i odluci (*Ratschluß*), snažnije nego što bi se to moglo postići samo „konačnim svijetom" (*durch eine bloß 'endliche Welt'*). Međutim, taj će uvid vjerojatno morati još dugo čekati na opće priznanje, osobito među teolozima, ma koliko on mogao biti vrijedan kao pomoć u unapređenju cilja koji oni [sc. teolozi] zastupaju, naime religije." (§5, citirano prema *Gesamm. Abh.*, str. 405–406)

Kada je riječ o vezi između teologije i teorije skupova, Vopěnka će u svojim više filozofskim razmatranjima o motivaciji i podrijetlu Cantorove teorije iznova isticati presudan utjecaj teoloških promišljanja. V. naročito prvo poglavlje u Vopěnka 2023, §1 („Theological Foundations"). Vencovská će u predgovoru knjizi Vopěnka 2023 također istaknuti da su kod Bolzana i Cantora „teološka razmatranja odigrala fundamentalnu ulogu, omogućivši im da proizvedu rezultate koji su etablirali aktualno beskonačne skupove kao legitimne objekte proučavanja u matematici" (Editor's Introduction, str. xix).

[248] „Dagegen scheint mir aber jede überflüssige Einengung des mathematischen Forschungstriebes eine viel größere Gefahr mt sich zu bringen und eine um so größere, als dafür aus dem Wesen der Wissenschaft wirklich keinerlei Rechtfertigung gezogen werden kann; denn das Wesen der Mathemtik lieg gerade in ihrer Freiheit." (str. 182 u Zermelovu izdanju *Gesamm. Abh.* iz 1932. godine)

nedvojbeno opravdalo i postupanje mnogih povjesničara matematike koji ističu Hilbertove *Grundlagen*, a ne Veroneseove *Fondamenti*, kao najreprezentativniju publikaciju nove, moderne matematike. Teoretičari „matematičkog modernizma" u pravilu se ne slažu oko toga što jesu ili što bi zapravo trebala biti distinktivna obilježja modernizma u matematici, kao ni oko toga koje bi deziderate neka matematička teorija trebala zadovoljiti kako bi se s pravom i nedvosmisleno mogla okarakterizirati kao moderna; i ne samo to, pojedini su povjesničari čak doveli u pitanje korisnost pojma „modernizam" za razumijevanje matematike u razdoblju od otprilike 1890. do 1930. godine.[249] Za naše potrebe neće biti nužno ulaziti u pojedinosti toga *Historikerstreita*. Drugim riječima, neovisno o tome je li moguće „jednoznačno okarakterizirati modernizam pomoću ove ili one kontrolne liste definirajućih svojstava" (Corry 2023: 419), dovoljno je što postoji konsenzus većine povjesničara da moderna matematika razdoblja *fin de siècle* u nekom minimalnom smislu podrazumijeva usmjerenost na nove skupovnoteorijske metode, kao i na aksiomatsku metodu, odnosno na aksiomatsku karakterizaciju matematičkih struktura kao ključnih elemenata istraživanja, te na metamatematička istraživanja aksiomatski izloženih formalnih teorija (usp. Ferreirós 2023: 453–454).

Stoga ne bi trebalo čuditi što se i Cantor, unatoč donekle mističnim teološko-metafizičkim razmatranjima (v. nap. 247) u vezi s teorijom skupova (na što su, kao što smo vidjeli u Odjeljku [2.4.1], prigovarali francuski matematičari već početkom 1880-ih), bezrezervno ubraja među moderniste. Tome je nedvojbeno pridonio i sâm Hilbert, koji je 1910. istaknuo da teorija skupova „predstavlja disciplinu koja danas zauzima središnji položaj i igra iznimnu ulogu u našoj znanosti te zrači (*ausströmt*) svojim snažnim utjecajem na sve grane matematike" (Hilbert 1910: 466[250]). I ne samo to, Hilbert je pružio snažan poticaj istraživanjima u području teorije skupova time što je presudno utjecao na sljedeći naraštaj teoretičara poput F. Bernsteina, E. Zermela, W. Ackermanna i H. Weyla, kao i time što je još 1900. godine, tijekom znamenitoga predavanja „Mathematische Probleme" (fr. „Sur les problèmes futurs des Mathématiques") na pariškom ICM-u, istaknuo nužnost izravnog dokazivanja (i) Cantorove hipoteze kontinuuma (**CH**) i (ii) neproturječnosti aksioma aritmetike, odnosno skupovnoteorijske karakterizacije realnih brojeva, kao prva dva na popisu od (inicijalno) deset najvažnijih matematičkih problema (usp. Hilbert 1902a: 70–

[249] Literatura o matematičkom modernizmu izrazito je opsežna. Klasične publikacije jesu Mehrtens 1990 i Gray 2008, premda se već Mehrtensov rad „Anschauungswelt versus Papierwelt: Zur historischen Interpretation der Grundlagenkrise der Mathematik" iz 1984. godine može promatrati kao svojevrsni *avant-propos* knjige *Moderne–Sprache–Mathematik*. Za kritičku evaluaciju v. Epple 1997, Grattan-Guinness 2009, Feferman 2009a, Siegmund-Schulze 2022, Corry 2023 i Heinig *et al.* 2023. Također v. i posebni tematski broj časopisa *Science in Context* (Vol. 35, Iss. 4, 2022), „Modernism in Science and Mathematics: A Second Look at Herbert Mehrtens" (ur. L. M. Verburgt), kao i četvrto poglavlje zbornika u čast Jeremyju Grayu, *The Richness of the History of Mathematics: A Tribute to Jeremy Gray* (ur. K. Chemla *et al.*), Springer, 2023, str. 393–511.

[250] Zanimljivo je da je Hilbert *ad loc.* istaknuo kako je „Minkowski prvi shvatio značaj Cantorove teorije [skupova] i nastojao je učiniti prepoznatljivijom", kao i da je prvi ukazao na neopravdanost pojedinih kritika Cantorove teorije u ranoj fazi njezine recepcije, u predavanju o aktualno beskonačnom u prirodi koje je održao na Lindemannovu seminaru u Königsbergu. V. i *Nachlass* F. Lindemann, sign. 2.2.2 (*Mathematisches Seminar* 1884–1903, Universitätsbibliothek Würzburg).

74).[251] I doista, kao što je pokazao Ferreirós (2023: 454), tijekom razdoblja *belle époque* (1890–1914) skupovnoteorijska razmatranja odigrala su presudnu ulogu u području

- moderne teorije [algebarskih] brojeva, koju su razvili Dedekind i Hilbert (v. Hilbertov znameniti *Zahlbericht* iz 1897.);
- algebre i algebarske geometrije (o čemu osobito ilustrativno svjedoči znamenita Van der Waerdenova *Moderne Algebra*, 1930);
- moderne analize, teorije integracije i mjere, razvijane u Francuskoj, osobito u radovima E. Borela (1871–1956) i H. Lebesguea (1875–1951);
- novih istraživanja u geometriji, kako u Italiji (Peano, Veronese, Pieri), tako i u Njemačkoj (Hilbert, Minkowski, Dehn) (usp. Ferreirós 2023: 454).

Ferreirós je istaknuo da su se među „matematičarima uključenima u ove pothvate oko 1900. godine" osobito isticali Nijemci i Talijani, koji su „najsnažnije promicali ne samo ovo novo stajalište" nego i „čitavu *novu matematiku* [Ferreirósov kurziv], koja se paradigmatski identificirala sa skupovnoteorijskim metodama" (*loc. cit.*).

Veronese je nedvojbeno prepoznao značaj teorije skupova, osobito u kontekstu zasnivanja matematike, uključujući i geometriju. O tome svjedoči uvod u *Fondamenti*, napose Cap. I („Nozioni e operazioni comuni") i Cap. II („Prime proprietà delle forme matematiche astratte"), koji predstavljaju Veroneseovu logičku i skupovnoteorijsku osnovu za kasniju aksiomatizaciju geometrije. Osnovni pojmovi i relacije koji čine tu osnovu jesu *element*, *neuređeni skup* (ono što Veronese naziva *gruppo*), *parcijalno uređeni skup* (ono što Veronese naziva *gruppo ordinato* ili *serie*), *relacije pripadanja* i *sadržavanja* odnosno *uključenosti* (koje bismo danas označili s $\in$ odnosno $\subset$) te skupovna korespondencija odnosno *izomorfizam*. Za više pojedinosti čitatelja upućujem na Odjeljak [2.7], u kojem sam detaljno usporedno izložio Veroneseove aksiomatizacije iz *Fondamenti* i iz *Elementi*. Ovdje je važno istaknuti da Veronese na nebrojeno mnogo mjesta u *Fondamenti* naglašava vrijednost Cantorovih uvida i pohvalno se izjašnjava o njegovim *pregevolissimi lavori* i rezultatima sadržanima u njima, čak i onda kada se ne slaže s pojedinim Cantorovim zaključcima. O tome najbolje svjedoči treće poglavlje uvoda u *Fondamenti* („Il numero nella sua prima formazione. Numeri naturali"), u kojem Veronese pokazuje duboko razumijevanje Cantorove teorije transfinitnih brojeva i njoj pripadajuće aritmetike (v. osobito napomene uz §2 na str. 30 i 34), kao i iznimno važan §3 četvrtoga poglavlja, naslovljen „Numeri transfiniti di Cantor – Perchè non possono applicarsi al confronto dei segmenti limitati della forma fondamentale", u kojem Veronese započinje konstrukciju alternativnih beskonačnih brojeva, danas poznatih kao *Veroneseovi brojevi*, koji se bitno razlikuju od Cantorovih transfinitnih ordinala (usp. §§4–5 u Veronese 1891: 106ff.) i predstavljaju anticipaciju kasnijih Robinsonovih *hiperrealnih brojeva* ili Conway-Ehrlichovih *nadrealnih brojeva*. Toj ćemo se konstrukciji posvetiti u Odjeljku [2.6.1].

[251] Popis je kasnije proširen te je obuhvaćao čak 23 problema – v. englesku verziju „Mathematical Problems", objavljenu u *Bulletin of the American Mathematical Society* (Hilbert 1902b). Hilbert je prethodno objavio dvije verzije na njemačkom jeziku, 1900. i 1901. godine, u *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, odnosno u *Archiv der Mathematik und Physik* (usp. Hilbert 1900 i 1901; v. i Hilbert 1935: 290–329).

Dakle, krajem 1880-ih i početkom 1890-ih Veronese, zajedno s drugim članovima Talijanske škole, osobito Peanom i Vivantijem, za razliku od vodećih matematičara u Njemačkoj (Weierstraßa, Kummera, Borchardta i osobito Kroneckera[252]) i Francuskoj (Hermiteov krug – v. Odjeljak [2.4.1]), zapravo promiče Cantorove rezultate. Ta je okolnost očito djelovala zbunjujuće pojedinim autorima, što i nije iznenađujuće, osobito ako imamo na umu Cantorovu negativnu kampanju protiv Veronesea (v. odjeljke [3.1], [3.1.1] i [3.1.2]). Međutim, ta je zabuna rezultirala nečim vrlo neobičnim kada je riječ o recepciji Veroneseove teorije. Naime, Veronese se počeo tretirati kao puki Cantorov *epigon* i kao netko tko je samo prvi primijenio Cantorove rezultate iz teorije skupova u geometriji, unatoč činjenici da je Veronese i u *Fondamenti* i u kasnijim publikacijama eksplicitno i ustrajno inzistirao na *bitnim razlikama* između Cantorove teorije skupova i vlastite nearhimedovske geometrije.[253] U Odjeljku [3.2] pokazat ću što je prouzročilo tu konfuziju i kakve je posljedice imala za kasniju fazu recepcije Veroneseove geometrije.

Može li se, uz ove skupovnoteorijske elemente, u Veroneseovu projektu zasnivanja geometrije pronaći i druge dvije prethodno naznačene važne odlike modernizma – aksiomatska metoda i s njom povezana metamatematika?

Kada je riječ o aksiomatskoj metodi, odgovor na to pitanje djelomično sam već dao u Odjeljku [2.3]. Podsjetimo, pojedini suvremeni povjesničari tendenciozno i pogrešno prikazuju povijesni razvoj moderne aksiomatike, stvarajući dojam da prije Hilbertovih *Grundlagen* nije učinjeno ništa na području aksiomatskoga zasnivanja geometrije, čime se neminovno umanjuje ili pak potpuno marginalizira doprinos talijanskih matematičara, predvođenih Veroneseom. To posljedično rezultira neutemeljenim diskvalifikacijama poput tvrdnje da talijanski matematičari „nisu uviđali širi značaj ni kreativni aspekt aksiomatske metode" te da „nisu iskoristili njezin potencijal za stvaranje novih geometrija" (Gray 2009b: 675–676). Slijedeći Paschova pionirska istraživanja iz *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882), kao i njima prethodeće radove o zasnivanju neeuklidskih geometrija (Riemann, Beltrami i Helmholtz), Veronese je uveo i zasnovao novu geometriju – nearhimedovsku – a u *Fondamenti* i *Elementi* poduzeo je i ambiciozan pothvat aksiomatizacije ne samo elementarne

[252] Već u pismu Dedekindu od 27.12.1873. Cantor govori o *autocenzuri*, odnosno o ograničenjima koja je „nametnuo objavljenoj verziji svojih istraživanja", a koja su „uzrokovana lokalnim okolnostima" (navedeno prema Ewald 2005: 847). O kakvim je lokalnim okolnostima bila riječ saznajemo iz Cantorova pisma Poincaréu od 22.1.1896.: „Čak ni moji raniji radovi, objavljeni nakon 1870. godine, nisu uživali odobravanje moćnika u Berlinu (*Berliner Machthaber*): Weierstraßa, Kummera, Borchardta, Kroneckera. […] Iako Kummer, Kronecker i Borchardt više nisu među živima te iako su ih Schwarz, Fuchs i Frobenius naslijedili, situacija u pogledu mene i mojih radova najvjerojatnije se nije ni najmanje popravila." (Meschkowski & Nilson 1991, № 151) Povijesno je zanimljivo primijetiti da je, za razliku od Njemačke, smjena generacija u Francuskoj donijela pozitivan pomak u recepciji teorije skupova. Naime, iako su, slijedeći Hermitea, Appell, Picard i Poincaré bili podozrivi prema vrijednosti i značaju Cantorove teorije, pripadnici sljedećega naraštaja, Maurice Fréchet (1878–1973), Borel i Lebesgue, prepoznali su potencijal primjene skupovnoteorijskih metoda u topologiji, teoriji integracije i teoriji mjere. Doduše, valja reći da je Poincaré vjerovao kako su Cantorovi rezultati važni, premda ih je, poput Mittag-Lefflera, smatrao u izvjesnom smislu „posve preuranjenima (*bien prématurées*) s obzirom na tadašnje stanje [razvoja matematičke] analize" (v. Poincaréovo pismo Mittag-Leffleru od 16.3.1883. i Hermiteovo pismo Mittag-Leffleru od 20.3.1883. u Dugac 2003, poglavlje „*Georg Cantor et les mathématiciens français*", str. 198–209).

[253] Primjerice, v. nap. 1 uz §3 u Veronese 1891: 102: „[D]ei numeri di G. Cantor *non facciamo alcun uso* nei fondamenti della geometria." (moj kurziv)

euklidske geometrije nego je, radi postizanja najvećega mogućeg stupnja općenitosti, svoju aksiomatizaciju *ab initio* prilagodio tako da obuhvati i Riemannovu geometriju, budući da standardna euklidska ili parabolička geometrija, kao što je poznato, predstavlja samo poseban slučaj opće Riemannove (diferencijalne) geometrije.[254] Definitivan odgovor na pitanje o Veroneseovoj aksiomatskoj metodi može se pronaći u Odjeljku [2.7], koji sadržava rekonstrukciju i usporedni prikaz Veroneseovih dviju aksiomatizacija te moj popratni komentar.

Kada je pak riječ o metamatematici, na prvi pogled čini se da bi odgovor na to pitanje morao biti negativan, utoliko što bi većina povjesničara logike i zasnivanja matematike bila sklona ustvrditi da je nemoguće govoriti o metamatematici neovisno o takozvanom *Hilbertovu programu* zasnivanja matematike iz 1920-ih (dakle nakon Veroneseove smrti) i, općenito uzev, da ne može biti govora ni o kakvoj *prehilbertovskoj metamatematici*. Tako Patricia Blanchette zaključuje:

> „*Grundlagen der Geometrie* p*redstavljaju prekretnicu u razvoju moderne matematike i logike*. Iako je spis posvećen geometriji, njegov se trajni utjecaj u širem smislu odnosi na [rasvjetljavanje] uloge aksioma u matematičkim teorijama i na sustavno razmatranje metateorijskih pitanja poput konzistentnosti i nezavisnosti [aksioma]. Pruživši nam bogatu zbirku dokaza konzistentnosti i nezavisnosti, Hilbert je pokazao snagu „strukturalnog" shvaćanja aksioma te postavio temelje onoga što će ubrzo postati naš suvremeni modelnoteorijski pristup [proučavanju] formalnih sustava." (Blanchette 2024, §1; moj kurziv)

Slične se izjave lako mogu pronaći i kod drugih suvremenih autora i, doista, čini se da se čitava dvadesetostoljetna tradicija proučavanja osnova matematike i logike (Post, Church, Kleene, Bernays, Herbrand, Quine, Tarski, von Neumann, Beth, Gödel, Robinson, Henkin i mnogi drugi) nadovezuje na Hilberta, koji je u radu „Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung" iz 1922. godine uveo i prvi put definirao pojam „metamatematika":

> „Iako ovo izlaganje sadržava samo skicu i prve korake moje teorije dokaza (*Beweistheorie*), ono ipak otkriva jednu opću tendenciju i pravac u kojem bi novo zasnivanje matematike (*Neubegründung der Mathematik*) trebalo ići. Dva se aspekta [ovoga projekta] osobito ističu. *Prvo*, sve što je do sada činilo uobičajenu matematiku (*eigentliche Mathematik*) sada treba rigorozno formalizirati [sc. aksiomatizirati – prim. S. P.], tako da uobičajena matematika ili matematika u užem smislu (*Mathematik in engerem Sinne*) postane skup dokazivih formula (*zu einem Bestande an beweisbaren Formeln wird*). Formule toga skupa razlikuju se od uobičajenih matematičkih formula (*gewöhnlichen Formeln der Mathematik*) samo po tome što, povrh matematičkih simbola,

[254] Riemann je u svom habilitacijskom predavanju „Über die Hypothesen usw." iz 1854. godine poopćio Gaußova istraživanja *intrinzične geometrije* ploha (dakle, neovisno i bez ikakva pozivanja na prostor u koji su te plohe uronjene), osobito u vezi s takozvanom *mjerom zakrivljenosti ploha* (poznatom kao *Gaußova zakrivljenost*), te pokazao da postoje prostori ili, Riemannovim rječnikom, mnogostrukosti (*Mannigfaltigkeiten*) sa stalnom mjerom zakrivljenosti K. Ako je $K = 0$, govorimo o ravnom, odnosno euklidskom prostoru; ako je $K < 0$, o hiperboličkom; a ako je pak $K > 0$, o eliptičkom prostoru. Eliptička geometrija naziva se još i Riemannovom geometrijom u užem smislu. Za više pojedinosti o Riemannovu pristupu v. Laugwitz 1999, osobito treće poglavlje (§§3.1–3.1.5).

> sadržavaju još i simbol → te simbole kojima se označuju tvrdnje [sc. iskazi] (*die Zeichen für Aussagen*). To odgovara mojem odavno uvriježenom mišljenju da je nužno istodobno razvijati aritmetiku i formalnu logiku zato što su aritmetičke i logičke istine međusobno srasle i nerazdvojne (*Verknöcherung und Untrennbarkeit arithmetischer und logischer Wahrheiten*). *Drugo*, uobičajenoj matematici treba pridodati jednu novu vrstu matematike, jednu metamatematiku (*eine Metamathematik*), čija je uloga osigurati onu prvu, štiteći je kako od tiranije nepotrebnih zabrana i ograničenja, tako i od poteškoća koje izazivaju paradoksi. U toj se metamatematici, za razliku od čisto formalnoga rasuđivanja koje se primjenjuje u stvarnoj matematičkoj praksi, primjenjuje sadržajno (*inhaltliche*) rasuđivanje, i to uvijek samo kako bi se dokazala neproturječnost aksioma (*Widerspruchsfreiheit der Axiome*)." (Hilbert 1922: 174)

Dakle, kao što možemo vidjeti, u središtu Hilbertova programa i njegova ambicioznoga dokaznoteorijskog pothvata[255] nalazi se proučavanje aksiomatskih sustava i, osobito, dokazivanje njihove neproturječnosti te, o čemu svjedoče već *Grundlagen* iz 1899. godine, nezavisnosti aksioma. U radu „Die logischen Grundlagen der Mathematik" Hilbert će dodati da cilj njegovih „istraživanja o novom zasnivanju matematike nije ništa drugo doli konačno uklanjanje općih sumnji u pogledu izvjesnosti matematičkoga rasuđivanja" (Hilbert 1923: 151). Međutim, je li s povijesnoga gledišta doista točno da prije Hilberta nije bilo metamatematičkih istraživanja aksiomatskih sustava? Samo ako se previdi činjenica da je mnogo prije metamatematike postojala *metageometrija*.

„Metageometrija" je neobičan pojam s uzbudljivom poviješću dugoga trajanja i neobičnom poviješću transmisije i recepcije.[256] Uvidom u još uvijek autoritativnu *Bibliography of Non-Euclidean Geometry* Sommervillea (1911) možemo vidjeti da se prve publikacije u čijem se naslovu pojavljuje „metageometrija" javljaju oko 1890. godine. No ono što mnogi suvremeni tumači previđaju jest činjenica da je sâm Hilbert skovao pojam „metamatematika" 1920-ih upravo po uzoru na pojam „metageometrija", čiju genezu možemo pratiti gotovo pola stoljeća unatrag, dakle i dalje od 1890-ih, sve do razdoblja ranih 1870-ih, kada rasprave o ontološkom i epistemološkom statusu novih neeuklidskih geometrija postaju aktualne u matematičkim i filozofskim krugovima, zahvaljujući objavljivanju Gaußove korespondencije u okviru njegovih sabranih djela, a osobito epistolarne razmjene s Heinrichom Schumacherom (1780–1850), koja se pojavila između 1860. i 1863. godine.[257] Kao što je

---

[255] Hilbertov program (i njegov slom u svjetlu Gödelovih rezultata o nepotpunosti) predstavljao je jedan od ključnih poticaja za razvoj suvremene teorije dokaza, koja započinje pionirskim istraživanjima Gerharda Gentzena (1909–1945) sredinom 1930-ih godina. Usp. Zach 2023, §§4–5. Sâm Hilbert koristio je pojmove „metamatematika" i „teorija dokaza" kao sinonime (primjerice, u *Grundlagen der Mathematik* iz 1934. mogu se pronaći formulacije poput „Beweistheorie auch 'Metamathematik' genannt").

[256] No unatoč tomu, čak ni ugledni *Archiv für Begriffsgeschichte* (primjerice) nema nijedan rad posvećen „metageometriji". Za povijest pojma „metamatematika" v. Wille 2011 te natuknicu „Metamathematik" autora G. Gabriela i K. Schüttea u *Historisches Wörterbuch der Philosophie Online* (ur. J. Ritter, K. Gründer i G. Gabriel, Schwabe Verlag).

[257] V. i *Carl Friedrich Gauß Werke*, Bd. IV (Göttingen, 1873), osobito dio posvećen geometriji (str. 189ff.), koji je priredio Paul Stäckel (1862–1919), koautor znamenite *Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895). V. također i *Gauß Werke*, Bd. VIII, poglavlje „Grundlagen der Geometrie" (*Nachträge zu Bd. IV*), kao i Stäckelov prilog „Gauß als Geometer" u *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss* (ur. F. Klein *et al.*), *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* Mathem.-physik. Klasse, 1917; usp. i Halsted 1900. Na

istaknuo Petronijević, „matematički svijet tada je prvi put doznao za neeuklidsku geometriju i njezine tvorce“ (Petronijević 1951: 2–3, nap. 3).

Ono što nam otkrivaju Gaußova pisma i skice, kao i radovi Lobačevskog (počevši od studije „*О началах геометрии*“ iz 1829.) i Bolyaija (1832), koji su tek tada postali poznati (i ubrzo prevedeni na francuski jezik[258]), jest da je u središtu njihovih razmatranja bila teorija paralelnih pravaca odnosno, preciznije, *utvrđivanje nezavisnosti* Euklidova petog postulata (ili, što je ekvivalentno, Playfairova aksioma) od preostalih aksioma geometrije. Pitanje nezavisnosti aksioma tradicionalno se, još od Proklova vremena[259], razmatralo u kontekstu pitanja *dokazivosti* aksioma o paralelama iz preostalih aksioma geometrije. Usporedno s pitanjem nezavisnosti i dokazivosti aksioma o paralelama, matematičari su se u drugoj polovini 19. stoljeća bavili i problemom *utvrđivanja neproturječnosti* novouvedene hiperboličke geometrije, o čemu svjedoče već prve važne publikacije poput Beltramijeva *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* iz 1868. godine, niz Helmholtzovih radova objavljivanih također od 1868.[260] godine ili pak Kleinov *Erlanger Programm*[261] iz 1872. godine. Evo kako je taj pokret okarakterizirao američki matematičar James P. Pierpont (1866–1938) u predavanju na matematičkoj sekciji Međunarodnoga kongresa umjetnosti i znanosti (*International Congress of Arts and Science*), održanoga u St. Louisu 1904. godine:

> „*Kritičko-sintetički pravac* [u zasnivanju geometrije] predstavlja povratak starim sintetičkim metodama Euklida, N. I. Lobačevskog i Jánosa Bolyaija, ali s dodatnom značajkom razrađene i precizne logike. Primarni predmet istraživanja nije

pojedina Gaußova razmatranja o neeuklidskim geometrijama među prvima je upozorio von Waltershausen u Gaußovoj biografiji iz 1856. godine.

[258] Hoüel je *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* Lobačevskog preveo 1866., a Bolyaijev *Appendix* već 1867. godine.

[259] Russell je u izvjesnom smislu u pravu kada kaže da metageometrija započinje odbijanjem da se aksiom o paralelama prihvati bez dokaza (usp. Russell 1897, §10). I doista, već je Proklo u komentaru prve knjige *Elemenata* istaknuo da bi peti postulat

> „trebalo potpuno izbrisati s popisa postulata jer je riječ o *teoremu* (*θεώρημα γάρ ἐστι*) koji uključuje mnoge teškoće (*πολλὰς μὲν ἀπορίας ἐπιδεχόμενον*), a koje je još Ptolemej pokušao razriješiti u jednoj od svojih knjiga. Međutim, on se u svome dokazu oslanja na mnoge definicije i [druge] teoreme (*πολλῶν δὲ εἰς ἀπόδειξιν δεόμενον καὶ ὅρων καὶ θεωρημάτων*), a čak je i sâm Euklid izložio konverz petoga postulata kao teorem (*καὶ τό γε ἀντιστρέφον καὶ ὁ Εὐκλείδης ὡς θεώρημα δείκνυσιν*). […] Bit će nužno pokazati odakle potječe njegova očevidnost, jer se, prema mojem mišljenju, ona ne očituje s nedokazivom jasnoćom, nego, naprotiv, postaje jasna tek i jedino posredstvom dokaza (*τότε γὰρ ἀναγκαῖον αὐτοῦ δεῖξαι τὴν ἐνάργειαν οὐχ ἀναποδείκτως προφαινομένην ἀλλὰ δι' ἀποδείξεων γνώριμον γιγνομένην*).“ (navedeno prema standardnom Friedleinovu izdanju iz 1873., *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, str. 191–193; moj kurziv)

[260] Prvi važan Helmholtzov rad na ovu temu bio je „Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen“ iz 1868. godine, oblikovan po uzoru na Riemannovo habilitacijsko predavanje „Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen“, koje je objavljeno iste godine. Nakon toga uslijedio je niz drugih radova, kasnije sabranih u *Schriften zur Erkenntnistheorie*, poput „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“ (1870), „Die Tatsachen in der Wahrnehmung“ (1878) i „Zählen und Messen“ (1887). V. Hertz & Schlick 1921/1977.

[261] F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen*, Erlangen, Verlag von A. Deichert, 1872 (pretisnuto u *Math. Annalen*, Bd. 43, 1893). Za kritičko izdanje, v. Rowe 2025.

> neeuklidska, nego euklidska geometrija, a glavni je cilj uspostaviti sustav aksioma za naš uobičajeni prostor koji je potpun, kompatibilan i nesvodiv (*complete, compatible, and irreducible*). Osnovni pojmovi – *točka*, *pravac*, *ravnina*, *između*, *podudarnost*, itd. – uvode se kao apstraktni znakovi (*abstract marks*) čija su svojstva određena uzajamnim odnosima među aksiomima. **U takvu poretku ideja**, **koji geometriju promatra kao puku granu čiste logike**, **nema mjesta za geometrijsku intuiciju**. **Napori ove škole već su okrunjeni iznimnim uspjehom i od nje se u budućnosti može mnogo očekivati**. **Njezini su vodeći predstavnici Giuseppe Veronese**, Peano, Pieri, Padoa, Burali-Forti i Tullio Levi-Civita u Italiji, David **Hilbert** u Njemačkoj, E. H. Moore u Americi i Russell u Engleskoj." (Pierpont 1904; moja emfaza dodana podebljanim slovima; usp. i Marchisotto *et al.* 2021, §5.5, str. 111)

Ovaj ulomak nedvojbeno pokazuje da je početkom 20. stoljeća u matematičkim krugovima bilo općepoznato i općeprihvaćeno da su Veronese i Hilbert bili vodeći predstavnici moderne aksiomatike geometrije. Za naše je potrebe osobito zanimljivo utvrditi kronologiju Veroneseovih i Hilbertovih istraživanja kako bismo ustanovili tko je na koga izvršio utjecaj – Veronese na Hilberta ili pak Hilbert na Veronesea (kako to sugeriraju pojedini suvremeni autori[262]). Prije nego što pristupimo toj analizi, valja istaknuti da se metageometrija u 19. stoljeću nije odnosila samo na proučavanje teorije paralelnih pravaca i neeuklidskih geometrija, nego i na rasprave o statusu n-dimenzionalne geometrije, odnosno geometrije hiperprostora. Štoviše, pregledom relevantnih povijesno-filozofskih leksikona Wille je utvrdio da su se „Metamathematik" i pridjev „metamathematisch" u početku čak ponajprije koristili za označavanje istraživanja prostora od tri i više dimenzija (Wille 2011: 340). Povijesno gledano, geometrija hiperprostora u strogom smislu započinje Graßmannovom monumentalnom *Ausdehnungslehre* iz 1844. godine (drugo, prerađeno izdanje pojavilo se 1862.) i Riemannovim habilitacijskim predavanjem iz 1854. godine.[263]

Kao što sam pokazao u Odjeljku [2.3], Veronese je bio jedan od pionira rigoroznoga proučavanja geometrije hiperprostora i, štoviše, jedan od vodećih autoriteta za algebarske i projektivne metode proučavanja onoga što je Riemann nazvao n-dimenzionalnim mnogostrukostima (n-*Mannigfaltigkeiten*). O tome svjedoče njegove vrlo utjecajne publikacije iz druge polovice 1870-ih i prve polovice 1880-ih godina, kao i rasprava vođena na stranicama Peanova časopisa *Rivista di Matematica* tijekom 1891. godine (v. i Veroneseov osvrt u *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* iz 1892.).[264] Ti su Veroneseovi rezultati uvršteni u najreprezentativnije enciklopedijske natuknice posvećene hipergeometriji, među kojima se osobito ističe Segreov opsežni prilog „Mehrdimensionale Räume" u Kleinovoj *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (Bd. III.2, Hefte 7–13, str. 769–972), u kojem su čitavi odjeljci posvećeni Veroneseovim rezultatima i metodama. Možemo, dakle, zaključiti da je Veronese

[262] Za sada je kao ilustraciju dovoljno navesti samo naslov jedne publikacije: „The Contributions of Hilbert and Dehn to Non-Archimedean Geometries and Their Impact on the Italian School" (*sic!*). V. Cerroni 2007. Za detaljniju analizu uzroka koji su doveli do pojave takve vrste tumačenja v. odjeljke [3], [3.1.2] i [3.2].

[263] Za detaljniji povijesni pregled v. Segre 1921, §1, „Geschichtliche Einleitung".

[264] I ne samo to, upravo su Veronese, zajedno s Graßmannom i Riemannom, uvršteni među kanonska djela (*grundlegende Werke*) iz područja hipergeometrije u Baumgartner 1954.

već u razdoblju 1876.–1882. godine dao važan doprinos jednom aspektu proučavanja i razvoja metageometrije.

S druge strane, kada je riječ o neeuklidskim geometrijama, Veroneseovi su doprinosi i na tom području rano bili prepoznati, o čemu možda najbolje svjedoči činjenica da je Russell u svojoj disertaciji *An Essay on the Foundations of Geometry* često upućivao na Veroneseove *Grundzüge* (njemački prijevod *Fondamenti* iz 1894.) kao na referentno djelo posvećeno, među ostalim, i neeuklidskoj geometriji te je, štoviše, na jednom mjestu ustvrdio da se u prikazu „povijesnog razvoja metageometrije" (*sic!*) Veroneseovo ime – uz Pascha, Cremonu i Poincaréa – nužno mora spomenuti u okviru pregleda „najvažnijih djela iz područja metageometrije" (Russell 1897, §46). Tu Russellovu napomenu potvrđuje i činjenica da su Veroneseovi radovi već početkom 20. stoljeća uvršteni u već spomenutu *Bibliography of Non-Euclidean Geometry*, kao i u Stäckel-Engelovu *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (1895).

Kada je pak riječ o genezi Hilbertovih ideja o metamatematici, njegov prvi susret s razmatranjima te vrste može se datirati na 16.12.1884., kada je održao predavanje na Lindemannovu seminaru u Königsbergu posvećeno prikazu tada vrlo popularne knjige *Die Axiome der Geometrie, eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtz'schen Raumtheorie*, koju je 1877. u Leipzigu objavio neokantovac i ugledni tumač Kantove filozofije Benno Erdmann (1851–1921).[265] Zanimljivo je da je već Erdmann skrenuo pozornost na to da se o „takozvanoj metamatematici u filozofskoj literaturi govore stvari od kojih se diže kosa na glavi" (*es werden in philosophischen Schriften geradezu haarsträubende Dinge von der sogenannten Metamathematik erzählt*) (Erdmann 1877: 125; usp. Wille 2011: 338–339). On je prije svega tu imao na umu niz oštrih reakcija, osobito među neokantovcima, koji su pojavu neeuklidskih geometrija tumačili kao izazov Kantovoj filozofiji geometrije i tezi o geometriji kao sintetičkoj *a priori* disciplini (usp. Odjeljak [1.3]). I doista, kao što je primijetio Helmholtz, izraz „metageometrija" u tom je razdoblju imao negativnu konotaciju i, osobito u filozofskim krugovima, rabio se pejorativno:

> „Ovaj naziv [sc. metageometrija] naši su protivnici, naravno, skovali i dodijelili nam ga *u ironičnom smislu* (*in ironischen Sinne*), *po uzoru na metafiziku* (*nachgebildet der Metaphysik*). No budući da tvorci neeuklidske geometrije nikada nisu inzistirali na njezinoj objektivnoj istinitosti, sasvim je prihvatljivo da zadržimo taj naziv." (v. spis „Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze" iz 1878. u Helmholtz 1883, §LXXIX, str. 640, nap. 2)

Mišljenje da metageometrija nalikuje metafizičkim spekulacijama oblikovalo se u trenutku kada su pojedini matematičari i filozofi počeli izvoditi implikacije novih geometrija za naše shvaćanje realnoga, fizičkog prostora te za kantovsku epistemologiju geometrije i s njom povezanu koncepciju prirode i statusa geometrijskih aksioma i iskaza. Doduše, izraz „metageometrija" u tom negativnom i ironičnom smislu nisu rabili samo neokantovci; tako su ga upotrebljavali i pojedini matematičari – osobito Cantor. Primjerice, u pismu Veroneseu od 17.11.1890., Cantor govori o „nesretnim i kobnim zabludama" (*unglückliche wie*

[265] Na Helmholtzov prijedlog ova je studija prihvaćena kao Erdmannov habilitacijski rad (*Habilitationsschrift*), čime mu je omogućeno da započne akademsku karijeru kao *Privatdozent* u Berlinu.

verhängnisvolle Täuschung) u koje Veronese, „poput metageometara Riemanna, Helmholtza i njima sličnih", navodno vjeruje, zbog čega uopće ne želi s njim nastavljati bilo kakvu polemiku ili raspravu.[266] *Pace* Cantor, Helmholtz i Veronese mogli su bez ikakvih poteškoća prihvatiti da se o njihovim istraživanjima govori kao o metageometriji zato što su pod tim izrazom prije svega podrazumijevali onu vrstu metateorijskoga istraživanja formalnih aspekata i svojstava geometrijskih sustava koja se ponajprije tiče pitanja uzajamnih odnosa među aksiomima, utvrđivanja njihove nezavisnosti (odnosno uvjeta njihove dokazivosti) i *konstrukcije modela*, dakle pitanja o konzistentnosti novih geometrija, odnosno o njihovoj prihvatljivosti u čisto logičkom, odnosno strogo matematičkom smislu. No nije li upravo Hilbert prvi provodio istraživanja te vrste u *Grundlagen der Geometrie* iz 1899. godine? Podsjetimo, u uvodu ističe da je njegov glavni cilj „uspostavljanje aksioma geometrije i istraživanje njihovih uzajamnih odnosa" (*die Aufstellung der Axiome und die Erforschung ihres Zusammenhanges*) (Hilbert 1899, *Einleitung*). Osvrnimo se ukratko na genezu *Grundlagen*.

Uvidom u Hilbertovu bibliografiju i dostupne biografije, ako izuzmemo jedan rad iz geometrije objavljen 1895. godine, čini se da se Hilbert do 1899. gotovo isključivo bavio algebrom i teorijom brojeva (v. nap. 270 i 272 *infra*). Međutim, Toepell je u izvanrednoj studiji pokazao da se, izuzmemo li prethodno spomenuti prvi mladenački susret s više filozofskim aspektima metageometrije krajem 1884. godine, Hilbertov interes za logičke i metamatematičke aspekte zasnivanja geometrije razvijao vrlo sličnim putem kao i Veroneseov. Naime, prije rada na aksiomatizaciji geometrije Hilbert se zanimao za projektnu geometriju, osobito za Paschova *Vorlesungen* (usp. Contro 1976 i v. Odjeljak [2.3] *supra*), o čemu svjedoči i rukopis predavanja „Projektive Geometrie" iz ljetnog semestra 1891. godine (v. Toepell 1986, §3, str. 334–336). Drugi dio toga rukopisa otkriva Hilbertovo zanimanje za aksiomatizaciju geometrije, koje nekoliko godina kasnije postaje posve očito, kada je u ljetnom semestru 1894. održao predavanja pod naslovom „Die Grundlagen der Geometrie", u kojima mu je glavni cilj bio „stvoriti što je moguće čišći i posve egzaktan aksiomatski sustav neeuklidske geometrije, uključujući [elementarnu] euklidsku geometriju" (Toepell 1986, §4, str. 336). Zanimljivo je da, iako tim bilješkama prethodi popis od više od četrdeset najvažnijih radova o toj temi objavljenih na njemačkom jeziku (uključujući, primjerice, publikacije Pascha, Helmholtza, Riemanna, Kleina i Erdmanna), na tom popisu ne nalazimo njemački prijevod *Fondamenti*, koji se pojavio upravo te godine. To upućuje na zaključak da Hilbert u tom razdoblju najvjerojatnije još nije poznavao Veroneseova istraživanja.

Međutim, ključni poticaj za pisanje *Grundlagen* uslijedio je 1898. godine, kada je Friedrich Schur (1856–1932) poslao pismo Felixu Kleinu (datirano 30.1.1898.; usp. Cod. Ms. F. Klein 11, 920), u kojem mu je ukazao, ni manje ni više, nego na mogućnost zasnivanja geometrije bez Arhimedova aksioma! Schur je o tom uvidu prethodno obavijestio i druge matematičare – osobito je relevantna i ilustrativna njegova korespondencija s Wilhelmom Killingom (1847–1923) i Friedrichom Engelom (1861–1941), koji su, poput Schura i Kleina,

[266] „Nur unsre bisherige Discussion möchte ich aus sachlichen Gründen nicht weiter fortsetzen, und was Sie mir jetzt schreiben ist geeignet, meine Ueberzeugung von der Nutzlosigkeit dieser Besprechungen noch zu vergrössern." (v. Meschkowski & Nilson 1991, № 129)

ponajprije bili geometri.[267] Iz pisama Killingu od 2. i 3.1.1892. doznajemo da se Schur već tada spremao proučiti Veroneseove *Fondamenti* (Voelke 2010: 230–231[268]) i, štoviše, da je i Killingu – koji je u tom razdoblju pisao prvi svezak *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* (Paderborn, 1893) – skrenuo pozornost na Veroneseovu knjigu, na koju će se Killing poslije vrlo opsežno i često pozivati (v. Killing 1893 i Killing 1898). Kao što je primijetio Voelke, premda je Schur bio kritički raspoložen prema *Fondamenti*, „on je neovisno o tome prihvatio i preuzeo iz knjige barem jednu ključnu i važnu ideju, naime, da Arhimedov aksiom nije nužan za razvijanje geometrije" (*op. cit.*, str. 232). O tome svjedoči i sljedeći ulomak iz Schurovih utjecajnih *Grundlagen der Geometrie*, koje su mu 1912. godine donijele prestižnu *Lobatschewski Preis* za doprinose geometriji:

> „Nova era istraživanja u području zasnivanja geometrije otvorena je time što se pitanje koje se ranije postavljalo samo u vezi s aksiomom o paralelama sada prirodno moralo postaviti i u vezi s drugim aksiomima. Takva je istraživanja *prvi sustavno poduzeo Veronese* (*zuerst systematisch von Veronese*) u *Fondamenti di geometria* (Padova, 1891) […] postavivši geometriju na posve jedinstvene temelje (*auf ganz eigenartige Grundlagen) time što je proveo osobito temeljito istraživanje* (*einer gründlichen Untersuchung*) *aksioma neprekidnosti*, odnosno takozvanoga Arhimedova postulata. To je potom dovelo i do novoga rezultata, naime da je velik dio geometrijskih teorema također nezavisan od toga postulata." (Schur 1909: iv–v; moj kurziv)

Schur je očito smatrao da Veroneseov rezultat o nezavisnosti Arhimedova aksioma (iz Veronese 1889) predstavlja otkriće od epohalnoga značenja. O tome svjedoči i njegov rad „Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie", objavljen nakon prethodno spomenute prepiske s Kleinom iz siječnja 1898., i to upravo na Kleinov prijedlog u *Mathematische Annalen* iste godine. I ondje nalazimo tvrdnju da je Veronese prvi utvrdio kako je „geometrija nezavisna od Arhimedova postulata" (*dass die Geometrie vom Postulate des Archimedes unabhängig sei*), dodajući, doduše, da postoje određeni prigovori u vezi s infinitezimalnim brojevima koje je Veronese uveo kako bi ustanovio taj rezultat (Schur 1898: 402; v. i nap. ***).[269] No kakve to točno veze ima s Hilbertom i s genezom njegovih *Grundlagen*? Kao što je pokazao Toepell, Hilbert obnovu svojega zanimanja za osnove geometrije duguje upravo Schurovu radu i pismu Kleinu koje mu je prethodilo. Štoviše, i sâm Schur u jednom pismu iz veljače 1899. ističe da se Hilbert *do tada* isključivo zanimao za teoriju brojeva.[270] Toepell navodi Hilbertovo pismo Hurwitzu od 16.3.1898. (Cod. Ms. Math. Arch. Nr. 76/272), u kojem Hilbert kaže:

> „Schur je u jednom nedavnom pismu Kleinu pokazao da se […] Pascalov teorem [o tetivnom šesterokutu] može dokazati […] bez oslanjanja na Arhimedov aksiom (*ohne das Archimedische Axiom*). *To pismo*, s čijim nas je sadržajem upoznao Schönflies tijekom predavanja održanog u Matematičkom društvu, *potaknulo me da se ponovno*

[267] V. posebno pismo Engelu od 26.5.1898. u Voelke 2010: 234.

[268] Voelke *ad loc.* navodi da je „Schur izjavio kako je već naručio Veroneseovu knjigu *Fondamenti di geometria*."

[269] Za raspravu i kritičku evaluaciju tih prigovora v. odjeljke [3.1], [3.1.1] i [3.1.2] *infra*.

[270] „Er [sc. Hilbert] sitzt neben hinter einer Mauer, die ihm alles, was nicht mit Zahlentheorie zusammenhängt, fern hält." Citirano prema Voelke 2010: 237, nap. 24.

pozabavim svojim starim idejama o zasnivanju euklidske geometrije.“ (citirano prema Toepell 1986, §5, str. 338; v. i nap. 13; moj kurziv)

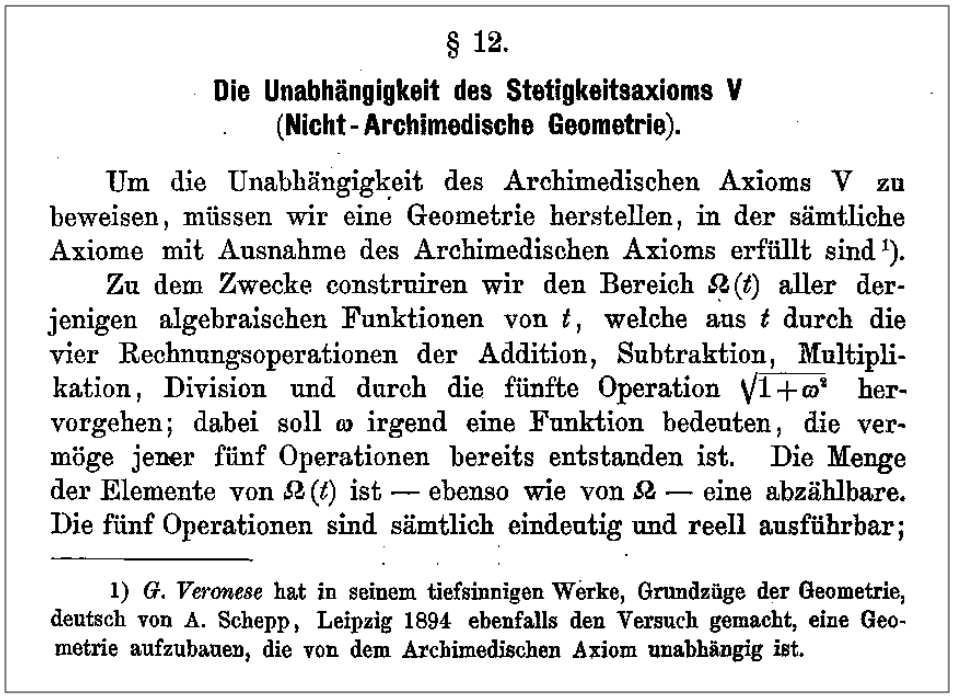
Dakle, ono što ovi ulomci nedvojbeno utvrđuju kao neupitnu povijesnu činjenicu jest da su Veroneseova istraživanja nezavisnosti Arhimedova aksioma iz 1889. i 1891. ostvarila presudan utjecaj na Hilberta, konačno ga opredijelivši da se i sâm ponovno posveti proučavanju osnova geometrije, iz čega su 1899. godine proizašli *Grundlagen der Geometrie*. Doduše, Veroneseov je utjecaj bio posredan i ostvaren preko Schura, koji je sâm proučavao Veroneseov opus, Schönfliesa, koji je već 1897. objavio prvi rad posvećen Veroneseu[271], te Kleina, koji je, kao što smo vidjeli u Odjeljku [1.2], bio neposredno upoznat s Veroneseovim radom budući da mu je bio profesor u Leipzigu tijekom 1880/81., a pratio je njegov rad i u sljedećem razdoblju, o čemu primjerice svjedoče njegova predavanja iz elementarne matematike objavljena 1908. godine (u kojima se referira na *Fondamenti*). Hilbertove bilješke nastale tijekom uskrsnih praznika 1898. godine, kao i bilježnica koja sadrži rukopis predavanja „Grundlagen der Euklidischen Geometrie“, održanih u zimskom semestru 1898/99. u Göttingenu (čijom će preradom nekoliko mjeseci poslije nastati *Grundlagen*), otkrivaju nam da, kako je to formulirao Toepell, „pitanja o nezavisnosti Arhimedova aksioma [u njima] prominentno figuriraju“, odnosno imaju središnju ulogu (Toepell 1986: 339).[272] Štoviše, Hallettovo i Majerovo kritičko izdanje Hilbertovih predavanja posvećenih osnovama geometrije pokazuje da je Hilbert pri pripremi predavanja 1898/99., za razliku od predavanja iz 1894., sada detaljno proučio njemački prijevod *Fondamenti* te da se, zanimljivo, zanimao i za ono što je Veronese imao reći o razvoju neeuklidskih geometrija u dodatku *Fondamenti* (usp. Hallett & Majer 2004: 208, Specific note (4)(*d*), Remark 5).[273] Naposljetku, kada pogledamo prvo izdanje *Grundlagen* iz 1899. godine, vidimo da Hilbert u njemu upućuje na svega nekoliko matematičara – Kleina, Veronesea, Schura, Killinga i Stolza – pri čemu se na Veronesea poziva čak dvaput: u uvodu i u bilješci koja prati znameniti §12, posvećen nezavisnosti Arhimedova aksioma (v. *Sl. 13*). Kao što možemo vidjeti iz navedene fusnote, Hilbert je Veroneseove *Fondamenti* smatrao „dubokim djelom“ (*tiefsinniges Werk*) u kojem je prvi put učinjen pokušaj razvijanja geometrije nezavisne od Arhimedovog aksioma. Jedno moguće objašnjenje uzroka nestanka ove bilješke iz kasnijih izdanja *Grundlagen* iznijet ću u Odjeljku [3.2].

---

[271] Riječ je o radu „Sur les nombres transfinis de Mr. Veronese“, koji je Veroneseov mentor Luigi Cremona predstavio u *Accademia dei Lincei*. Objavljen je u *Rendiconti d. R. Acc. dei Lincei*, S. 5, V. 6, str. 362–368. Schönflies će objaviti još jedan rad na sličnu temu 1906. godine, „Über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter (nicht archimedischer) Maßbestimmung“, u *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 15, str. 26–41.

[272] Prema svjedočanstvu Hilbertova studenta O. Blumenthala, kasnijega urednika *Mathematische Annalen*, „početak [tih] predavanja izazvao je sveopće zaprepaštenje i čuđenje (*Staunen und Bewenderung*)“ jer „nitko od nas nije znao da se Hilbert bavio pitanjima u vezi s geometrijom budući da nam je uvijek govorio samo o brojevnim poljima (*nur von Zahlkörpern*)“ (citirano prema Toepell 1986: 339, nap. 14).

[273] Hilbert tako na str. 74 bilježaka za „Grundlagen der Euklidischen Geometrie“ dodaje sebi napomenu: „Interessante Bemerkungen über […] das Parallelenaxiom […] siehe in Veronese, *Grundzuge der Geometrie*, Teubner, 1894.“ (citirano prema Hallett & Majer 2004: 263). Za više pojedinosti o takozvanom *Hilbert Edition*, odnosno projektu priređivanja i kritičkoga izdavanja Hilbertove ostavštine, v. Majer 2010.



§ 12.

Die Unabhängigkeit des Stetigkeitsaxioms V (Nicht-Archimedische Geometrie).

Um die Unabhängigkeit des Archimedischen Axioms V zu beweisen, müssen wir eine Geometrie herstellen, in der sämtliche Axiome mit Ausnahme des Archimedischen Axioms erfüllt sind [1]).

Zu dem Zwecke construiren wir den Bereich $\Omega(t)$ aller derjenigen algebraischen Funktionen von t, welche aus t durch die vier Rechnungsoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und durch die fünfte Operation $\sqrt{1+\omega^2}$ hervorgehen; dabei soll ω irgend eine Funktion bedeuten, die vermöge jener fünf Operationen bereits entstanden ist. Die Menge der Elemente von $\Omega(t)$ ist — ebenso wie von Ω — eine abzählbare. Die fünf Operationen sind sämtlich eindeutig und reell ausführbar;

1) *G. Veronese* hat in seinem tiefsinnigen Werke, Grundzüge der Geometrie, deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894 ebenfalls den Versuch gemacht, eine Geometrie aufzubauen, die von dem Archimedischen Axiom unabhängig ist.

Sl. 13. Faksimil dijela §12 prvoga izdanja Hilbertovih *Grundlagen* (preuzeto iz Hilbert 1899: 24)

To što je Veronese izvršio presudan utjecaj na Hilberta još uvijek ne mora značiti da ga moramo smatrati modernistom u smislu u kojem to Hilbert nedvojbeno jest. Prema Mehrtensovoj analizi, *Schlüsselwörter* matematičkoga modernizma jesu *sloboda* (u smislu Cantorova određenja biti matematike – usp. Odjeljak [2.4.1.]), *produktivnost*, *progresivnost* (u smislu neopterećenosti bilo kakvim povijesnim uzorima), *apstraktnost* te inzistiranje na *konceptualnim* i *formalnim* aspektima matematike, za razliku od kontramodernizma, koji se smatrao ne samo *regresivnim* zbog inzistiranja na *integritetu* matematike i nastojanja da se očuva *značenje* njezinih osnovnih pojmova (usp. s Bishopovim napomenama iz Odjeljka [1.4.]), nego i *restriktivnim* zbog pokušaja da održi vezu matematike s fizičkim svijetom, odnosno s onim što je *konkretno* i *intuitivno*, čime se, prema tom tumačenju, neminovno ograničavao i usporavao slobodan razvoj i napredak matematičkoga znanja (v. drugo i treće poglavlje u Mehrtens 1990, kao i Ferreirós 2023, §18.1, osobito str. 456). Kad bismo bili prisiljeni birati između dviju ogoljenih alternativa, modernizma ili kontramodernizma, imajući na umu rekonstrukciju Veroneseove filozofije geometrije iz Odjeljka [2.4][274], činilo bi se da Veronese prije pripada kontramodernistima nego paradigmatskim modernistima poput Hilberta. No kako onda razumjeti prethodno navedenu Pierpontovu opasku da u takozvanom kritičko-sintetičkom pravcu u zasnivanju geometrije, koji je inaugurirao Veronese, „nema mjesta za geometrijsku intuiciju“ budući da geometriju tretira „kao puku granu čiste logike“? Odgovor je u tome što se Veronese (kao i njegov profesor Klein[275]) opire takvoj pojednostavljenoj i, u određenom smislu, gruboj klasifikaciji.

[274] Petronijević je još 1907. u svojoj komparativnoj analizi Cantorove i Veroneseove teorije beskonačnih brojeva istaknuo da je Veroneseova teorija „manje rigorozna, ali zato intuitivnija i konkretnije utemeljena“ (*weniger strenge, aber anschaulicher und concreter begründet worden*) (Petronievics 1907: 31).

[275] V. Bair *et al.* 2017b.

Naime, iako je Veronese možda davao prednost tradicionalnoj geometriji *à la grecque*, smatrajući da je „intuicija nužna za bit geometrije“ (*l'intuizione è necessaria per l'essenza della geometria*), to nipošto ne znači – *contra* Pasch i Peano (v. Odjeljak [2.3]) – da vizualizacija, ma koliko bila korisna, može nametnuti bilo kakva ograničenja aksiomatskom zasnivanju i logičkom, strogo deduktivnom razvijanju geometrije (*l'intuizione non deve essere però elemento necessario, per quanto utile, nello svolgimento logico della geometria*) (Veronese 1891: xvii). Drugim riječima,

> „suprotno Ponceletovu mišljenju, interakcija vizualnih procesa i logičkih operacija ne podrazumijeva 'ovisnost dokaza o *oštrini vida* geometra' te stoga ne treba prenaglašavati epistemološki značaj vizualizacije – *jer vizualni model jest samo to, model.* Ma koliko 'dijagramsko rezoniranje' bilo korisno u *kontekstu otkrića* i unatoč tomu što omogućuje izravno tretiranje geometrijskih objekata, a ne njihovo promatranje kroz analitički medij polja realnih brojeva, to ne znači da su značenje geometrijskih aksioma i *kontekst njihova opravdanja* u domeni empirijskih činjenica o opažanju.“ (Popović 2017: 103, izvorni kurziv; v. i Veronese 1891: xix–xxi)

Prema tome, *teorijska geometrija* (*la geometria teoretica*) kojom se Veronese bavi u *Fondamenti* predstavlja „čisto deduktivnu znanost“ (*scienza puramente deduttiva*) odnosno, kako je to formulirao Pierpont, granu čiste logike (Veronese 1891: ix). U skladu s tim modernim shvaćanjem geometrije, Veronese je i hilbertovski prije Hilberta posve eksplicitno i jasno definirao kriterij takozvane *matematičke egzistencije*, danas u literaturi poznat kao „Hilbertov kriterij“ ili „Hilbertov princip“ (*sic!*) (usp. Doherty 2017, §1). Pogledajmo sljedeća dva citata (obratite pozornost na godine u kojima su publikacije objavljene):

> „Kada je neka matematička hipoteza moguća? *U području matematike moguća je svaka dobro određena* (*ben determinata*)[276] *definicija*, *postulat* [sc. *aksiom*] *ili hipoteza čiji termini ne proturječe jedni drugima niti proturječe* [*logičkim*] *principima, logičkim operacijama i prethodno već uspostavljenim hipotezama* [sc. *definicijama i aksiomima*], *kao ni istinama koje iz njih proizlaze* (*alle verità che da esse derivano*). […] **Matematička je mogućnost regulirana principom neproturječnosti** (*principio di contraddizione*). Tako **mogućnost za matematiku postaje realnost** (*la possibilità diventa per la matematica realtà*).“ (Veronese 1891: ix; Veroneseov izvorni kurziv, moje isticanje dodano podebljanim slovima)

> „Ako proizvoljno odabrani aksiomi zajedno sa svim posljedicama koje se iz njih mogu izvesti ne proturječe jedni drugima, onda su oni istiniti, a stvari koje su definirane aksiomima postoje. To je za mene kriterij istinitosti i egzistencije.“ (Hilbertovo pismo Fregeu od 29.12.1899., citirano prema Gabriel *et al.* 1980: 39–40)

Dakle, premda povjesničari smatraju da je Hilbert prvi definirao matematičku egzistenciju i formulirao princip prema kojemu „biti (sc. postojati) matematički znači biti konzistentan“, iz prethodno navedenih citata lako se može utvrditi da je Veronese operirao istim tim principom čak *osam godina* prije nego što ga je Hilbert prvi put eksplicitno

[276] Veronese *ad loc.* precizira da se pod „dobro određena“ u ovom kontekstu misli: (a) da je značenje termina precizno utvrđeno i (b) da je nedvosmisleno na koji se pojam (ili pojmove) odnosi, odnosno da je referencija jedinstvena.

formulirao, a potom i objavio 1900. godine, godinu dana nakon prvoga izdanja *Grundlagen*.[277] A imajući na umu prethodno istaknutu činjenicu da je Hilbert od sredine 1890-ih detaljno proučavao *Fondamenti*, *prima facie* nije neplauzibilno pretpostaviti da je Veronese i u ovom slučaju mogao biti ključni poticaj za Hilbertovo kasnije određenje matematičke egzistencije.[278]

Još jedan podatak koji govori u prilog tomu da je Hilbert pažljivo proučavao *Fondamenti* odnosi se na način na koji je koncipirao geometriju u rukopisu predavanja iz mehanike, koja je tijekom zimskog semestra 1898./99. držao usporedno s predavanjima iz zasnivanja geometrije:

> „Geometrija također [sc. kao i mehanika] proizlazi iz promatranja prirode i iz iskustva. U tom smislu ona je eksperimentalna znanost (*eine Experimentalwissenschaft*). […] No te eksperimentalne osnove (*experimentellen Grundlagen*) toliko su neupitne i općeprihvaćene te su potvrđene u tolikoj mjeri da više nitko ne smatra kako je bilo kakav daljnji dokaz [tih osnova] potreban. Štoviše, potrebno je jedino te osnove izvesti iz nekoga minimalnog skupa nezavisnih aksioma i tako izgraditi cjelokupno zdanje geometrije čisto *logičkim sredstvima*. Na taj se način geometrija pretvara u čisto matematičku znanost (*eine rein mathematische Wissenschaft geworden*)." (Hilbertov izvorni kurziv, citirano prema Corry 2004b: 90)

Očito je da ovdje Hilbert takoreći *ad verbum* slijedi Veroneseovu karakterizaciju te zastupa manje-više istovjetnu naturalističku koncepciju geometrije (usp. Odjeljak [2.4]). Corry dijeli to tumačenje i smatra da je Hilbertovo shvaćanje geometrije, koje se pojavljuje u bilješkama za predavanja „Grundlagen der Euklidischen Geometrie" (1898./99.), kao „najsavršenije (*vollkommenste*) od prirodnih znanosti" zasigurno utemeljeno na Veroneseovu, budući da se „gotovo identična formulacija može pronaći i u *Fondamenti*" (Corry 2004b: 93). I doista, kao što sam već istaknuo, Veronese smatra da je geometrija najegzaktnija od eksperimentalnih, odnosno prirodnih znanosti: *die exacteste experimentale Wissenschaft ist die Geometrie* (Veronese 1894: viii).

Doduše, moglo bi se reći da je nešto nalik Veronese-Hilbertovu shvaćanju matematičke egzistencije već imao na umu Cantor u *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* iz 1883. godine. Tako u §8 (¶1) on govori o dvama značenjima u kojima se, općenito uzevši, može govoriti o realnosti pojmova i ideja (*Realität von Begriffen und Ideen*) te razlikuje takozvanu *intrasubjektivnu* ili *imanentnu realnost* (*intrasubjektive oder immanente Realität*)

---

[277] Druga dva ključna mjesta kod Hilberta jesu pariško predavanje o matematičkim problemima iz 1900. godine („ako je nekom pojmu moguće pripisati proturječna svojstva, onda taj pojam matematički ne postoji", v. Hilbert 1902: 11) i rad „Über den Zahlbegriff" (*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 8, str. 180–184) iz iste godine (v. prijevod u Ewald 2005: 1092–1093).

[278] Ferreirós pak smatra da je Hilbert došao do ideje da neproturječnost implicira egzistenciju pod utjecajem logicizma i, osobito, Dedekindovih radova posvećenih (skupovnoteorijskom) zasnivanju aritmetike. Preciznije, Ferreirósova teza jest da je

> „(proturječni) skupovnoteorijski princip komprehenzije [za svako dobro definirano svojstvo $\Phi(x)$ postoji skup S koji sadrži sve objekte koji imaju to svojstvo, $S = \{x: \Phi(x)\}$ – prim. S. P.] – središnji element logike logicizma – predstavljao plodno tlo iz kojega je iznikla Hilbertova tvrdnja da konzistentnost nekoga sustava aksioma povlači matematičku egzistenciju njegovih objekata." (Ferreirós 2009: 35 *et passim*)

od takozvane *transsubjektivne*, odnosno *prijelazne realnosti* (*transsubjektive oder transiente Realität*). Neka je ideja ili pojam intrasubjektivno realan kada je dobro definiran i kada „zauzima točno određeno mjesto u našem razumijevanju, budući dobro razlučen od svih drugih dijelova našega mišljenja i stojeći u posve određenim odnosima prema tim drugim dijelovima". S druge strane, transsubjektivna realnost nekoga pojma tiče se njegovih odnosa s objektima „iz vanjskoga svijeta", odnosno njegova aktualnoga postojanja „u tjelesnoj i duhovnoj prirodi" (*in der körperlichen und geistigen Natur tatsächlich vorkommen*). Fraenkel je u popratnoj biografskoj studiji u Cantorovim sabranim djelima natuknuo da bi se imanentna realnost, unatoč Cantorovoj nejasnoj formulaciji, mogla shvatiti kao svojevrsna anticipacija matematičke egzistencije (v. „*Das Leben Georg Cantors*", §5 u Cantor 1932: 478–479), premda način na koji Cantor o tome govori sugerira da je prije imao na umu nešto nalik epistemičkom svojstvu, poput *koherentnosti*, nego, kao Veronese i Hilbert, logičko svojstvo kakvo je konzistentnost. Kako god bilo, Cantor je svakako smatrao da matematika u svome razvoju ni u kojem smislu nije obvezna baviti se transsubjektivnom realnošću svojih pojmova, nego samo njihovom imanentnom realnošću, te da upravo u tome leži njezino distinktivno obilježje u odnosu na sve druge discipline i razlog zbog kojega zaslužuje naziv „slobodna matematika" (*freie Mathematik* – usp. Odjeljak [2.4.1] i v. Cantor 1883, §8, ¶3).

Povijesno je i filozofski zanimljivo da sličnu distinkciju nalazimo i kod Veronesea. Naime, već u predgovoru *Fondamenti* on razlikuje takozvanu *apstraktnu* i *konkretnu realnosti* (*realtà astratta* i *realtà concreta*) (Veronese 1891: x *et passim*). Prema Veroneseovu shvaćanju, matematičkim objektima pripada apstraktna realnost ako su konzistentno definirani, ali to nipošto ne znači *eo ipso* da ih je moguće susresti u fizičkoj stvarnosti, zbog čega „nije nužno pretpostavljati konkretnu realnost tako definiranih formi" (*op. cit.*, str. xii).[279] Tako Veronese zaključuje:

> „Naš opći prostor (*spazio generale*) geometrijski je moguć (*geometricamente possibile*)[280] te stoga posjeduje *apstraktnu realnost* (*realtà astratta*), pri čemu to nipošto ne povlači niti podrazumijeva da predstavlja potpunu reprezentaciju vanjskoga svijeta. Isto tako, s našom hipotezom o [postojanju] različitih vrsta linearnih kontinuuma (*diverse unità rettilinee*), koja predstavlja posljedicu [hipoteza] o aktualnoj beskonačnosti i o [aktualnoj] infinitezimalnosti ili, drugim riječima, o nezavisnosti Arhimedova aksioma, nema nikakve potrebe vjerovati u konkretnu realnost (*realtà concreta*) beskonačnosti i infinitezimala. Čak i kad bi nekako bilo pokazano da, primjerice, naš opći prostor zapravo ne postoji *in concreto*, to ne znači da bismo se zbog toga i geometrijski (*geometricamente*) morali odreći te hipoteze.[281] Također, ako, primjerice,

[279] Nasuprot tomu, Cantor je kao platonist vjerovao u *bitnu povezanost* apstraktne i konkretne realnosti. Prema njemu, ono što postoji imanentno, odnosno intrasubjektivno, ujedno u nekom smislu postoji i transsubjektivno: „Bei der durchaus realistischen, zugleich aber nicht weniger idealistischen Grundlage meiner Betrachtungen unterliegt es für mich keinem Zweifel, daß diese beiden Arten der Realität stets sich zusammenfinden in dem Sinne, daß ein in der ersteren Hinsicht als existent zu bezeichnender Begriff immer in gewissen, sogar unendlich vielen Beziehungen auch eine transiente Realität besitzt." (*Grundlagen*, §8, ¶3)

[280] Veronese pojmove matematičke i geometrijske mogućnosti (egzistencije) koristi kao sinonime. V. *Fondamenti*, str. xi.

[281] Na jednom drugom mjestu Veronese dodaje da matematička egzistencija ne ovisi ni o mogućoj *instrumentalnoj* ili *uporabnoj vrijednosti*, odnosno *plodnosti* (*fecondità*), određene matematičke ideje: „Un'ipotesi può essere possibile,

> ne bismo mogli opažati (*intuire*) četverodimenzionalne objekte onako kako opažamo trodimenzionalne, to ne znači da je hipoteza [o postojanju] četverodimenzionalnog prostora proturječna. […] Kada razmatramo opće pitanje kada je neka skupina ili sustav aksioma, postulata ili [matematičkih] konvencija moguć *in abstracto*, nužno je posegnuti za logičkim operacijama i logičkim aksiomima, kao što sam to učinio u uvodu [u *Fondamenti*]." (Veronese 1891: xi–xii)

Dakle, i u tom pogledu Veronese anticipira Hilbertovo kasnije stajalište, izraženo primjerice u radu „Axiomatisches Denken" iz 1917.,[282] prema kojemu je zadaća matematičara baviti se neproturječnošću svojih formalnih teorija, dok se zadaća utvrđivanja koji bi od objekata, čija je egzistencija matematički zajamčena, mogao još i *de facto* postojati u stvarnome fizičkom svijetu prepušta fizičarima (ili, kako je to smatrao Cantor, metafizičarima).[283]

S ovim je razmatranjima povezano i Veroneseovo često ponavljano inzistiranje, posve u modernističkom duhu, na „slobodi matematičkoga mišljenja" (*libertà del pensiero matematico*) i na važnosti slobodnoga razvoja matematike. Govoreći o pretpostavkama na kojima treba počivati geometrijsko istraživanje i o metodama kojima se u tom istraživanju valja voditi, Veronese ističe da se „mora ostaviti najveća sloboda izvođenju zaključaka" (*lasciare libero campo alla deduzione*) te da se „ne smiju postavljati nikakva neopravdana ograničenja u potrazi za matematičkom istinom" (*non porsi alcun limite ingiustificato nella ricerca del vero matematico*) (1891: ix–x). Donekle slično Cantoru (usp. nap. 279), Veronese na jednom mjestu kaže da bi bio sklon prihvatiti „titulu racionalista ili idealista" zbog ideja koje je iznio u predgovoru *Fondamenti*, ako bi to značilo da će se tako jasno „razlikovati od onih koji bi matematičkom i geometrijskom duhu uskratili najveću moguću logičku slobodu" (*la massima libertà logica possibile*) time što bi, primjerice, svaki novi matematički rezultat htjeli podvrgnuti empirijskoj provjeri (usp. nap. 282). Veronese je u svom posljednjem osvrtu na nearhimedovsku geometriju, iznesenom u predavanju na rimskom ICM-u 1908. godine, inzistirao na tome da se matematičko proučavanje osnova (*ricerche matematiche sui principi della scienza*) ne samo bitno razlikuje od „filozofskih istraživanja o podrijetlu i genezi matematičkih ideja", nego da ga od njih treba držati posve odvojenim, smatrajući da nas mnoštvo uzajamno suprotstavljenih filozofija matematike neminovno razdvaja, dok nas matematika ujedinjuje (*la matematica ci unisce mentre la filosofia, almeno per ora, ci divide*). No u istom dahu Veronese dodaje da to ne znači kako matematiku i filozofiju matematike treba promatrati kao suprotstavljene pothvate; naprotiv, matematika može i treba biti korisna i primjenjiva kako za filozofska istraživanja geneze matematičkih ideja, tako i za primijenjene znanosti koje se neposredno bave proučavanjem prirodnih pojava. Dakle, „matematičar se ne smije zatvoriti u čisto apstraktno područje ili u simbolički formalizam" (*in un campo puramente astratto o in un formalismo simbolico*) niti ostati „ravnodušan prema pitanjima matematičkoga sadržaja"

---

ma essere anche tale da non condurre ad alcun risultato o da restringere il campo delle nostre ricerche. […] [I]l poco valore di un'ipotesi non è un argomento efficace contro la possibilità di essa." (Veronese 1891: ix–x)

[282] Tako Hilbert govori o „eksperimentalnoj potvrdi" pojedinih matematičkih rezultata (*Bestätigung durch das Experiment*; usp. Hilbert 1918: 409).

[283] Treba istaknuti da je već Riemann zastupao takvo stajalište u „Über die Hypothesen usw.". V. osobito treći odjeljak, „Andwendung auf den Raum", u kojem Riemann govori o pitanjima koja nas iz područja geometrije „vode u područje druge znanosti, naime fizike" (*in das Gebiet der Physik*).

(*indifferente dinanzi a questioni di contenuto matematico*), ali bi se istodobno matematičari trebali suzdržati od opravdavanja svojih koncepcija filozofskim razmatranjima (*dal giustificare i suoi concetti con considerazioni filosofiche*), kao što je to, primjerice, „katkad činio Cantor kako bi opravdao svoje transfinitne brojeve, koji zapravo sasvim legitimno postoje [sc. u matematičkom smislu], unatoč nedavnim filozofskim kritikama" (Veronese 1909: 205).[284] „Kao matematičari", zaključuje Veronese, „možda se oslanjamo na osjetilno opažljive činjenice, ali naš je vodič princip neproturječnosti" (*la nostra guida è il principio di contraddizione*) (Veronese 1891: xiv).

Još jedan *par excellence* protohilbertovski aspekt Veroneseove teorije, o kojemu je prethodno već donekle bilo riječi, tiče se nezavisnosti aksioma. Je li Veronese možda i u tom pogledu bio *ante litteram* metamatematičar u suvremenom hilbertovskom smislu (usp. Hilbert 1918)? Kao što je poznato, u *Grundlagen* i kasnijim publikacijama iz metamatematike Hilbert nezavisnost shvaća u terminima nedokazivosti: neki dani aksiom α nezavisan je od skupa aksioma Σ AKKO se α ne može dokazati, odnosno ne može izvesti polazeći od skupa Σ i standardnih logičkih zakona i pravila izvođenja, $\Sigma \nvdash \alpha$ (usp. Blanchette 1996: 319). A evo što kaže Veronese u *Fondamenti*: „neka dana hipoteza A nezavisna je od nekoj drugoj hipotezi B kada se A ili njezina negacija $\neg A$ ne može izvesti (*non si deduce*) iz B." (Veronese 1891: x). Veronese i Hilbert neproturječnost također shvaćaju u terminima nedokazivosti. Drugim riječima, neki dani skup aksioma Σ neproturječan je AKKO nije moguće dokazati, odnosno izvesti, eksplicitnu proturječnost iz Σ, $\Sigma \nvdash (p \wedge \neg p)$. Također je jasno da je u ovakvoj sintaktičkoj koncepciji nezavisnosti α nezavisno od Σ samo ako je skup Σ neproturječan. Zbog toga su nezavisnost i neproturječnost *uzajamno definirljive*: neki skup rečenica C neproturječan je ako je proizvoljno odabrana proturječna rečenica nezavisna od C, a neka je

[284] Evo i potpunoga citata:

> „*La filosofia deve perciò accettare le nuove idee matematiche quando esse sieno formate definitivamente*. Però se le ricerche matematiche si devono distinguere dalle filosofiche, è opportuno d'altro canto che il matematico si astenga dal giustificare i suoi concetti con considerazioni filosofiche o con finzioni che si prestano facilmente alla critica del filosofo, come fanno ad esempio l'empirista e l'idealista del Du Bois Reymond, o come fece talora il Cantor per giustificare i suoi numeri transfiniti, i quali hanno una legittima esistenza, nonostante anche recenti critiche filosofiche. Ma d'altro canto per timore di queste critiche *il matematico non deve trincerarsi in un campo puramente astratto o in un formalismo simbolico mostrandosi indifferente dinanzi a questioni di contenuto matematico* come è accaduto in passato e accade ancora al presente, quando si confonde la geometria con la teoria generale delle varietà di elementi puramente astratte.
>
> Epperciò è preferibile che l'ordinamento dei nuovi principi risponda allo svolgimento logico e più semplice delle idee matematiche e quindi il metodo non sia artificio senza vita o non appaia giuoco di simboli o di parole, per quanto utile, ma sia filosofico. Così la matematica può essere anche utile alle ricerche filosofiche intorno alla genesi delle idee matematiche, allo stesso modo che essa ha pure per compito di essere utile alle scienze applicate che hanno per oggetto diretto lo studio dei fenomeni della Natura scegliendo i metodi approssimativi a questo fine più appropriati. E quando invece si segue un metodo indiretto, rappresentando ad es. lo spazio mediante una varietà a più variabili per studiarne i principi, è necessario esaminare se seguendo il contenuto dello spazio stesso, o la sua costruzione, i postulati di detta varietà possano essere giustificati senza ricorrere a concetti che con quei postulati vengono definiti, ciò che costituirebbe una petizione di principio e filosoficamente un errore."

rečenica S nezavisna od skupa C ako je skup $C \cup \neg S$ neproturječan (usp. Blanchette 2024, §2.1). Ta okolnost omogućuje da se rezultati koji se tiču nezavisnosti aksioma ustanove posredstvom dokaza neproturječnosti. U odjeljcima [2.6.1] i [2.6.2] vidjet ćemo kako su te dokaze, kada je riječ o nezavisnosti Arhimedova aksioma i neproturječnosti nearhimedovske geometrije, koncipirali Veronese, Levi-Civita i Hilbert.

Prije toga, pogledajmo kako je Veronese specificirao uvjete, odnosno deziderate, koje bi geometrijski aksiomi i hipoteze trebali zadovoljiti „kako bi znanstveni problem [zasnivanja geometrije] mogao biti obrađen na najopćenitiji i najjednostavniji način (*in tutta la sua generalità e semplicità*)." Riječ je o sljedećim uvjetima:

> „I. Istine koje proizlaze, odnosno koje su izvodive iz logičkih aksioma uz pomoć logičkih operacija i pravila izvođenja, treba odvojiti od čisto geometrijskih aksioma.
>
> II. Aksiomi u strogom smislu (*assiomi propriamente detti*) trebaju izražavati najjednostavnije i najintuitivnije istine (*le verità più semplici e intuitive*) te ne smiju sadržavati pojmove koje tek naknadno treba izvesti (*quali debbano essere dati dedotti più tardi*); također, sva druga relevantna svojstva trebaju biti izvedena iz aksioma bez prešutnog uvođenja bilo kakvih novih [pretpostavki] (*senza introdurne tacitamente di nuove*). Konačno, aksiomi već *ab initio* trebaju biti tako formulirani, a aksiomatski sustav tako postavljen, da ostavlja prostor za različite moguće geometrijske sustave (*da lasciar campo ai diversi possibili sistemi geometrici*).
>
> III. Aksiome koji su nužni za [teorijsko] proučavanje geometrije treba razdvojiti od onih koji su nužni za njezinu praktičnu primjenu.
>
> IV. Aksiomi trebaju biti nezavisni (*che gli assiomi siano indipendenti*), zbog čega je nužno voditi računa o njihovu uzajamnom poretku, odnosno međusobnim odnosima, a još više o tome da ne proturječe jedni drugima, odnosno da aksiomatski sustav ne bude proturječan.[285]
>
> V. Metoda koju primjenjujemo treba biti elementarna i utemeljena na konstruktivnom procesu prostorne intuicije (*basato sul processo costruttivo dell'intuizione spaziale*).
>
> VI. Od trenutka uspostavljanja [formalnoga sustava], aksiomi, teoremi i dokazi ne smiju sadržavati nikakav neodređeni intuitivni element (*alcun elemento intuitivo indeterminato*), što znači da, apstrahirajući od intuicije, geometrijski [aksiomatski] sustav ostaje sustav čisto apstraktnih istina u kojemu aksiomi zauzimaju mjesto precizno određenih apstraktnih definicija ili hipoteza." (Veronese 1891: xvi)[286]

Za kraj ovoga odjeljka osvrnut ću se na još jedan izrazito moderan aspekt Veroneseova „savršenog prehilbertovskog stila"(kako su to formulirali Avellone *et al.* 2002:

[285] Usp. s Hilbertovim uvodom u *Grundlagen*.

[286] Usp. s Hilbertovim shvaćanjem formalnih teorija kao shema (iz pisma Fregeu od 29.12.1899., navedeno prema Gabriel *et al.* 1980: 40): „Zasigurno je očigledno da je svaka [formalna] teorija samo skela ili shema pojmova zajedno s njihovim nužnim međusobnim odnosima i da se osnovni elementi mogu promatrati na koji god način mi to poželimo."

382), koji se tiče uloge *modela* u geometriji i, općenito uzevši, važnosti *modelnoteorijskih razmatranja*. U Odjeljku [2.4] vidjeli smo da je Veronese u okviru teorije intuitivnoga kontinuuma zastupao aristotelovsku tezu o strukturi kontinuuma, u skladu sa Zenonovim aksiomom. Međutim, u jednoj bilješci u *Fondamenti* (str. 48, nap. 1) Veronese ističe da je kantorovska punktiformna reprezentacija kontinuuma zapravo *dostatna* za potrebe geometrijskih istraživanja (*troviamo che un sistema di punti può rappresentare sufficientemente il continuo nelle ricerche geometriche*) te da je, promatrano čisto matematički, „misterij [strukture] kontinuuma" (*il mistero della continuità*) potpuno irelevantan zato što je „određenje kontinuuma pomoću dobro definiranoga i uređenoga sustava [sc. skupa] točaka dostatno" (*matematicamente, è bene rilevarlo, questo mistero non ha alcuna influenza, poiché ci basta la determinazione del continuo mediante un sistema ordinato ben definito di punti*) i, štoviše, jednako zadovoljavajuće s obzirom na svoju izražajnu moć.[287] Veronese ovdje anticipira poantu koja je aktualna u najsuvremenijoj neoaristotelovskoj literaturi o formaliziranim teorijama kontinuuma, naime da se *sve* što se može izraziti *jezikom intervala* može formulirati i *jezikom točaka* (i obratno), i to tako da svi teoremi ostanu istiniti. Drugim riječima, aristotelovska i kantorovska teorija kontinuuma samo su, da posudimo Arsenijevićevu formulaciju, *trivijalno različite u generaliziranom smislu* (usp. Arsenijević 2003b), što znači da možemo koristiti „obje perspektive po želji" (sec. van Benthem 1991: 80). Dakle, s obzirom na činjenicu da su kantorovske točkaste i aristotelovske intervalske strukture *sustavno uzajamno prevodive*, odnosno da se mogu transformirati jedna u drugu pod uvjetom da na odgovarajući način modificiramo jezike na kojima su teorije formulirane (*moyennant le changement des certaines expressions de langage et* […] *si l'on apporte dans le discours les modifications dont il s'agit*, usp. Veronese 1902: 443), možemo reći da „oba aksiomatska sustava opisuju jednu te istu strukturu", odnosno da nam „oba govore (izravno ili neizravno) kakva je struktura pravca" (usp. Roeper 2006: 213).[288]

Naposljetku, kada je riječ o shvaćanju modela, osobito u razdoblju od 1870-ih do 1920-ih, Blanchette je ispravno istaknula da je naše poimanje modela i razumijevanje njihove uloge u utvrđivanju neproturječnosti formalnih teorija i nezavisnosti aksioma u tom razdoblju pretrpjelo drastičnu konceptualnu transformaciju (Blanchette 2017). Naime, pogledamo li jedan od najboljih udžbenika suvremene teorije modela, Chang–Keislerovu *Model Theory* (1990), vidjet ćemo da se među rane pionire toga područja ubrajaju Löwenheim, Skolem, Gödel, Tarski i Malcev, čiji se temeljni rezultati protežu u razdoblju od 1915. do 1936. godine[289], dok se konačno uspostavljanje teorije modela kao zasebne grane

[287] „On ne peut définir le continu intuitif, mais on peut définir le continu géométrique comme un grouppe de points qui satisfont à certaines propriétés, géométriquement suffisantes." (Veronese 1902: 441)

[288] Za suvremene rezultate u ovom području v. nap. 149 *supra*.

[289] L. Löwenheim, „Uber Möglichkeiten in Relativkalkül", *Math. Ann*, Bd. 76, 1915; T. Skolem, „Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen", *Skrifter utgitt av Videnskapsselskapet i Kristiania: Matematisk-naturvidenskabelig Klasse*, 1920; K. Gödel, „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls", *Monatsh. f. Mathematik und Physik*, Bd. 37, 1930; A. Tarski, „Sur les ensembles définissables de nombres réels", *Fund. Math*, 17/1, 1931; A. Malcev, „Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik", *Matématičéskij sbornik*, N.S, Vol. 1, 1936.

matematičke logike povezuje s radovima Henkina, Robinsona i Tarskog iz kasnih 1940-ih i ranih 1950-ih. Wilfrid Hodges, i sâm autor ugledne knjige *Model Theory* (1993), u svom pregledu povijesnoga razvoja teorije modela (Hodges 2000; v. i Hodges 2018) pojavu modernoga, apstraktnoga shvaćanja modela kao relacijsko-operacijske strukture koja realizira ili osigurava interpretaciju određenoj formalnoj teoriji (formuliranoj u jeziku prvoga reda) povezuje s istraživanjima Hilbertove škole iz 1920-ih, osobito von Neumanna i Fraenkela, premda ne i sa samim Hilbertom. No, kao što je još 1939. primijetio Nagel, pitanja poput nezavisnosti i neproturječnosti, kojima se bavi metamatematika, jasno su formulirana već u razdoblju *fin-de-siècle*, kada je geometrija jasno razdvojena od svojih mogućih primjena (Nagel 1939, §74, str. 202–203). Naime, „modeli" se prvi put počinju javljati u okviru rasprava koje su, kao što sam prethodno objasnio, inaugurirale metageometriju druge polovice 19. stoljeća, kada su matematičari (i filozofi) ponajprije bili usredotočeni na pitanja konzistentnosti novih, nestandardnih geometrija, n-dimenzionalne geometrije i neeuklidskih geometrija. No, je li se već tada moglo govoriti o modelima onako kako ih danas razumijemo u teoriji modela?

Jedan ilustrativan primjer može se pronaći u Veroneseovu radu „Sulla Geometria descrittiva a quattro dimensioni" iz 1881./82. Već u uvodnom dijelu rada Veronese govori o „modeliranju prostornih formi" (*modellando le forme dello spazio*) i o „metodama reprezentacije" (*metodi di rappresentazione*) te objašnjava da mu je cilj pokazati kako deskriptivna, odnosno nacrtna geometrija može poslužiti kao „model" četvero- i, općenito uzevši, n-dimenzionalne geometrije, odnosno „potaknuti sposobnost vizualizacije [višedimenzionalnih] prostora" (*la potenza intuitiva dello spazio, Anschauungsvermöge*) omogućujući nam da „oblikujemo slike bilo koje figure od n dimenzija u prostoru od, redom, n–1 dimenzija, n–2 dimenzija, … pa sve do trodimenzionalnoga prostora, pa čak i u dvodimenzionalnoj ravnini […] što bi nas trebalo uvjeriti da možemo vizualizirati (*intuire*) i geometrijski obrađivati hiperprostore kao i obični [trodimenzionalni] prostor." (Veronese 1881./82: 987–988). Očito je da ovdje nema govora ni o kakvu modelnoteorijskom pristupu, nego je naglasak na pronalaženju *vizualnoga modela* n-dimenzionalne geometrije, odnosno metode koja bi nam olakšala vizualizaciju hiperprostora i geometrijskih objekata u njemu.

Kada je pak riječ o neeuklidskim geometrijama, prvi „modeli" zakrivljenoga prostora pojavljuju se u Beltramijevu *Saggio di interpretazione della geometria non Euclidea* iz 1868. godine. Može li se Beltramijeva pseudosfera s pravom smatrati modelom Lobačevskijeve hiperboličke geometrije i je li time dokazana njezina neproturječnost? Evo kako je na to pitanje odgovorio Helmholtz u „*Die Tatsachen in der Wahrnehmung*" (1878):

> „*Beltrami je pružio metodu za oblikovanje slika metamatematičkih prostora u dijelovima euklidskoga prostora, pomoću kojih se jednostavno određuje način na koji ih vidimo*. […] Možemo sebi predočiti različite slučajeve u kojima bi bića koja obitavaju na površini [pseudosfere] morala razviti svoje opažanje prostora. […] Ta su [Beltramijeva] razmatranja dostatna da pokažu na koji način iz poznatih zakonitosti našega osjetilnog [sc. vizualnog i taktilnog] opažanja možemo izvesti niz osjetilnih dojmova koje bi u nama proizvodio sferni ili pseudosferni svijet, kad bi postojao. […] *Možemo sebi predočiti kako pseudosferni svijet izgleda*." (citirano prema Hertz & Schlick 1921/1977: 130; moj kurziv)

Dakle, Beltramijev „model“ učinio je hiperboličku geometriju intuitivno pristupačnom, odnosno pokazao nam je na koji se način zakrivljeni prostori i objekti u njima mogu vizualno prikazati u standardnom, ravnom euklidskom prostoru. Analiza koju je ponudila Blanchette slaže se s tim zaključkom:

> „Mogli bismo se zapitati kako se u tom razdoblju shvaćalo što zapravo i što točno pokazuju konstrukcije poput Beltramijeve o postulatu o paralelama i o njegovu odnosu prema ostatku euklidske geometrije. Odgovor glasi da iz tih konstrukcija vjerojatno nije bila izvedena nikakva precizna i nedvosmislena pouka, osim općenitoga stava da su one, u određenom smislu, upućivale na *koherentnost* [a ne konzistentnost!] geometrije L[obačevskog], a time i na nezavisnost (u određenom, ne posve jasno određenom smislu) postulata o paralelama. Godine 1868. još nije bilo artikulirano shvaćanje prema kojemu aksiomatske teorije pružaju implicitne definicije [temeljnih pojmova], niti je bio dovoljno razvijen osjećaj za to što točno podrazumijeva formalan ili poluformalan dokaz, niti je, u konačnici, itko tada shvaćao matematički [sc. formalni] jezik kao nešto što može biti podvrgnuto proizvoljnoj reinterpretaciji. Stoga konstruirani „modeli“ geometrije Lobačevskog nisu bili sredstva pomoću kojih bi bilo moguće dokazivati nezavisnost [aksioma] onako kako se to čini u suvremenoj matematici. […] U tom razdoblju [sc. 1870-ih] tvrdnja o nezavinosti svodila se na nejasno omeđenu ideju o koherentnosti [predodžbe] prostora čiji se pravci ponašaju neeuklidski. Uloga konstruiranih ploha bila je, dakle, prikazati (*to depict*) stvarnu mogućnost [alternativnih] prostora.“ (Blanchette 2017: 49, 52)[290]

Kao što ćemo vidjeti u sljedećem odjeljku, do pojave prvih pravih hilbertovskih modela trebalo je pričekati još dvadesetak godina, odnosno do pojave Veroneseove nearhimedovske geometrije. Vjerujem da je izlaganje u prethodnom i ovom odjeljku pokazalo da Veronese predstavlja jedinstvenu figuru u matematici razdoblja *fin-de-siècle* te da se s razlogom opire pokušajima jednoznačne klasifikacije u mehrtensovsku shemu *Moderne versus Gegenmoderne*. S jedne strane imamo njegovu tradicionalnu filozofiju geometrije i aristotelovsku teoriju intuitivnoga kontinuuma (v. Odjeljak [2.4]), a s druge sve ključne aspekte matematičkoga modernizma koji se tipično povezuju s Hilbertom[291], i to gotovo čitavo desetljeće prije nego što se sâm Hilbert uopće počeo baviti problemima zasnivanja geometrije. I doista, kao što je primijetila Cantù, Veronese je usvojio stari epistemološki model na posve originalan i plodotvoran način (Cantù 2010: 12), koji, „uzme li se u kombinaciji s njegovim postulacijskim [sc. aksiomatskim] pristupom, omogućuje da Veronesea promatramo kao preteču matematike dvadesetoga stoljeća i, osobito, Hilberta“ (Laugwitz 2002: 116). Pogledajmo sada kako je Veronese već 1889. došao do svojega najznačajnijega, ali i, s obzirom na povijest recepcije, najkontroverznijega rezultata – uvida o nezavisnosti Arhimedova aksioma – koji je potom presudno utjecao na nastanak Hilbertovih *Grundlagen*.

---

[290] V. i vrlo zanimljiv rad Gerta Schubringa o podrijetlu i genezi epistemološke koncepcije modela u matematici (Schubring 2017).

[291] To priznaje i Gray, unatoč neizbalansiranom i ne osobito dobronamjernom čitanju Veroneseove teorije (usp. Gray 2008: 339).

[2.6] Veronese o nezavisnosti Arhimedova aksioma: teorija apsolutnoga nearhimedovskog kontinuuma

Relevantan kontekst za ispravno razumijevanje Veroneseova rada o linearnom kontinuumu i Arhimedovu aksiomu iz 1889. omeđen je istraživanjima koja su, osobito u Austriji i Njemačkoj, započela početkom 1880-ih i odnosila se na takozvane *sustave veličina* (*Grössensysteme*). Otto Stolz, jedan od pionira nearhimedovske matematike u drugoj polovici 19. stoljeća, kojemu dugujemo i standardnu formulaciju Arhimedova aksioma, u dodatku radu povijesnoga karaktera „B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung" iz 1881. prvi je skrenuo pozornost matematičarima na važnost proučavanja Arhimedova aksioma primijetivši da taj aksiom „igra važnu ulogu u *općoj aritmetici*" (*beiläufig bemerkt spielt dieses Axiom des Archimedes eine wichtige Rolle in der allgemeinen Arithmetik*) (Stolz 1881, Anhang, str. 268–269; v. osobito nap. **). Pod „općom aritmetikom" Stolz zapravo misli na ono što se još od Gauba i, osobito, Graßmanna naziva *općom teorijom veličina* (*allgemeine Grössenlehre*), koja, kao što sam istaknuo u Odjeljku [1.3], predstavlja obuhvatnu teoriju brojčanih sustava koja proučava njihove aritmetičke, algebarske i analitičke aspekte. To potvrđuju i Stolzova vrlo ugledna *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* iz 1885., u kojima već u predgovoru ističe da je „bitno obilježje veličina (*ein wesentliches Merkmal der Größen*) aksiom koji je isticao još Arhimed", a čiju je važnost, prema Stolzu, prepoznao du Bois-Reymond, također pionir *fin-de-siècle* nearhimedovske matematike, u svojoj teoriji funkcija (Stolz 1885: iii–iv).[292] U kojem smislu Arhimedov aksiom predstavlja „bitno obilježje veličina"?

Odgovor na to pitanje može se pronaći u Stolzovu radu „Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes" (Stolz 1883). U uvodu Stolz kaže sljedeće:

> „Često se isticalo da Euklid implicitno koristi sljedeći princip(*Grundsatz*): *neka se dana veličina može umnožiti koliko god puta želimo tako da nadmaši neku drugu danu veličinu iste vrste* (*eine Grösse kann so oft vervielfältigt werden, dass sie jede andere, ihr gleichartige, übertrifft*) (v. osobito prvi stavak desete knjige *Elemenata*[293]). Kod Arhimeda možemo pronaći eksplicitnu *pretpostavku* koja je u skladu s tim principom i na koju se, radi kratkoće, možemo pozivati kao na *Arhimedov aksiom* (*das Axiom des Archimedes*). Istraživanje o tome treba li ovu tvrdnju smatrati principom ili ne zahtijeva da najprije razjasnimo i usuglasimo što podrazumijevamo pod pojmom „veličine". Pod pojmom veličine (*Grössenbegriff*) razumijem, slijedeći Graßmanna, takav pojam koji omogućuje da za

[292] V. rad „Ueber die Paradoxen des Infinitärcalcüls" (du Bois-Reymond 1881) i du Bois-Reymondovu *Die allgemeine Functionentheorie*, osobito prvi svezak karakterističnog naslova „Metaphysik und Theorie der Mathematischen Grundbegriffe", koji sadržava „kritičko i epistemološko preispitivanje pojmova veličine (*Grösse*) i granične vrijednosti (*Grenze*)" (du Bois-Reymond 1882). Zanimljivo je da je Veronese smatrao du Bois-Reymondov pokušaj pružanja filozofskoga utemeljenja i opravdanja teorije funkcija neuspjelim (v. Veronese 1909: 205).

[293] Stavak na koji se Stolz poziva glasi: „Neka su dane dvije nejednake veličine. Ako od veće oduzmemo veličinu veću od [njezine] polovice, a od ostatka veličinu veću od njegove polovice, i tako nastavimo neprekidno, ostat će neka veličina koja je manja od zadane manje veličine." (δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.)

> dva objekta koja pod njega potpadaju, odnosno koja [taj pojam] obuhvaća, možemo reći da su jednaki ili nejednaki (*gleich oder ungleich*)." (Stolz 1883: 504–505, Stolzov izvorni kurziv)

Dakle, budući da Arhimedov aksiom predstavlja uvjet mogućnosti uspoređivanja veličina, on nam, prema Stolzovoj analizi, omogućuje i da definiramo pojam veličine (*Grössenbegriff*), koji sâm Euklid u *Elementima* nigdje nije definirao, unatoč tomu što ga posvuda koristi (usp. Stolz 1885: 1). I doista, već u radu „Zur Geometrie der Alten usw.", kao i u kasnijoj *Allgemeine Arithmetik*, Stolz je nastojao aksiomatski izložiti teoriju veličina, što se svodilo na pokušaj pružanja aksiomatske karakterizacije pojedinih uređenih algebarskih struktura poput grupa, prstenova i polja. Ključni Stolzov uvid u tom je pogledu bio da *postoje takve strukture, odnosno sustavi veličina, koji nisu arhimedovski*. Podsjetimo se: od Stolza nadalje standardno se uzima da je neka dana struktura S *arhimedovska ako za svako* $x, y \in S$*, gde je* $0 < x < y$*,* postoji neki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je $nx > y$. S druge strane, Stolz je također primijetio sljedeće:

> „Pretpostavimo da nam je zadan beskonačan skup (apstraktnih) objekata $A, B, C, \ldots$ Pomoću definicija (*durch Definitionen*) odredit ćemo koji su od tih objekata jednaki, koji nejednaki, odnosno koji su veći [od drugih]. Ako potom definiramo i zbrajanje i oduzimanje, kao i množenje i dijeljenje nad tim skupom, **još uvijek ne mora nužno slijediti da će biti moguće neki zadani objekt** [**toga skupa**]**, ako se pomnoži** [**dovoljan broj puta**]**, učiniti većim od nekoga drugog zadanoga objekta** [**toga skupa**] (*so folgt noch nicht, dass es möglich sei, ein gegebenes Object der Schaar so oft zu vervielfältigen, dass dadurch jedes andere übertroffen wird*). Primjer vrste objekata koji zadovoljavaju prethodno spomenute postulate [sc. aksiome teorije grupa – prim. S. P.], ali ne i Arhimedov aksiom, pružio je gospodin P. du Bois-Reymond u ovim istim *Annalen* sa svojim *Unendlich der Functionen*." (Stolz 1881: 269, moja emfaza dodana podebljanim slovima)[294]

I ne samo to, du Bois-Reymond iskoristio je Arhimedov aksiom kao osnovu za *klasifikaciju veličina* u dvije skupine, i to prema tome zadovoljavaju li Arhimedov aksiom ili ne. U prvom poglavlju du Bois-Reymondove *Allgemeine Functionentheorie* („Ueber mathematische Grössen") tako nalazimo sljedeću definiciju:

> „Veličine koje smo do sada spominjali imaju jedno iznimno zajedničko svojstvo, naime, *mogu se svesti na dužine*; njihove razlike, količnici i produkti, kao i kod dužina, ponovno su veličine iste vrste (*Grössen derselben Art, des quantités de même espèce*). Uređene su po veličini, od najmanjih prema najvećima (*in der Richtung des Kleinsten und Grössten ausgedehnt*), i, kao i dužine, međusobno su usporedive i mjerljive (*vergleichbar und messbar, comparables et mesurables*). Matematičke veličine te vrste nazivat ću linearnim matematičkim veličinama (*lineäre mathematische Grössen, quantités mathématiques linéaires*)." (du Bois-Reymond 1882: 23; za francuski prijevod v. du Bois-Reymond 1887: 32, moj kurziv)

[294] Du Bois-Reymond je još 1870/71. skicirao jedan od prvih nearhimedovskih sustava veličina u okviru takozvanoga *Infinitärcalcül*, odnosno istraživanja tokova vrijednosti i brzine rasta realnih funkcija te onoga što je nazivao „područjima veličina (*Grössengebiet*) beskonačnosti funkcija" (*die Unendlich der Functionen*). To je sustav na koji se poziva i Stolz. Više pojedinosti u Fisher 1981, Ehrlich 2006, §2 i Ehrlich 2021, §6, str. 513ff.

Za razliku od linearnih, *nelinearne* su veličine naprosto definirane kao nearhimedovske. Stolz je tu du Bois-Reymondovu distinkciju smatrao temeljnom idejom (*einen fundamentalen Gedanken*, usp. Stolz 1883: 512, nap. *). Slično će se razlikovanje nešto kasnije pojaviti i kod Bettazzija u *Teoria delle grandezze* (1890), s tom razlikom što on govori o veličinama koje pripadaju *klasama prve*, odnosno *klasama druge vrste* (*classi di 1a e classi di 2a specie*), ovisno o tome zadovoljavaju li Arhimedov aksiom ili ne (Bettazzi 1890: 42, 47).[295]

Polazeći od tih uvida, Stolz formulira aksiomatizaciju takozvanoga *sustava apsolutnih veličina* (*absolute Grössen*), odnosno sustava veličina koji na najbolji način egzemplificira skup zatvorenih dužina standardnoga euklidskog pravca, nad kojim su definirani uređaj, zbrajanje i jednakost odnosno podudarnost (kongruencija) (v. Stolz 1885: 69).[296] Kao što je istaknuo Ehrlich, Stolzova karakterizacija, promatrano povijesno, predstavlja prvi pokušaj koliko-toliko sofisticirane aksiomatizacije jednoga takvog sustava, zbog čega se Stolza može smatrati „ocem moderne teorije ekstenzivnih veličina" (Ehrlich 2006: 8–9). Pogledajmo što je Stolz učinio u *Allgemeine Arithmetik* (Stolz 1885: 69ff.). Ako su zadane neke veličine $A, B, C, \ldots$ koje čine sustav Σ, tada vrijedi sljedeće:

I.	Za bilo koje dvije dane veličine sustava Σ vrijedi: ili su jednake ili su nejednake, u kojem slučaju se jedna može opisati kao veća, a druga kao manja;
II.	Veličine koje pripadaju sustavu Σ mogu se zbrajati (i množiti) kao prirodni brojevi, pri čemu će njihov zbroj (umnožak) uvijek također biti veličina koja pripada sustavu Σ (sc. veličina iste vrste) [danas bismo rekli da je sustav Σ *zatvoren* s obzirom na operaciju zbrajanja (množenja) – prim. S. P.];
III.	Ako je $A > B$, onda u sustavu Σ postoji jedna i samo jedna veličina X takva da $B + X = A$;
IV.	Svaka veličina A iz Σ ili je ograničena ili neograničena s obzirom na mogućnost da se rastavi na jednake i s njom istovrsne dijelove, odnosno, u sustavu Σ postoji neka veličina X takva da $nX = A$, pri čemu $n \in \mathbb{N}$.[297]
V.	Ako $A > B$, onda postoji neki [cjelobrojni] umnožak (višekratnik) p od B koji nadmašuje A, $pB > A$.

Stolz odmah napominje da uvjet (V), odnosno Arhimedov aksiom, ne slijedi iz preostala četiri (*die fünfte Eigenschaft nicht aus den übrigen hervorgeht*), jer postoje sustavi veličina koji zadovoljavaju (I)–(IV), ali ne i (V). Također dodaje da se veličine koje zadovoljavaju (I)–(IV)

[295] „Una proprietà importante delle classi che non possegono salti, cioè delle classi connesse (in particolare continue) o di quelle limitate che possegono sole successioni, è quella che le loro grandezze soddisfano alla condizione […] che lo Stolz indica col nome di *Postulato d'Archimede*. […] In esse [sc. classi di 2a specie] non deve esser vero, in generale, il postulato d'Archimede."

[296] Doduše, Stolz *ad loc.* kaže da ono što vrijedi za dužine vrijedi, *mutatis mutandis*, i „za sve druge sustave geometrijskih veličina" (*für allen Systemen von geometrischen Größen*), poput kutova, površina i tako dalje.

[297] Ovu formulaciju Stolz temelji na devetom stavku šeste knjige *Elemenata*: „Od zadane dužine odrezati traženi dio" (τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν). To bi trebalo shvatiti u smislu: „svaka zadana dužina može se podijeliti na n jednakih dijelova, za svaki pozitivni cijeli broj n" (usp. Ehrlich 2006: 8, nap. 16).

mogu smatrati *nepravim*, odnosno *apsolutnim veličinama u širem smislu* (*uneigentliche oder solche im weiteren Sinne*), a ako im pridodamo i (V), tada se mogu smatrati *pravim*, odnosno *apsolutnim veličinama u užem smislu* (*eigentliche oder absolute Grössen im engeren Sinne*) (*op. cit.*, str. 70). Sada je moguće preciznije odrediti uvjete koje veličine $A, B, C, \ldots$ nekoga sustava veličina Σ moraju zadovoljavati da bi se mogle smatrati apsolutnim veličinama u užem smislu. Premda Stolz refleksivnost relacije jednakosti ne navodi izrijekom kao zaseban uvjet, možemo smatrati da ju podrazumijeva budući da već u uvodu *Allgemeine Arithmetik* (1885: 2) kaže kako je „svaka veličina jednaka sama sebi" (*jede Grösse ist sich selbst gleich*), kao što je ispravno primijetio i Ehrlich (2006: 8). Stoga taj uvjet možemo pridodati preostalim jedanaest uvjeta koje je Stolz eksplicitno formulirao i za koje s pravom napominje da su već operativni kod Euklida (v. Stolzove popratne napomene na str. 69–70 *et passim* u *Allgemeine Arithmetik*):

1. $A = A$, za svaku veličinu $A \in \Sigma$;
2. Ako $A = B$, onda $B = A$;
3. Ako $A > B$, onda $B < A$ i obratno;
4. $A = B$ ili $A > B$ ili $A < B$;[298]
5. Ako $A = B$ i $B = C$, onda $A = C$;
6. Ako $A = B$ i $B > C$, onda $A > C$;
7. Ako $A > B$ i $B > C$, onda $A > C$;

Budući da se „svakom paru veličina A i B sustava Σ mora pridružiti neka treća veličina sustava Σ kao njihov zbroj", odnosno budući da zbrajanje mora biti definirano tako da vrijedi $(A + B) \in \Sigma$ kad god $A, B \in \Sigma$, nužno je da sve veličine A, B i C sustava Σ zadovoljavaju i sljedeće uvjete:

8. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
9. $A + B = B + A$;
10. $A + B = A' + B'$ ako $A = A'$ i $B = B'$;
11. $A + B > A' + B'$ ako $A > A'$ i $B > B'$;
12. $A + B > A$ (sve prema Stolz 1885: 70).

Uvjeti (1)–(12), uzmu li se zajedno s prethodno navedenim uvjetima (III) i (IV), kompletiraju Stolzovu aksiomatizaciju. Za naše je potrebe u nastavku izlaganja osobito značajno to što Stolz nije samo aksiomatski okarakterizirao sustav apsolutnih veličina, nego je pokušao ustanoviti i u kojem je smislu moguće govoriti o neprekidnosti sustava Σ. U vezi s tim u radu „Zur Geometrie der Alten usw." ističe da se uvjet (V), odnosno

> „**Arhimedov aksiom za *dužine* u smislu antičke geometrije** (*das Axiom des Archimedes für die Strecken im Sinne der alten Geometrie*) **pojavljuje se kao korolar ako se svojstvima** [sc. **uvjetima**] **koje je specificirao Euklid pridoda još i** [**uvjet**]

[298] Stolz ovdje dodaje napomenu „ova je disjunkcija potpuna" (*die aufgestellte Disjunction vollständig ist*), što bi trebalo shvatiti u smislu da može vrijediti samo jedan od disjunkata. To sugerira da je Stolz pretpostavljao kako je sustav veličina Σ *strogo totalno* (odnosno *linearno*) uređen, zbog čega je u svojoj aksiomatizaciji najvjerojatnije i rabio relaciju $<$, a ne $\leq$. Kao što ćemo vidjeti u nastavku, od iste pretpostavke polazi i Veronese u svojoj aksiomatizaciji sustava Σ.

> **neprekidnosti za sustav tih dužina**. Ako bi se, pak, ta pretpostavka [sc. neprekidnosti] izostavila, tada bi princip o kojem je riječ [sc. Arhimedov aksiom] trebalo pridodati preostalim aksiomima geometrije, kako za *sustav dužina* (*das System der Strecken*), tako i za *sustav kutova* (*sowie auch für das der Winkel*)." (Stolz 1883: 512, Stolzov izvorni kurziv, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

„Uvjet neprekidnosti" o kojem Stolz ovdje govori i za koji smatra da bi ga trebalo pridodati aksiomima (1)–(12) jest Dedekindov uvjet. „Gospodin Dedekind", piše Stolz, „naučio nas je kako definirati neprekidnost sustava veličina **Σ**, a naš je zadatak sada njegove ideje podrobnije razraditi" (Stolz 1883: 508). Razrada Dedekindovih ideja na koju je Stolz ciljao svodila se na njegov pokušaj da dokaže tezu kako su *sustavi apsolutnih veličina koji su neprekidni u Dedekindovu smislu ujedno i arhimedovski*. Štoviše, Stolz je 1883. bio uvjeren da je to doista i dokazao.[299] Povrh toga iznio je i tezu da Cantorova definicija linearnoga kontinuuma kao savršenoga koherentnog skupa (v. Odjeljak [2.4.1]) pretpostavlja Arhimedov aksiom.[300] Međutim, Veronese je u svom pionirskom radu „Il continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede" iz 1889. prvi primijetio da je Stolzov navodni dokaz iz 1883. pogrešan utoliko što je cirkularan:

> „Gospodin Stolz ukazao je na važnost Arhimedova aksioma […] i smatrao da je moguće izvesti [arhimedovsko] svojstvo iz principa neprekidnosti. […] [U]vjeren sam da nije moguće izvesti [Arhimedov] aksiom iz principa neprekidnosti ako on već na neki način nije sadržan u tom principu. *Definicija kontinuuma koju je predložio gospodin Stolz implicitno pretpostavlja Arhimedov aksiom, zbog čega je njegov dokaz toga svojstva izlišan*. Stoga je glavni cilj ove napomene utvrditi koje mjesto Arhimedov aksiom zauzima među principima linearnoga kontinuuma." (Veronese 1889: 603, moj kurziv)

Još nekoliko kritičkih opaski, ovaj put o načinu na koji su Graßmann, du Bois-Reymond i Stolz shvaćali pojam veličine (*Grössenbegriff*) te, slijedom toga, koncipirali svoje sustave veličina (*Grössensysteme*), Veronese je iznio u *Fondamenti*, u okviru rasprave „o karakteru matematičkih veličina" u drugom poglavlju uvoda („*Prime proprietà delle forme matematiche astratte*", v. osobito nap. 1 na str. 15–16). Treba imati na umu da su *Fondamenti* već bili dovršeni i predani u tisak kada je Veronese 21.12.1889. objavio „Il continuo rettilineo", kao i to da rad iz 1889. predstavlja izvadak iz pisma koje je Veronese poslao Stolzu još u lipnju 1888., upravo kako bi mu skrenuo pozornost na te probleme. Stolz mu je zahvalio te mu poslao nekoliko teorema koji su trebali pružiti dodatna razjašnjenja i upotpuniti njegovo istraživanje o neprekidnim sustavima veličina (v. uvod u Veronese 1889, kao i nap. 1 na str. 603). Pogledajmo kako je Veronese zamislio unaprijediti Stolzovo izlaganje.

Veronese također želi aksiomatski okarakterizirati sustav veličina (*sistema di grandezze*) Σ te u tu svrhu formulira sljedeća *tri principa* (što se svodi na specificiranje deset uvjeta koje veličine sustava **Σ** trebaju zadovoljiti):

---

[299] V. Teoremu 3 u Stolz 1883: 510.

[300] Za dokaz, v. Stolz 1883: 509, nap. *. V. također i Ehrlich 2006: 13, nap. 25.

PRINCIP I (**P1**)

(1) Ako su A i B bilo koja dva objekta, odnosno veličine nekoga zadanog sustava Σ, tada može vrijediti jedna i samo jedna od sljedećih relacija: $A = B$ ili $A > B$ ili $A < B$ (ili, alternativno, $B = A$ ili $B < A$ ili $B > A$).

(2) Ako $A = B$ i $B = C$, onda $A = C$.

(3) Ako $A = B$ i $B > C$, onda $A > C$.

PRINCIP II (**P2**)

(1) Ako su A i B bilo koja dva objekta, odnosno veličine nekoga zadanog sustava Σ, tada znak (*il segno*) $A + B$ označava jedan i samo jedan objekt sustava Σ, pri čemu vrijedi:

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(3) $A + B > A, A + B > B$.

Ako je $A < B$, tada u sustavu Σ postoje objekti X i X' takvi da:

(4) $A + X = B$;

(5) $X' + A = B$;

(6) Ako $A = A'$ i $B = B'$, tada vrijedi $A + B = A' + B = A + B' = A' + B'$.

PRINCIP III (**P3**)

Ako isključimo nulu, u sustavu veličina Σ ne postoji minimalni interval (veličina) (sve prema Veronese 1889: 604, 610).[301]

Ako pažljivije promotrimo Stolzovu i Veroneseovu karakterizaciju sustava veličina Σ, vidjet ćemo da je Ehrlich s pravom istaknuo kako je riječ o strukturama koje danas nazivamo *Abelovim* ili *komutativnim grupama* te, još preciznije, o takozvanim *pozitivnim konusima*

[301] „Nulu" bi ovdje trebalo shvatiti kao *neutralni element* sustava veličina Σ (u smislu u kojem se taj pojam rabi u teoriji grupa – v. iduću napomenu), odnosno, Veroneseovim riječima, kao *nultu veličinu* (*grandezza nulla o zero*) (1889: 605). Ako se pritom zapitamo što su uopće „veličine", odnosno što su elementi sustava Σ, prethodno smo vidjeli da su du Bois-Reymond i Stolz elementima sustava Σ smatrali dužine. Iako Veronese u radu iz 1889. kaže da se elementima sustava Σ mogu smatrati „bilo koji objekti" (*oggetti qualunque*), u nastavku teksta i sâm govori o dužinama kao elementima sustava veličina Σ, dok u *Fondamenti* brojeve također tretira kao moguće elemente sustava Σ (usp. Veronese 1889: 604, 608ff.; Veronese 1891, Intr., Cap. III, §§1–4 i Cap. V, osobito §4). To znači da se „nula" može shvatiti kao standardni broj 0, za koji Veronese kaže da predstavlja „najmanju veličinu" u sustavu Σ i „broj manji od svih drugih brojeva" u sustavu Σ, što je u potpunosti u skladu s tumačenjem prema kojem Veronese, kao uostalom i Stolz, ima na umu isključivo takozvani pozitivni konus sustava veličina Σ – v. iduću napomenu i raspravu u glavnom tekstu. Da broj 0 kod Veronesea doista funkcionira kao neutralni element sustava Σ, vidi se iz činjenice da on eksplicitno formulira da za svako $a \in \Sigma$ vrijedi $0 + a = a + 0 = a$. Osim kao broj, „nula" se može shvatiti i kao ono što Veronese naziva nultom dužinom (*il segmento nullo o zero*) (*op. cit.*, str. 71), a što bismo suvremenom terminologijom nazvali *degeneriranim intervalom* (usp. nap. 236). Veronese ga označava s (AA) i definira kao skup koji se sastoji od samo jedne točke – točke A. „Točka A", prema Veroneseu, „predstavlja broj 0", odnosno „$(AA) = 0$" (*op. cit.*, str 78). Preciznije, riječ je o dužini čija je Lebesgueova mjera jednaka nuli. Veronese pritom napominje da to znači kako nulta dužina (AA) ne može ni povećati ni umanjiti nijednu nenultu dužinu, odnosno nijednu dužinu konačne duljine. Vrijedi primijetiti da je to u potpunosti analogno Zenonovu uvidu (operativnome u čitavoj klasičnoj grčkoj geometriji) prema kojem točka, budući da nema nikakvu veličinu, ni na koji način ne povećava veličinu kojoj se pridodaje niti umanjuje onu od koje se oduzima (ὃ γὰρ μήτε προστιθέμενον μήτε ἀφαιρούμενον ποιεῖ μεῖζον μηδὲ ἔλαττον) (usp. Arist. *Met.* 1001 b 7).

aditivno zapisanih uređenih Abelovih grupa (Ehrlich 2006: 6, v. i nap. 7; v. također str. 68).[302] Dakle, u ovoj fazi, odnosno prije Veroneseovih rezultata iz *Fondamenti*, još uvijek nemamo posla s uređenim poljima, nego samo s grupama: „kao što je uređeno polje realnih brojeva u određenom smislu proizašlo iz proučavanja euklidske geometrije, tako će tek proučavanje [Veroneseove] nearhimedovske geometrije dovesti do pojave prvih nearhimedovskih uređenih polja." (Ehrlich 2021: 506) Imajući na umu definicije iz nap. 302, možemo vidjeti da Veroneseovi principi (P1) i (P2), uzmu li se zajedno, karakteriziraju pozitivni konus uređene grupe, dok je princip (P3) ekvivalentan takozvanom *uvjetu gustoće*: za svaka dva intervala ili dvije dužine $A, B \in \Sigma$, gdje je $A < B$, postoji dužina C u Σ koja je, kako Veronese slikovito kaže, stiješnjena (*compresso*) između A i B, tako da vrijedi $A < C < B$ (usp. Ehrlich 2006: 68).[303]

---

[302] Evo kako se Abelove grupe danas standardno definiraju. Neka je G neprazan skup (takozvani nosač) i neka je $\cdot : G \times G \to G$ binarna operacija na G. Algebarska struktura $\mathbb{G} = \langle G, \cdot \rangle$ naziva se *grupoid*. Ako za svako $a, b, c \in G$ vrijedi $(ab)c = a(bc)$, riječ je o asocijativnom grupoidu, odnosno *polugrupi*. Ako postoji element e ili (u slučaju multiplikativno zapisanih grupa) $1 \in G$ takav da za svako $a \in G$ vrijedi $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, tada kažemo da struktura $\mathbb{G}$ ima *jedinicu* ili *neutralni element* (*neutral* u Kurepa 1969, Poglavlje 17; u literaturi se pojavljuje i pojam *identitet*), što se zapisuje ovako $\mathbb{G} = \langle G, \cdot, 1 \rangle$, a tu strukturu nazivamo *monoidom*. Neki element $a \in G$ nazivamo *invertibilnim* ako postoji $b \in G$ takav da je $b \cdot a = a \cdot b = 1$, u kojem slučaju element b nazivamo *inverzom* elementa a i pišemo a^{-1} umjesto b (budući da je inverz uvijek jednoznačno određen elementom čiji je inverz, u ovom slučaju elementom a). Sada jednostavno možemo definirati grupu: grupa je monoid u kojem je svaki element invertibilan, odnosno algebarska struktura $\mathbb{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ koja zadovoljava sljedeće uvjete: $(xy)z = x(yz)$ za svako $x, y, z \in G$, $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ i $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$. Ako za svako $a, b \in G$ vrijedi $ab = ba$, riječ je o *komutativnoj*, odnosno *Abelovoj grupi*. Abelove grupe tradicionalno su se, kao što pokazuju i primjeri Stolzove i Veroneseove aksiomatizacije, zapisivale aditivno, odnosno umjesto $\cdot$ za operaciju grupe koristio se $+$. U tom slučaju inverz nekoga zadanog elementa $a \in G$ označava se s $-a$, a neutralni element s 0 umjesto s 1. Naposljetku, struktura $\mathbb{G} = \langle G, +, \leq, 0 \rangle$ predstavlja *uređenu grupu* ako su ispunjeni sljedeći uvjeti: (i) $\langle G, +, 0 \rangle$ je Abelova grupa, (ii) $\langle G, \leq \rangle$ je uređen skup i (iii) za svako $x, y, z \in G$, iz $x \leq y$ slijedi $x + z \leq y + z$. Uređen skup definira se kao struktura $\langle G, \leq \rangle$ u kojoj je $\leq$ *totalni*, odnosno *linearni uređaj*, tj. binarna relacija na G takva da za svako $x, y, z \in G$ vrijedi (i) ako je $x \leq y$ i $y \leq z$, onda je i $x \leq z$, (ii) ako je $x \leq y$ i $y \leq x$, onda $x = y$ i (iii) $x \leq y$ ili $y \leq x$ (kad bismo odbacili uvjet (iii) i zadržali samo tranzitivnost i antisimetričnost, tada bismo govorili o *parcijalnom uređenju*). Primjerice, struktura $\langle \mathbb{Z}, +, \leq, 0 \rangle$ predstavlja uređenu grupu ($\mathbb{Z}$ je skup cijelih brojeva, a $+$ i $\leq$ standardno definirane operacija zbrajanja i poredak na $\mathbb{Z}$). Kada govorimo o *pozitivnom konusu* neke uređene grupe, misli se na podskup G^+ skupa elemenata G koji sadrži sve i samo one elemente grupe koji se smatraju pozitivnima s obzirom na način na koji je grupa uređena: $G^+ := \{a \in G : a \geq 0\}$; intuitivno, G^+ „skuplja" sve elemente grupe koji su veći od ili jednaki neutralnom elementu. To ponovno lijepo ilustrira primjer cijelih brojeva, gdje je pozitivni konus određen na sljedeći način: $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$, odnosno $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Pozitivni su konusi, kao i same grupe, zatvoreni s obzirom na operaciju grupe ($\cdot$ ili $+$): ako $a, b \in G^+$, onda i $a \cdot b \in G^+$. Također, primijetimo da pozitivni konus određuje poredak grupe: $a \leq b \Leftrightarrow b - a \in G^+$. U vezi s prethodnom napomenom o strogo totalnom uređaju (usp. nap. 298), koji su i Stolz i Veronese preferirali u svojim aksiomatizacijama sustava veličina Σ, valja istaknuti da se uređene Abelove grupe mogu definirati i posredstvom relacije $<$, budući da su, kao što je poznato, relacije $<$ i $\leq$ uzajamno definirljive: $a < b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b$ i, obratno, $a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$. Radi što vjernije rekonstrukcije Veroneseove aksiomatizacije sustava Σ, u glavnom ćemo tekstu rabiti relaciju strogoga totalnog uređaja, odnosno $<$. Za više pojedinosti o teoriji grupa v. Kurepa, *op. cit.*

[303] Primijetimo da se uređaj $<$ ponaša na potpuno isti način, odnosno da ima ista algebarska svojstva, neovisno o tome kako interpretiramo „element sustava veličina" Σ; i u slučaju brojeva i u slučaju dužina relaciju $<$ treba shvatiti na isti način. Ako su elementi Σ brojevi, primjerice standardni cijeli ili realni brojevi, u strukturama $\langle \mathbb{Z}, +, <, 0 \rangle$ odnosno $\langle \mathbb{R}, +, <, 0 \rangle$, izraz $3 < 5$ znači da je broj 3 manji od broja 5. Ako pak govorimo o dužinama kao elementima Σ, izraz $a < b$ treba čitati kao „dužina a kraća je od dužine b". Kada je riječ o operaciji $+$, ona se u slučaju brojeva interpretira na uobičajeni način, kao zbrajanje, dok se u slučaju dužina

Du Bois-Reymondov učenik, teoretičar grupa Otto Hölder (1859–1937)[304], u radu „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass“ iz 1901. godine (u kojem je i sâm, vrlo slično Stolzu, Bettazziju i Veroneseu prije njega, nastojao aksiomatizirati pojam veličine) ponajprije se oslonio na Veroneseovu karakterizaciju sustava Σ, tek je neznatno modificirajući. Naime, Hölder je istaknuo da su Veroneseovi Principi I–III ekvivalentni sljedećim aksiomima (sve prema prijevodu Hölder 1901 u Michell & Ernst 1996: 238), koje Hölder naziva *aksiomima veličine*, odnosno „činjenicama na kojima počiva teorija mjerljivih apsolutnih veličina“:

I.	Ako su dane bilo koje dvije veličine a i b, tada može biti istinit jedan i samo jedan od sljedećih iskaza: a je identično sa b ($a = b$, $b = a$), a je veće od b i b je manje od a ($a > b$, $b < a$) ili, obratno, b je veće od a i a je manje od b ($b > a$, $a < b$).
II.	Za svaku zadanu veličinu uvijek postoji [veličina koja je] manja [od nje].
III.	Za svaki uređeni par (ne nužno različitih) veličina a i b, njihov je zbroj $a + b$ dobro definiran.
IV.	$a + b > a$ i $a + b > b$.
V.	Ako je $a < b$, tada postoje [veličine] x i y takve da $a + x = b$ i $y + a = b$.
VI.	Uvijek vrijedi da je $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Tim aksiomima Hölder pridodaje i aksiom

VII.	Ako podijelimo [sustav] veličina na dvije klase tako da (i) svaka veličina pripada jednoj i samo jednoj klasi, (ii) da nijedna od tih klasâ nije prazna te (iii) da je svaka veličina koja pripada prvoj klasi manja od svake veličine koja pripada drugoj klasi, tada postoji neka veličina ξ takva da svako $\xi' < \xi$ pripada prvoj klasi, a svako $\xi^n > \xi$ pripada drugoj glasi.

Očito je da (VII) predstavlja *Dedekindov uvjet neprekidnosti*, što i sâm Hölder priznaje (Michell & Ernst 1996: 247, nap. 4). Podsjetimo se, Dedekind je „bit neprekidnosti“ (*das Wesen der Stetigkeit*) prepoznao u principu koji je u *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) formulirao na sljedeći način:

> „Ako se sve točke pravca podijele u dvije klase tako da svaka točka jedne klase leži lijevo od svake točke druge klase, tada postoji jedna i samo jedna točka koja

može interpretirati kao konkatenacija, odnosno nadovezivanje, kao u klasičnoj sintetičkoj geometriji, primjerice u *Elementima*. Alternativno, uvedemo li mjeru dužine, odnosno njenu duljinu (shvaćenu kao funkciju koja svakoj dužini pridružuje pozitivan realni broj – usp. nap. 5), analogiju između brojeva i dužina, koja je već očita kod Veronesea (v. nap. 301 o „nuli“), možemo učiniti još eksplicitnijom. U tom slučaju na dužine možemo referirati posredstvom njihovih mjera, odnosno duljina izraženih realnim brojevima, kao u analitičkoj geometriji: tvrdnja „dužina a kraća je od dužine b“ postaje „duljina dužine a manja je od duljine dužine b, odnosno $\ell(a) < \ell(b)$, gdje $\ell(a), \ell(b) \in \mathbb{R}$.“ U tom slučaju, i operaciju $+$ treba shvatiti kao uobičajeno zbrajanje, pa „aritmetika dužina“ postaje naprosto uobičajena aritmetika realnih brojeva.

[304] Za više pojedinosti o Hölderu i njegovim doprinosima u području algebre v. Nicholson 1993, kao i „Introduction“ u Michell & Ernst 1996: 236–238. Također v. tematski broj „The Epistemological Thought of Otto Hölder“ časopisa *Philosophia Scientiæ*, Vol. 17, Cahier 1, 2013. (ur. P. Cantù i Oliver Schlaudt).

proizvodi tu podjelu svih točaka u dvije klase, to razdvajanje (*Zerschneidung*) pravca na dva dijela.“ (Dedekind 1872, §3, str. 18)

Alternativno, ako umjesto o neprekidnosti pravca želimo govoriti o skupu (ili, kako kaže Dedekind, sustavu) realnih brojeva, tada imamo sljedeću formulaciju:

„Razloži li se sustav $\mathfrak{R}$ svih realnih brojeva na dvije klase $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$, tako da je svaki broj α_1 prve klase $\mathfrak{A}_1$ manji od svakoga broja α_2 druge klase $\mathfrak{A}_2$, tada postoji jedan i samo jedan broj α koji proizvodi to razlaganje.“ (Dedekind 1872, §5, str. 25)

Središnje pitanje kojim se bavio Veronese, a u čemu ga je potom slijedio i Hölder, bilo je kakav je odnos između Dedekindova i Arhimedova aksioma. Hölderovim riječima,

„U literaturi prevladava prilična nejasnoća kada je riječ o odnosu između Arhimedova aksioma i aksioma (VII). Stolz je primijetio da Arhimedov aksiom predstavlja posljedicu neprekidnosti ako se neprekidnost definira *à la* Dedekind, odnosno pomoću aksioma (VII). […] **Veronese je tvrdio da pojam kontinuuma mora biti formuliran drukčije nego što je to učinio Dedekind te da Dedekindov aksiom, odnosno naš aksiom (VII), sadrži Arhimedov aksiom**.“ (Michell & Ernst 1996: 248, nap. 8; moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Pogledajmo kako izgleda Veroneseova alternativna formulacija aksioma neprekidnosti. Veronese je, kao i Cantor prije njega (usp. Odjeljak [2.4.1]), znao da (P3), odnosno uvjet gustoće, još uvijek nije dovoljan za potpunu i adekvatnu karakterizaciju linearnoga kontinuuma. Iz toga je razloga formulirao Princip IV, poznatiji kao uvjet *apsolutne neprekidnosti*:

PRINCIP IV (**P4**)

Ako [zatvoreni] interval odnosno dužina (XX') čije se krajnje točke (*estremi*) uvijek pomiču u suprotnim smjerovima, postaje neodređeno mala (*indefinitamente piccolo*), tada ona uvijek sadrži neki element Y sustava Σ različit od X i X' (Veronese 1889: 612).[305]

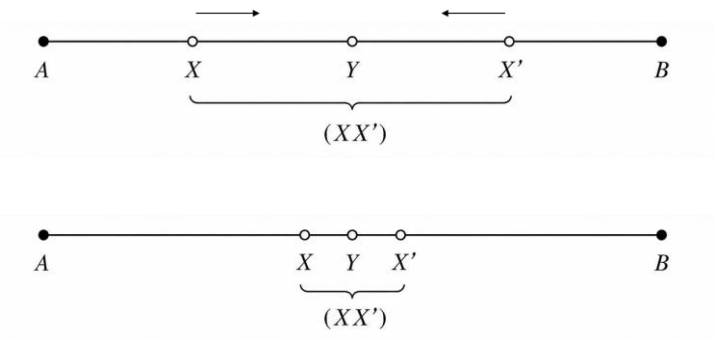
Treba imati na umu da Veronese pretpostavlja kako se (P4) odnosi na varijabilni zatvoreni interval (XX'), koji predstavlja podinterval nekoga zadanog intervala (AB) iz Σ. Preciznije, riječ je o podintervalima (AX) i (AX') za koje vrijedi $(AX) < (AX')$ i $(XX') = (AX') - (AX)$.[306] Zadržimo li pritom točku A fiksnom, a odnos $(AX) < (AX')$ konstantnim

[305] „Se l'intervallo (XX') i cui estremi sono sempre variabili in verso opposto diventa indefinitamente piccolo, esso contiene sempre un elemento Y di Σ distinto da X e X'.“ U produžetku, Veronese dodaje da (P4) može da se nazove i „principom ili hipotezom granice“ (*principio o l'ipotesi del limite*) i da se posredstvom njega karakterizuje „neprekidnost jednodimenzionalnog homogenog sistema“ (*la continuità del sistema omogeneo ad una dimensione*). Hölder je ovako predstavio Veroneseov aksiom (P4):

„Ako neke dvije veličine x i x' variraju na takav način da x neprestano raste, a x' neprestano opada, pri čemu uvijek vrijedi $x < x'$ te razlika $x' - x$ postaje infinitezimalna, tada u tom sustavu [veličina] postoji veličina koja je veća od svake vrijednosti koju može poprimiti x i manja od svake vrijednosti koju može poprimiti x'.“ (navedeno prema prevodu u Michell & Ernst 1996: 248, nap. 8)

[306] Budući da je prethodno već utvrđeno da je sustav veličina Σ, odnosno struktura koju je Veronese aksiomatski okarakterizirao principima (P1)–(P4), aditivno zapisana uređena Abelova grupa, odnosno, preciznije, pozitivni konus takve Abelove grupe, koji možemo označiti s S^+ (usp. nap. 302 *supra*), operaciju oduzimanja u sustavu Σ moguće je jednostavno definirati na sljedeći način. Budući da su elementi sustava Σ invertibilni, inverz bilo

(*constante*), neka se krajnja točka X intervala (XX') pomiče udesno (neformalno govoreći, kao da vrijednosti koje X može poprimiti „monotono rastu"), dok se krajnja točka X' istodobno pomiče ulijevo (kao da vrijednosti koje X' može poprimiti „monotono opadaju"), otprilike kao na *Sl. 14* (Veronese 1889: 608, usp. Ehrlich 2006: 69 i Popović 2017: 105).[307]



Sl. 14. Vizualni prikaz Veroneseova Principa IV

kojega elementa a sustava veličina Σ jest $-a$. Zamijenimo gore navedeni izraz $(AX') - (AX)$ s $b - a$ (pri čemu je $a < b$). Tada vrijedi $b - a \stackrel{\text{def}}{=} b + (-a)$, gdje je $-a$ naprosto inverz elementa a. (Sâm Veronese na jednome mjestu to sažeto izražava tvrdnjom da je „oduzimanje inverzna operacija u odnosu na zbrajanje" – v. *Fondamenti*, str. 39.) Budući da radimo unutar pozitivnoga konusa grupe Σ, S^+, razlika bilo koja dva elementa $a, b \in S^+$ također pripada pozitivnomu konusu, odnosno $b - a \in S^+$ (jer, kao što je već istaknuto, upravo pozitivni konus određuje poredak grupe: $a < b \Leftrightarrow b - a \in S^+$). Ako za elemente sustava veličina Σ uzmemo, primjerice, cijele brojeve, to jednostavno znači da će razlika bilo koja dva cijela broja iz S^+ uvijek biti pozitivan cijeli broj. Analogno tomu, uzmemo li za elemente sustava veličina Σ dužine, prema Veroneseovu mišljenju to znači da će razlika bilo kojih dviju dužina a i b, ako je $a < b$, „općenito uzev, uvijek ponovno dati dužinu koja i sama pripada fundamentalnoj formi [sc. sustavu Σ – prim. S. P.]." (Veronese 1891: 71). *Ad loc.*, Veronese eksplicitno potvrđuje da je prethodna definicija oduzimanja opravdana i kada su elementi sustava Σ dužine: „možemo promatrati oduzimanje dužine (BC) od dužine (AC) kao zbrajanje dužine (CB) s dužinom (AC)." Drugim riječima, umjesto dužine (BC) uzimamo njezin inverz, odnosno dužinu koju Veronese označuje s (CB), za koju kaže da je „suprotnoga smjera od dužine (AC)" (*essendo* (CB) *di verso opposto ad* (AC)), što zapisuje u obliku $+(CB) = -(BC)$ (*op. cit.*, str. 72, naročito v. DEF. IIc). Stoga, $(AC) - (BC) = (AC) + (CB)$ (*op. cit.*, str. 71–72; v. DEF. I i OSS. I). Zamijenimo li sada (AC) s b, (BC) s a, a (CB) s $-a$, dobivamo upravo prethodnu definiciju $b - a = b + (-a)$. Zanimljivo je da Veronese nešto dalje u tekstu dodaje kako se, ne ograničimo li se samo na S^+, odnosno na pozitivni konus grupe Σ, nego promatramo cijelu grupu, „*operacija oduzimanja može proširiti* tako da pretpostavimo kako je $(BC) > (AC)$, pri čemu će rezultat oduzimanja biti dužina (AB), doduše *suprotnoga usmjerenja* od dužine (BC), odnosno u smjeru dužine (CB)." (*ibid.*, DEF. IIa; moj kurziv). U skladu s prethodno uvedenom notacijskom konvencijom vrijedi $+(AB) = -(BA)$. To, naravno, ne znači da je Veronese spreman govoriti o „negativnim dužinama" ili „dužinama negativne duljine" – što, strogo geometrijski promatrano, nema nikakva smisla – nego isključivo o *drukčije orijentiranim dužinama*, odnosno o dužinama suprotnoga usmjerenja, i to samo ako operaciju oduzimanja promatramo na cijeloj grupi Σ, bez prethodnoga ograničenja prema kojem umanjitelj mora biti manji od ili jednak umanjeniku. Želimo li vizualizirati što to točno znači, možemo zamisliti da se operacije zbrajanja i oduzimanja u slučaju pozitivnog konusa S^+ odvijaju na brojevnom polupravcu koja započinje u 0 i proteže se udesno, odnosno sadrži samo pozitivne brojeve (v. sl. lijevo), dok u slučaju cijele grupe Σ radimo na brojevnom pravcu koji se bez ikakvih ograničenja proteže i ulijevo i udesno od 0 (v. sl. desno). Otprilike ovako:



[307] Veronese *ad loc.* kaže da interval (XX') postaje manji od svakoga zadanog intervala koji pripada sustavu Σ odnosno da postaje neodređeno malen (usp. DEF. III na str. 610).

Dakle, (P4) tvrdi da, ako krajnje točke X i X' mogu varirati na takav način da za svaki pozitivni interval $Z \in \Sigma$ vrijedi $(X, X') < Z$ za sve vrijednosti koje X i X' mogu poprimiti, tada postoji interval $(A, Y) \in \Sigma$ takav da vrijedi $(A, X) < (A, Y) < (A, X')$, za sve vrijednosti koje X i X' mogu poprimiti (Veronese 1889: 610). Budući da, prema (P3), Σ ne sadrži najmanji element odnosno minimalni interval, te da X i X' variraju istodobno, X ne može poprimiti najveću vrijednost (maksimum), kao što ni X' ne može poprimiti najmanju vrijednost (minimum). Kao što je primijetio Ehrlich, zamijenimo li jednostavno varijable X i X' skupovima A i B vrijednosti koje X i X' mogu poprimiti, Veroneseova definicija apsolutne neprekidnosti može se preformulirati *à la* Hölder na sljedeći način:

PRINCIP IV – Hölder

„Ako su A i B neprazni podskupovi od Σ, pri čemu A nema najveći i B nema najmanji element i pri čemu svaki element A prethodi svakom elementu B, te ako za svaki pozitivan element $c \in \Sigma$ postoje elementi $a \in A$ i $b \in B$ za koje vrijedi $b - a < c$, tada postoji neki element $z \in \Sigma$ koji leži strogo između elemenata A i B." (Ehrlich 1994a: xix)

Evo i Hölderove izvorne, doduše pomalo nezgrapne formulacije (v. i nap. 305):

> „Postoje dvije klase veličina, veličine X i X'; nijedna veličina ne može istodobno pripadati objema klasama, što, međutim, ne znači da te dvije klase, uzete zajedno, nužno iscrpljuju ukupnost svih veličina [sc. cijeli sustav veličina Σ – prim. S. P.] ili pak sve veličine unutar nekoga intervala. Svaka veličina iz X treba biti manja od svake veličine iz X' i ne smije postojati najveća veličina u X niti najmanja veličina u X'. Za svaku veličinu δ iz ukupnosti svih veličina [sc. za svako $\delta \in \Sigma$], može se pronaći neko x iz X i neko x' iz X' takvo da je $x' - x < \delta$. Veroneseov postulat implicira da pod tim uvjetima postoji neka veličina koja leži između dviju klasa [X i X'] različita od elemenata obiju." (navedeno prema prijevodu u Michell & Ernst 1996: 248, nap. 8)

Budući da je, kao što se može vidjeti iz ovih formulacija, element z jedinstveno određen, Veroneseov aksiom (P4) može se preformulirati tako da se veza s Dedekindovim aksiomom učini još eksplicitnijom. Ehrlich je utvrdio da su to prvi učinili, neovisno jedan o drugome, ali praktički u isto vrijeme, Arthur Schönflies (1853–1928) i Luitzen Brouwer (usp. Ehrlich 1994a: xix i Ehrlich 2006: 70). I ne samo to, Schönflies je po svoj prilici prvi koji je prethodno okarakterizirani element $z \in \Sigma$ nazvao *Veroneseovim rezom* sustava Σ: „Von einem solchen Element sage ich, das es einem *Veroneschen Schnitt* entspricht." (Schönflies 1906: 28) S druge strane, Brouwer govori o tome da je nearhimedovski kontinuum *Veronese neprekidan*: „Wel bezit het niet-Archimedisch continuum *Veronesische continuiteit*." (Brouwer 1907: 72) Evo i treće, Schönflies-Brouwerove formulacije (P4), zadane u terminima reza:

PRINCIP IV – Schönflies-Brouwer (Veroneseov rez)

„Ako je (A, B) Dedekindov rez sustava veličina Σ takav da za svaki pozitivan element $c \in \Sigma$ postoje elementi $a \in \mathrm{A}$ i $b \in \mathrm{B}$ za koje vrijedi $b - a < c$, tada ili A ima najveći element, ili B ima najmanji element, pri čemu je disjunkcija ekskluzivna tako da može biti realizovan samo jedan od disjunkata, a ne oba.“ (usp. Ehrlich 1994a: xix)[308]

Uz neznatnu izmjenu, Schönflies–Brouwerovu formulaciju Veroneseova uvjeta možemo dati i u algebarskoj verziji, povezujući je tako s prethodno rekonstruiranom Veroneseovom aksiomatizacijom sustava veličina Σ kao uređene Abelove grupe:

PRINCIP IV – algebarska formulacija

Neka je $\Sigma = \langle S, +, \leq, 0 \rangle$ uređena Abelova grupa i $S^+ \subset S$ njezin pozitivni konus. Ako je (A, B) Dedekindov rez grupe Σ i ako za svaki element $\sigma \in S^+$ postoje elementi $a \in A$ i $b \in B$ za koje vrijedi $b - a < \sigma$, tada ili A ima najveći element (maksimum) ili B ima najmanji element (minimum), ali ne oba (usp. Ehrlich 2021: 509).

Veronese je, naravno, bio svjestan da su njegov i Dedekindov aksiom usko povezani, o čemu svjedoči i sljedeća fusnota pridodana uz formulaciju (P4):

> „Čini mi se da je ovaj princip [sc. Veroneseov aksiom apsolutne neprekidnosti] intuitivno bolje opravdan od drugih koji su dosad predlagani, uključujući i [aksiom] koji je formulirao gospodin Dedekind, a koji svakako treba vrlo ozbiljno uzeti u obzir u osnovama geometrije (*del che bisogna tener gran conto nei fondamenti della geometria*), čiji aksiomi moraju biti izvedeni iz prostorne intuicije, pri čemu to nipošto ne znači da bi trebalo zanemariti ili odbaciti sve one apstraktne hipoteze koje ne proturječe tim aksiomima [usp. odjeljke [2.4] i [2.5] supra]. **Po mojem mišljenju, formuliranju postulata neprekidnosti ne vodi podjela** (*non è la divisione*) **intervala** (AB) **na dvije grupe** [**sc. skupove vrijednosti**] (X) **i** (X') **za koje uvijek vrijedi** $(AX) < (AX')$ **nego, naprotiv, činjenica da** [**interval**] (XX') **postaje neodređeno malen** [**sc. infinitezimalan**]. U apsolutnom kontinuumu postoje takve podjele pri kojima (XX') ne postaje neodređeno malen i, samim time, [ne postoje] ni elementi Y koji ih određuju [sc. koji određuju rez – prim. S. P.]. Kao što ćemo vidjeti, Dedekindov je postulat moguće dokazati uz pomoć Arhimedova aksioma, budući da je upravo u tom postulatu [sc. Dedekindovu] sadržan Arhimedov aksiom (*come in questo postulato è contenuto in particolare l'assioma*

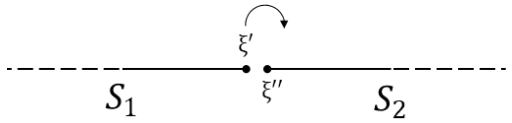
[308] Usporedbe radi, v. Brouwerovu formulaciju:

> „Ako se skup točaka kontinuuma podijeli na dva dijela tako da je svaka točka jednoga dijela višega reda (*hooger in rang is*) od svake točke drugoga dijela i ako je također moguće iz oba ta dijela odabrati dvije točke čija se međusobna razlika može učiniti manjom od bilo koje zadane veličine, tada ili niži dio ima najveću točku, a viši dio nema najmanju točku, ili viši dio ima najmanju točku, a niži dio nema najveću točku. (Ako nije ispunjen uvjet da se razlika između dviju odabranih točaka može učiniti neodređeno malom (*onbepaald klein*), tada se može dogoditi da niži dio nema najveću točku i da viši dio nema najmanju točku.)“ (Brouwer 1907: 72–73)

d'Archimede)." (Veronese 1889: 612, nap. 1, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Međutim, unatoč toj sličnosti, „Dedekindova i Veroneseova definicija neprekidnosti sadržajno se razlikuju (*sind bekanntlich inhaltlich verschieden*)" (Schönflies 1906: 28), i to u sljedećem pogledu. Iako je očito da je u arhimedovskom, i to samo u arhimedovskom slučaju, Veroneseov uvjet neprekidnosti trivijalno zadovoljen i utoliko ekvivalentan Dedekindovu (usp. Ehrlich 2006: 71, Popović 2017: 106), Schönflies je ispravno primijetio da, dok kod Dedekinda *svaka* podjela ili particija nekoga zadanog skupa ili sustava veličina Σ (ili, kako gore kaže Veronese, intervala (AB)) na dvije klase X i X' pri čemu je svaki element $x \in X$ manji od svakoga elementa $x' \in X'$ uvijek odgovara nekom broju ξ, kod Veronesea takav broj postoji samo kada razlika $x' - x$ može postati manja od bilo kojega zadanog elementa skupa Σ pri čemu elementi Σ koji zadovoljavaju Veroneseovu definiciju dopuštaju i takvu particiju sustava Σ koja *ne određuje nijedan element* toga sustava, u kojem slučaju govorimo o *prorezu* (*Lücke*, eng. *gap*) a ne o rezu sistema Σ (Schönflies 1906, *ad loc. cit.*). Još preciznije, ako je zadan neki sustav veličina ili skup Σ podijeljen u skladu s Dedekindovom definicijom na dva odgovarajuća skupa S_1 i S_2, moguće su samo sljedeće četiri opcije:

(i) S_1 ima posljednji element ξ' i S_2 ima prvi element ξ'' u kojem slučaju u Σ postoji takozvani *skok* (*Sprung*), otprilike kao na *Sl. 15*:



Sl. 15. Vizualni prikaz „skokova" u kontinuumu

(ii) S_1 ima posljednji element ξ', ali S_2 nema prvi element;

(iii) S_2 ima prvi element ξ'', ali S_1 nema posljednji element;

(iv) Ili S_1 ima posljednji element ili pak S_2 ima prvi element, u kojem slučaju u Σ postoji prorez (usp. Schönflies 1906: 29).

I Dedekind i Veronese isključuju (i) odnosno mogućnost skokova. Međutim, za razliku od Dedekinda, kod kojega neprekidni sustavi veličina moraju biti lišeni Dedekindovih proreza, zbog čega je isključena mogućnost (iv), kod Veronesea to nije slučaj, premda se svakako mora isključiti mogućnost postojanja Veroneseovih proreza u Σ (usp. Schönflies 1906, *ad loc.* cit.). Kada je riječ o Veroneseovim rezovima, intuitivno ih možemo promatrati *kao Dedekindove rezove koji imaju širinu*, budući da *su proizvedeni infinitezimalnom dužinom, a ne točkom* (Hobson 1921: 56[309] i Hobson 1994: 16), što, naravno, nije iznenađujuće, budući da je Veroneseov primarni cilj *ab initio* bio formulirati općenitiji uvjet, odnosno aksiom neprekidnosti – svojevrsnu generalizaciju Dedekindova aksioma – koja bi obuhvaćala ne samo arhimedovske nego i nearhimedovske strukture (usp. Popović 2017: 106). Zanimljivo, i možda iznenađujuće, sustav veličina koji zadovoljava Veroneseove principe, odnosno

[309] Usp. i Hobsonovu formulaciju (iz Hobson 1921): „In Veronese's system […] a section of the rational points, or a section of the points represented by real numbers, is made, *not by a single point*, *but by an infinitesimal segment*." (moj kurziv)

aksiome (P1)–(P4), sâm Veronese još uvijek ne smatra *apsolutnim kontinuumom*. Naime, da bi se neki model aksioma P1–P4 mogao tako nazvati, potrebno je da zadovolji i

PRINCIP V (**P5**)

„Ako su α i β dva intervala sustava Σ i ako je $\alpha < \beta$, tada uvijek postoji točno određen multiplikativni simbol (broj) η (*vi è sempre un simbolo di molteplicità*) takav da vrijedi $\alpha \cdot \eta > \beta$." (Veronese 1889: 613)

Veronese odmah potom dodaje i sljedeće:

> „[A]ko je zadan [interval] α, moguće je pomoću α konstruirati čitav sustav Σ, tako da budu zadovoljeni prethodni principi [sc. aksiomi]. […] Sustav Σ koji zadovoljava prethodne principe [sc. (P1)–(P5)] nazivamo homogenim jednodimenzionalnim sustavom neprekidnim u apsolutnom smislu ili, jednostavnije, apsolutnim kontinuumom (*continuo assoluto*)."

Očito je da (P5) predstavlja poopćenje Arhimedova aksioma[310], a to ističe i sâm Veronese: ako $\eta \in \mathbb{N}$, tada se (P5) naziva Arhimedovim aksiomom, a sustav Σ *uobičajenim kontinuumom* (*continuo ordinario*) (v. DEF. VII u Veronese 1889: 613). Ehrlich je prvi istaknuo da je Veroneseov naglasak na „*simbolo di molteplicità*", odnosno inzistiranje na višekratnicima i množenju, iznimno značajan utoliko što pokazuje da se operacija koju zahtijeva (P5) ne može svesti na opetovano zbrajanje (osim u arhimedovskom slučaju kada je $\eta \in \mathbb{N}$) što je razlog zbog kojega su i sâm Veronese u *Fondamenti*, kao i drugi autori koji su konstruirali nearhimedovske modele Veroneseovih aksioma (P1)–(P5), prešli s aditivno zapisanih uređenih Abelovih grupa (i njihovih pozitivnih konusa) na bogatije, odnosno složenije strukture poput uređenih nearhimedovskih polja (usp. Ehrlich 2006: 72). Imajući upravo takve strukture u vidu, Veronese je u *Fondamenti* formulirao još jedan aksiom, odnosno uvjet neprekidnosti – takozvanu *hipotezu relativne neprekidnosti* (IP. VI u Veronese 1891: 128).

[2.6.1] Veroneseovo nearhimedovsko uređeno polje i Veroneseovi brojevi iz *Fondamenti*

Pogledajmo kako izgleda Veroneseova preformulacija (P4) iz *Fondamenti* (IP. VIII u Veronese 1891: 150) te formulacija uvjeta relativne neprekidnosti:

HIPOTEZA VIII – hipoteza o apsolutnom kontinuumu (*ipotesi sul continuo assoluto*) (**H8**)

„Svaka dužina (XX') čiji krajevi [sc. krajnje točke X i X'] variraju [sc. pomiču se] u suprotnim smjerovima i koja postaje neodređeno mala [sc. infinitezimalna] u apsolutnom smislu (*indefinitamente piccolo in senso assoluto*) sadrži u sebi element izvan područja varijabilnosti svojih krajeva."[311]

[310] Usp. sa transferom arhimedovskog svojstva iz $\mathbb{R}$ u $^*\mathbb{R}$ u nestandardnoj analizi. V. Odeljak [4.1].

[311] „Ogni segmento (XX') cogli estremi variabili in versi opposti che diventa indefinitamente piccolo in senso assoluto contiene un elemento fuori del campo di variabilità dei suoi elementi." (Veronese 1891: 150) Očito se

HIPOTEZA VI – hipoteza relativne neprekidnosti (*ipotesi sulla continuità relativa*) (**H6**)

„Svaka dužina (XX') čiji krajevi [sc. krajnje točke X i X'] variraju [sc. pomiču se] u suprotnim smjerovima i koja postaje neodređeno mala [sc. infinitezimalna] sadrži u sebi element izvan područja varijabilnosti svojih krajeva.“ [312]

Prije nego što razložimo Veroneseove aksiome (H6) i (H8), potrebno je istaknuti da je relevantni matematičko-konceptualni okvir unutar kojega ih je Veronese formulirao bitno drukčiji od onoga iz 1889., a to se ponajprije očituje u činjenici da se analiza u *Fondamenti* više ne vodi u području teorije grupa, nego *teorije uređenih polja*. Kao što je istaknuo Ehrlich (2021: 506), Veronese, Levi-Civita (v. radove 1892/93 i 1898), a nešto kasnije i Hilbert (u *Grundlagen*), bili su vođeni manje ili više precizno artikuliranim shvaćanjem da za neku zadanu jediničnu dužinu (AB) pravca l standardnoga euklidskog prostora $\mathbb{E}^n$ kolekcija orijentiranih odnosno usmjerenih dužina pravca l koje polaze iz točke A (uključujući i degeneriranu dužinu (AA)) tvori arhimedovsko uređeno polje, pri čemu (AA) i (AB) figuriraju kao konstante (neutralni elementi) $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$, odnosno kao aditivni i multiplikativni identitet polja, a zbrajanje i množenje dužina definirani su na uobičajen način.[313] Danas se, kao što je poznato, uređena polja uvode, odnosno opisuju, aksiomatski (za pojedinosti v. Odjeljak [2.6.3]).

Veroneseova konstrukcija uređenoga polja u *Fondamenti*, za razliku od, primjerice, Hilbertove u *Grundlagen*, znatno je složenija i zamršenija, ponajprije zbog Veroneseova inzistiranja na čisto sintetičkoj metodi (usp. odjeljke [2.3] i [2.4]). Polazeći od intuitivnoga, intervalski strukturiranoga kontinuuma (v. [2.4] *supra*) iz Cap. IV, §1 uvoda u *Fondamenti*, Veroneseov je cilj u nastavku (vrlo složenoga) izlaganja uvesti sustav *osnovnih*, odnosno *fundamentalnih elemenata* (*elemento fondamentale*), koji će biti prikladan za odgovarajuću apstraktnu matematičku karakterizaciju svih relevantnih svojstava intuitivnoga kontinuuma, odnosno za konstrukciju takozvane *fundamentalne forme* (*forma fondamentale*), koja u osnovi predstavlja *Veroneseovo nearhimedovsko uređeno polje* $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ ili *Veroneseov apsolutni kontinuum*. Iako je iz filozofskih razloga favorizirao aristotelovsku koncepciju prema kojoj su, u skladu sa Zenonovim aksiomom, konstitutivni elementi kontinuuma omeđeni, odnosno zatvoreni intervali (dužine), Veronese u nastavku izlaganja ipak govori o točkama kao o „fundamentalnim elementima“ kontinuuma, napominjući pritom da se neki zadani sustav geometrijskih objekata prema potrebi može smatrati *i* elementom *i* formom, što je u skladu s poznatim *principom dualnosti* iz projektivne geometrije[314], a Veronese je, kao što smo već vidjeli, bio jedan od vodećih autoriteta za projektivne metode u drugoj polovici 19. stoljeća (usp. Odjeljak [1.2]).

---

ovdje potkrala tiskarska pogreška: umjesto „*variabilità dei suoi elementi*“ trebalo bi stajati „*variabilità dei suoi estremi*“, kao i u formulaciji HIP. VI (v. sljedeću nap.).

[312] „Ogni segmento (XX') il quale avendo gli estremi sempre variabili in versi opposti diventa indefinitamente piccolo contiene un elemento fuori del campo di variabilità degli estremi stessi.“ (Veronese 1891: 128)

[313] V. i poglavlje „Tijelo ili polje“ u Kurepa 1969: 1140ff.

[314] Kojim se, pojednostavljeno rečeno, tvrdi da su pojmovi „točka“ i „pravac“ dualni, odnosno da je u svakom teoremu moguće zamijeniti jedan pojam drugim tako da dobijemo novi teorem. Usp. s raspravom o sustavnoj uzajamnoj prevodivosti aristotelovskih intervalskih i kantorovskih točkastih struktura iz Odjeljka [2.5].

Veroneseova karakterizacija polja $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ u *Fondamenti* izložena je pomoću osam hipoteza i niza njima pripadajućih dodatnih specifikacija (usp. Veronese 1891: 49–99, 106–176). Kao što se može vidjeti iz navedene paginacije, cjelokupno izlaganje obuhvaća čak 150 stranica teksta (!) te uključuje, među ostalim, uvođenje beskonačno malih (infinitezimalnih) i beskonačno velikih elemenata polja $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, kao i konstrukciju jedne nove vrste beskonačnih ili, Cantorovom terminologijom, transfinitnih brojeva – takozvanih *Veroneseovih brojeva* – koja se može protumačiti kao pokušaj izgradnje analitičkoga modela Veroneseovih HIP. I–VIII. Kao što ćemo vidjeti u trećem dijelu, upravo će se taj posljednji dio Veroneseova golemog pothvata u *Fondamenti* pokazati najkontroverznijim i, u određenom smislu, kobnim za kasniju recepciju Veroneseove nearhimedovske geometrije. I doista, ne prati li se cjelokupan tekst i tijek izlaganja iznimno pažljivo, pojedina Veroneseova izvođenja i formule mogu se učiniti ili posve nejasnima, ili posve irelevantnima ili, u najgorem slučaju, „kao očigledna besmislica"(*sec.* Laugwitz 2002: 103). U nastavku ćemo se usredotočiti na to kako je Veronese uveo infinitezimalne i beskonačne segmente, odnosno dužine, kao elemente linearnoga kontinuuma, ne ulazeći u sve pojedinosti njegove opće karakterizacije fundamentalne forme.[315]

Veroneseov pristup uvođenju infinitezimala, unatoč tomu što je nerijetko neproziran i (možda čak i previše) složen, ipak je izrazito moderan. Dobro ga sažima sljedeći izvod iz jednoga Bettazzijeva polemičkog priloga raspravi koju je vodio s Vivantijem (i, u određenom smislu, s Peanom) na stranicama *Rivista di Matematica* u vezi s pitanjem o ontološkom statusu infinitezimala – *Esiste l'infinitesimo attuale?* Neposredan povod toj filozofsko-matematičkoj raspravi bio je izlazak iz tiska Veroneseovih *Fondamenti*. Evo što je tim povodom rekao Bettazzi, i sâm pobornik nearhimedovskih metoda (o čemu najbolje svjedoči njegova već spomenuta studija *Teoria delle grandezze* iz 1890. godine):

> „Pitanje autora [sc. Vivantija] [o postojanju infinitezimala] ekvivalentno je sljedećem: 'Je li pojam infinitezimala (*il concetto di infinitesimo*) samoproturječan ili proturječi drugim općim matematičkim pojmovima?' Na to je pitanje već odgovoreno niječno pružanjem primjera klasâ entiteta […] koje ne zadovoljavaju takozvani Arhimedov postulat. […] [Z]a uvođenje infinitezimala dovoljno je, dakle, da oni ne proturječe već prihvaćenim aksiomima i njihovim posljedicama. […] Ako odsutnost Arhimedova aksioma ne proturječi drugim svojstvima uobičajenih veličina (*grandezze*), možemo konstruirati klasu entiteta za koje taj aksiom ne vrijedi: za svako α i β (gdje je $\alpha < \beta$) [iz te klase], ma koji cijeli broj n uzeli, uvijek će vrijediti $n\alpha < \beta$, zbog čega ćemo α smatrati infinitezimalom u toj klasi, dok je β konačna veličina. Stoga možemo zaključiti: '*aktualne infinitezimale postoje* (*l'infinitesimo attuale esiste*)'. […] *Postojanje infinitezimala aksiomatsko je pitanje*." (Bettazzi 1891: 175–76, 181, moj kurziv; usp. Popović 2017: 104)

U *Fondamenti* Veronese u Cap. VI uvoda („Segmenti finiti, infiniti, infinitesimi, indefinitamente piccoli e indefinitamente grandi. Numeri infiniti") uvodi infinitezimale

[315] Čitatelja upućujem na Cantù 1999, drugo poglavlje, §2.1.1 i §2.1.2, za pažljivu analizu Veroneseovih hipoteza koje se odnose na fundamentalnu formu. V. također Bussotti 1997, odjeljci 7–9.

pomoću dviju hipoteza (HIP. III i IV) o postojanju i konstrukciji beskonačnih, odnosno infinitezimalnih dužina:

HIPOTEZA III (**H3**)

U jednom od dvaju smjerova fundamentalne forme [sc. nearhimedovskoga jednodimenzionalnog linearnog kontinuuma[316]] postoji barem jedan [njezin] element koji se nalazi izvan polja skale (*campo della scala*) koje generira jedinična dužina (*unità*), u odnosu na koju je svaka druga dužina [te skale] uvijek ograničena, odnosno konačna (usp. Veronese 1891: 84).

HIPOTEZA IV (**H4**)

U polju u beskonačnosti (*campo all'infinito*) s obzirom na bilo koju jediničnu duž (AA_1), ako odaberemo neki proizvoljni element A_∞, tada će za dužinu (AA_∞) vrijediti: (1) postoji element X u (AA_∞), takav da su dužine (AX) i (XA_∞) beskonačne u odnosu na [jediničnu dužinu] (AA_1) (*infinitti rispetto ad* (AA_1)); (2) postoji element A_∞, takav da je bez obzira na X dužina (AX) konačna u odnosu na (AA_∞) (*finito rispetto ad* (AA_∞)) (usp. Veronese 1891: 92).

Kako bismo razumjeli sadržaj (H3) i (H4), potrebno je razjasniti nekoliko pojmova koji figuriraju u tim formulacijama. Pojednostavljeno rečeno, Veroneseova je osnovna zamisao u šestom poglavlju uvoda u *Fondamenti* zapravo pripremiti teren za *analitičku geometriju*, odnosno za koordiniranje brojeva elementima njegove fundamentalne forme. Međutim, on to ne želi učiniti na uobičajen način, odnosno pomoću Cantor–Dedekindova aksioma kojim se tvrdi da su geometrijski linearni kontinuum i aritmetički kontinuum, odnosno skup ili uređeno polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva, izomorfni, jer, kao što je dobro poznato, $\mathbb{R}$ predstavlja arhimedovsku strukturu, što Veronese uporno naglašava: „definicije uobičajenoga kontinuuma koje su drugi predložili [sc. Stolz, du Bois-Reymond, Dedekind i Cantor] sve implicitno sadrže [Arhimedov] aksiom" koji „*a priori* isključuje mogućnost [sc. postojanje] infinitezimalnih veličina" (Veronese 1891: 105, nap. 1[317]). Drugim riječima, ako ne želimo unaprijed eliminirati infinitezimale, potrebna nam je *alternativna analitička geometrija*. Zbog toga će Veronese svoje nove brojeve pridružiti dužinama tek nakon što je neovisno razradio takozvanu *aritmetiku dužina* (eng. *segment arithmetic*)[318], odnosno izravno definirao temeljne operacije (zbrajanje i množenje) nad sustavom ili, suvremenim rječnikom, nad poljem dužina. Kao što je primijetila Cantù, jedino na taj način Veronese može ustrajati na

[316] Radi lakšega praćenja i razumijevanja, Veroneseova fundamentalna forma može se promatrati analogno takozvanom hiperrealnom pravcu nestandardne analize. V. Odjeljak [4.1].

[317] V. također Veronese 1891: 197–198, nap. 1, za dodatne napomene o odnosu između Dedekindova i Arhimedova aksioma.

[318] Aritmetika dužina zapravo povezuje apstraktnu, aksiomatski izloženu geometriju s geometrijama koje se mogu definirati nad različitim algebarskim poljima. Usp. Hartshorne 2000: 165ff., poglavlje 4 („Segment Arithmetic").

neovisnosti geometrijskoga kontinuuma o numeričkom kontinuumu te na prioritetu čisto geometrijske i sintetičke metode u odnosu na analitičku (Cantù 1999, §2.2.1).[319]

Skala (*la scala*) za Veronesea predstavlja niz (*la serie*) konsekutivnih, odnosno uzastopnih usmjerenih ili orijentiranih dužina na fundamentalnoj formi, čiji je *generator* ili, kako ga Veronese naziva, *početak* (*origine*) neki zadani element fundamentalne forme, odnosno točka A, dok se dužina (AB) naziva *mjernom jedinicom* (*unità di misura*), odnosno *jediničnom dužinom* ili naprosto *jedinicom* (*unità*) (v. 80. DEF. I u Veronese 1891: 77). S druge strane, *polje skale* (*il campo della scala*) predstavlja dio fundamentalne forme generiran nekom zadanom jediničnom dužinom (AB), koji predstavlja „neograničenu dužinu (*segmento illimitato*) određenu svim uzastopnim dužinama skale u određenom smjeru", odnosno, kako to precizira Veronese, uređeni skup (*il tutto ordinato*) dužina koji proizlazi iz neke zadane skale (v. 80. DEF. III i Oss. II u Veronese 1891: 78). Lako je uočiti da su dva polja M i N jednaka ako imaju jednake jedinične dužine, a ako uz to imaju i isti početak, Veronese ih naziva *jednakima u apsolutnom smislu*, dok su u suprotnom *jednaka u relativnom smislu* (onda kada nemaju isti početak) (*op. cit.*, str. 79–80).

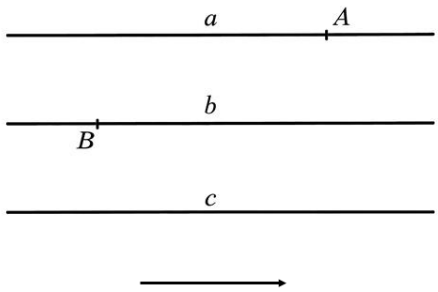
Čak i ako polja M i N nemaju jednake jedinične dužine, primjerice (AB) i $(A'B')$, Veronese napominje da se ipak može dokazati kako je $M = N$ sve dok je zadovoljen sljedeći uvjet: ako je $(AB) < (A'B')$, tada postoji neki prirodni broj n takav da je $n(AB) \geq (A'B')$ (Veronese 1891: 79, usp. n. 81b). Taj je uvjet ekvivalentan Arhimedovu aksiomu u obliku u kojem se pojavljuje u Euklidovim *Elementima* (Lib. V, DEF. IV): kaže se da su dvije veličine u razmjeru jedna prema drugoj ako neki umnožak bilo koje od njih može biti veći od druge (λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν).[320] Dakle, vidimo da ovdje Arhimedov aksiom figurira kao svojevrstan kriterij jednakosti među poljima: dva se polja smatraju jednakima AKKO ako su njihove odgovarajuće jedinične dužine usporedive u arhimedovskom smislu, a obratno, dva su polja nejednaka AKKO njihove jedinice nisu usporedive u arhimedovskom smislu (usp. Cantù 1999: 97). Prije formuliranja (H3) čini se da Veronese prihvaća kako je fundamentalna forma, gledano globalno, arhimedovska struktura, što znači da će sve dužine svakoga polja skale biti međusobno usporedive, tako da je „priznavanje opće valjanosti Arhimedova aksioma [sc. u ovoj fazi karakterizacije fundamentalne forme] ekvivalentno isključivanju mogućnosti postojanja drugih dužina izvan polja [zadane] skale (*al di fuori del campo della scala*), odnosno dužina koje ne bi bile usporedive s generatorima polja [sc. odgovarajućim jediničnim dužinama], utoliko što bi bile ili neusporedivo veće ili manje u odnosu na njih (*incomparabilmente grandi o piccoli rispetto ad essi*)" (Cantù 1999: 97–98). Ta okolnost omogućuje Veroneseu da na jednome mjestu kaže kako elementi tako shvaćene fundamentalne forme mogu biti jednoznačno predstavljeni realnim brojevima (usp. Def. IVb, b' i c u Veronese

[319] Za Veroneseovu specifikaciju aritmetike nad dužinama v. *Fondamenti*, Cap. V, §5 („Segmenti multipli e summultipli di un segmento dato della forma fondamentale, e loro simboli – Scala, unità, origine e campo di essa – etc."), str. 74ff.

[320] DEF. 4 naziva se i Eudoksovim aksiomom (usp. Hjelmslev 1950). Za raspravu o vezi između Euklidove definicije, odnosno Eudoksova i Arhimedova aksioma, v. Odjeljak [2.6.3].

1891: 78; usp. i Cap. VIII, §4, „Numeri reali, razionali e irrazionali, assoluti e relativi", str. 196ff.).

Hipotezom (H3) stipulira se da, bez obzira na odabranu jediničnu dužinu i njome generirano polje skale, uvijek postoji neki niz, odnosno neko obuhvatnije polje koje ga sadrži, jer uvijek postoji barem jedan element fundamentalne forme koji ne pripada prvotnom polju. Kako to treba razumjeti? Gino Fano, slijedeći jednu Veroneseovu napomenu[321], pokušao je u svom prilogu za *Enciclopedia delle matematiche elementari* pružiti reprezentaciju Veroneseova nearhimedovskog kontinuuma (v. *Sl. 16*). „Zamislimo", kaže Fano, „niz pravaca $a, b, c, \ldots$ za koje, kako bismo lakše fiksirali ideje, možemo pretpostaviti da su paralelni i da se nalaze na jednakoj udaljenosti jedan od drugoga. Pretpostavimo također da su ti pravci usmjereni, odnosno orijentirani, primjerice slijeva nadesno, na što upućuje strelica. Kada je riječ o točkama tih pravaca, zamislimo da su, uzete zajedno, uređene na jedinstven način [relacijom $<$ ili $\leq$] i da točke svakoga od pravaca prethode ili slijede za točkama svakoga drugog pravca koji, u unaprijed određenom poretku pravaca (primjerice, odozgo prema dolje), slijedi, odnosno prethodi prvome."



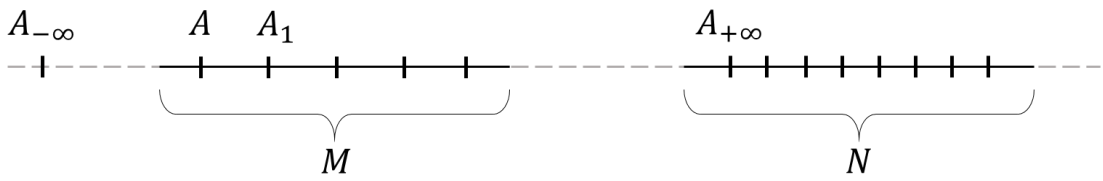
Sl. 16. Fanov prikaz Veroneseova nearhimedovskoga kontinuuma (Fano 1938: 501)

Fano dodaje i sljedeće:

> „U slučaju ovakvoga skupa točaka moguće je govoriti i o podudarnim dužinama, definirajući ih kao dužine čiji se krajevi (čak i ako pripadaju različitim pravcima $a, b, \ldots$) mogu preklapati translacijom ravnine. Međutim, *taj je skup nearhimedovski zato što će svaki umnožak bilo koje dužine čiji se krajevi nalaze na istom pravcu uvijek biti manji od bilo koje dužine čiji se krajevi nalaze na različitim pravcima.*" (Fano 1938: 501, moj kurziv; usp. i Vitali 1912: 204)

Dakle, Fanova je poanta da je dužina (AB) neusporediva (u euklidsko-arhimedovskom smislu) s, primjerice, dužinom $(AA') \in a$ ili dužinom $(BB') \in b$. Ilustrativniju i za naše potrebe prikladniju reprezentaciju Veroneseova apsolutnog kontinuuma predložio sam u Popović 2017. Duž Veroneseove fundamentalne forme, odnosno nearhimedovskog pravca $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, nižu se u oba smjera jednodimenzionalna linearno uređena polja skalirana s obzirom na jedinični element, kao na *Sl. 17*.

[321] „Si possono considerare [la serie] (NN') anche come due rette parallele nel senso Euclideo, in modo che dopo aver percorsa una retta in un dato verso si percorra N' nello stesso verso, e la distanza di due punti delle due rette si misuri nel verso dato percorrendo le due rette stesse." (Veronese 1891: 85, nap. 1)



Sl. 17. Veroneseov apsolutni kontinuum $\boldsymbol{\mathcal{V}}$

(prema Popović 2017: 107)

Jedinične dužine tipa (AA_1) nadovezivanjem generiraju skalu varijabilnoga polja M koje je, premda neprestano raste (*sempre crescente*) i utoliko je *neodređeno veliko* (*indefinitamente grande*), ipak uvijek samo *konačno polje* (*campo finito*) (Veronese 1891: 86, 89). Da je to doista slučaj, jasno proizlazi iz prethodnih definicija. Međutim, budući da je $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ sustav veličina otvoren prema beskonačnosti s obje strane, odnosno u oba smjera, prema (H3) uvijek postoji barem jedan element $A_{\pm\infty} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ izvan polja zadane skale M, takav da je svaka *konačna* dužina tipa $(AA_1) \in M$ *infinitezimalna* u odnosu na dužinu $(AA_{+\infty})$, koja je pak, u skladu s (H4)[322], *beskonačna* u odnosu na (AA_1), budući da ne postoji broj n takav da vrijedi $n(AA_1) \geq (AA_{+\infty})$.[323] Iz toga slijedi da je, Veroneseovim riječima, „zadana dužina konačna, beskonačna ili infinitezimalna *u odnosu na neku drugu* [*dužinu*], i svaki od ta tri slučaja isključuje preostala dva (*un segmento è finito, o infinito, o infinitesimo rispetto ad un altro e ognuno di questi tre casi esclude gli altri due*)“ (Veronese 1891: 87, moj kurziv). To naprosto znači da Veronese *relativizira* pojmove konačnosti, beskonačnosti i infinitezimalnosti: ne može biti govora o, primjerice, beskonačnosti ili infinitezimalnosti *tout court*, nego uvijek samo relativno, s obzirom na usporedbu s ovom ili onom dužinom sustava $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Dakle, premda su elementi polja M infinitezimalni u odnosu na elemente polja N i, obratno, elementi polja N beskonačni u odnosu na elemente polja M, elementi obaju polja, ako se promatraju s obzirom na odgovarajuću intrinzičnu skalu svakoga od tih polja, uvijek su konačni.

---

[322] V. Cantù 1999: 100–1 za veoma dobar propratni komentar Veroneseove hipoteze (H4). Prvim dijelom (H4) tvrdi se da niz elemenata polja u beskonačnosti nema prvi član (zato što za svaki element izvan polja M koje je generirano jediničnom dužinom (AA_1) uvijek postoji neki drugi element, također izvan toga polja, koji mu prethodi). Drugim dijelom (H4) tvrdi se da postoji element $A_{\pm\infty}$ sustava $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, izvan polja M koje je generirano jediničnom dužinom (AA_1), takav da je svaka beskonačna dužina koja prethodi dužini $(AA_{+\infty})$ konačna u odnosu na $(AA_{+\infty})$ što znači da pripada polju N generiranom dužinom $(AA_{+\infty})$. Drugim riječima, kako ističe Cantù, „ne postoje dužine beskonačne u odnosu na jediničnu dužinu koje nisu ili sadržane u polju generiranom tom jedinicom ili pak u polju generiranom dužinom $(AA_{+\infty})$ […] odnosno, intuitivnije rečeno, tip beskonačnosti svojstven dužini $(AA_{+\infty})$ najmanji je mogući u odnosu na jediničnu dužinu (AA_1).“ (*op. cit*, str. 101) Primijetimo da prvi dio (H4) nalikuje uvjetu gustoće za fundamentalnu formu, dok drugi dio (H4)

> „uspostavlja uvjete za prepoznavanje beskonačnosti koje su međusobno konačne (*gli infiniti che sono tra loro finiti*): višestrukom primjenom hipoteze konstruira se hijerarhija sve većih beskonačnosti (*si costruisce gerarchia di infiniti sempre più grandi*). Ne postoji prva beskonačna dužina manja od bilo koje druge beskonačne dužine i veća od svih konačnih dužina u odnosu na jedinicu [sc. jediničnu dužinu tipa (AA_1)] i, općenito, *ne postoji element koji razdvaja dvije klase beskonačnih dužina različitoga reda* [*beskonačnosti*].“ (*op. cit*., str. 101–102, moj kurziv)

[323] Dužine tipa (AA_1) Veronese u *Fondamenti* naziva „aktualnim infinitezimalima“ (*infinitesimi attuali*), a dužine poput $(AA_{+\infty})$ „aktualnim beskonačnostima“ (*infiniti attuali*).

Nadalje, promotrimo li skup C_{FIN} svih dužina u $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ koje su međusobno konačne, može se pokazati da, ako je neka dužina beskonačna (infinitezimalna) u odnosu na neku proizvoljnu dužinu $(CC') \in C_{\mathrm{FIN}}$, tada je ona također beskonačna (infinitezimalna) u odnosu na sve dužine koje su konačne u odnosu na dužinu (CC') (Veronese 1891: 87).[324] Relacija konačnosti kod Veronesea jest *relacija ekvivalencije*: refleksivna je (svaka je dužina konačna u usporedbi sa samom sobom), simetrična (*se un segmento è finito rispetto ad un altro, questo è finito rispetto al primo*) i tranzitivna (*due segmenti finiti con un terzo sono finiti tra loro*). Osim toga, zatvorena je s obzirom na operaciju zbrajanja jer zbrajanje dviju konačnih dužina istoga usmjerenja rezultira konačnom dužinom (usp. Veronese 1891: 88).[325] To znači da je dužine u $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ moguće razvrstati u *klase ekvivalencije* tako da, primjerice, sve dužine koje su međusobno konačne, odnosno usporedive u euklidsko-arhimedovskom smislu, tvore jednu klasu. I ne samo to, Veronese je sve dužine u $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ razvrstao i s obzirom na *redove beskonačnosti*, odnosno *infinitezimalnosti*. Naime, sve dužine oblika (AA_{∞}) nazivaju se *beskonačnim dužinama prvoga reda* u odnosu na jediničnu dužinu (AA_1), ili se, alternativno, dužina (AA_1) naziva *infinitezimalnom dužinom prvoga reda* u odnosu na beskonačnu dužinu (AA_{∞}). Općenito, neka beskonačna dužina prvoga reda u odnosu na beskonačnu dužinu (n–1)-tog reda naziva se beskonačnom dužinom n-tog reda u odnosu na jediničnu dužinu (AA_1), pri čemu sve analogno tome vrijedi i za n-ti red infinitezimalnosti (Veronese 1891: 97; usp. Popović 2017: 107).

Ako sada ponovno pogledamo Veroneseove uvjete neprekidnosti, možemo reći da se (H6) odnosi na klase dužina koje postaju proizvoljno ili, kako kaže Veronese, neodređeno male, a ipak ostaju konačne u odnosu na neku zadanu jediničnu dužinu. Nasuprot tomu, (H8) odnosi se na klase dužina koje postaju neodređeno male „u odnosu na ograničenja koja nameće sam geometrijski prostor“ (Ehrlich 2021: 508). Isprva zbunjujuću hipotezu relativne neprekidnosti (H6) sada možemo objasniti na sljedeći način. Prethodne definicije omogućuju nam da uočimo kako svako od konačnih polja dužina na nearhimedovskom pravcu $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ (primjerice, polje tipa $\boldsymbol{M}$ sa *Sl. 17*) predstavlja takozvanu *arhimedovsku klasu* ili, drugim riječima, klasu du Bois-Reymondovih linearnih veličina, odnosno Bettazzijevu klasu veličina prve vrste (usp. Odjeljak [2.6])[326], premda, polazeći od bilo kojega elementa takvoga polja, nije moguće dosegnuti ono na beskonačnoj udaljenosti (*all'infinito*) (usp. Fisher 1994: 108). Aksiom (H6) nam, dakle, jamči da će, ograničimo li se na dužine koje su konačne u odnosu

[324] „Un segmento infinito (o infinitesimo) rispetto ad un segmento dato è infinito (o infinitesimo) rispetto a qualunque altro segmento finito col dato.“ (DEF. III d'. u Veronese 1891: 87)

[325] Kada je riječ o zbrajanju, Veronese *ad loc.* dodaje da isto vrijedi i za zbrajanje beskonačnih (infinitezimalnih) dužina: zbroj dviju beskonačnih (infinitezimalnih) dužina i sâm je beskonačna (infinitezimalna) dužina.

[326] Riječnikom suvremene teorije grupa, ako je G linearno uređena, aditivno zapisana Abelova grupa, za dva pozitivna elementa $a, b \in G$ reći ćemo da su arhimedovski ekvivalentni ako postoje pozitivni cijeli brojevi m i n takvi da $ma > b$ i $nb > a$, dok se b smatra beskonačno manjim od a ako $nb < a$ za svaki pozitivni cijeli broj n. Arhimedovska ekvivalencija proizvodi particiju elemenata G na disjunktne klase koje se nazivaju arhimedovskim klasama. Klase ekvivalencije tvore linearno uređen skup Π. Za svako pozitivno a, klasa $[a] = \pi$ definira dvije konveksne podgrupe L_π i U_π, koje se sastoje od svih elemenata G čije su apsolutne vrijednosti beskonačno manje od a, odnosno čije apsolutne vrijednosti nisu beskonačno veće od a. Kvocijentna grupa $U_\pi/L_\pi = G_\pi$ linearno je uređena grupa koja je arhimedovska te samim time predstavlja izomorfnu kopiju (podgrupe) realnih brojeva $\mathbb{R}$.

na neku proizvoljno odabranu dužinu s i sakupimo li u klase ekvivalencije sve one dužine čije su međusobne razlike infinitezimalne u odnosu na s, tako dobiven sustav klasâ ekvivalencije biti izomorfan standardnom arhimedovskom kontinuumu. Štoviše, budući da, kao što sam već istaknuo, sustav veličina koji je Veronese konstruirao u *Fondamenti* odgovara uređenom polju, tada

> „ako uzmemo klasu ekvivalencije koja sadrži s kao jedinicu i definiramo zbrajanje i množenje klasâ ekvivalencije [dužina] na poznati geometrijski način, tada će dobiveni sustav biti izomorfan pozitivnom konusu $\mathbb{R}^+$ uređenoga polja realnih brojeva $\mathbb{R}$. **To znači da je *Veroneseov* [*geometrijski*] *nearhimedovski kontinuum nerazlučiv* [s obzirom na svojstva prvoga reda** – prim. S. P.] ***od klasičnoga* [*aritmetičkog*] *kontinuuma kada se zanemare beskonačne i infinitezimalne razlike***.“ (Ehrlich 2021: 509, Ehrlichov izvorni kurziv, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Dakle, ako pozornost usmjerimo samo na neku od podstruktura $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, zanemarujući infinitezimalne razlike, zadovoljenje uvjeta relativne neprekidnosti svodi se na tvrdnju o *arhimedovskoj potpunosti* i *Dedekind-potpunosti* tih struktura (što je, podsjetimo se, bila i Stolzova teza u „Zur Geometrie der Alten usw.“ iz 1883.), što ne znači ništa drugo nego da uređeno polje $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ sadrži izomorfne kopije uređenoga polja $\mathbb{R}$ realnih brojeva (usp. Ehrlich 1997: 223–224), odnosno da Cantor–Dedekindov kontinuum predstavlja samo dio Veroneseova apsolutnog nearhimedovskog kontinuuma! Upravo ga iz toga razloga Veronese smatra samo *relativnim kontinuumom* (usp. Veronese 1891: 128). Kao što ćemo vidjeti u sljedećem odjeljku, i neka druga nearhimedovska polja mogu se promatrati kao relativni kontinuumi, utoliko što su također utopljeni u Veroneseov apsolutni kontinuum. Time je završeno izlaganje o Veroneseovim aksiomima neprekidnosti i analiza odnosa između Dedekindova i Veroneseova aksioma neprekidnosti te Arhimedova aksioma.[327] Međutim, sâm Veronese nije se na tome zaustavio, nego je pokušao konstruirati i analitički model svojega apsolutnog kontinuuma uvodeći jednu novu vrstu beskonačnih brojeva, shvaćenih na nekantorovski način.

Već sam napomenuo da je Stolz nekoliko godina prije Veronesea pokušao dati koliko-toliko konkretan primjer neke nearhimedovske strukture, te da se pritom oslanjao na du Bois-Reymondove rezultate iz područja teorije funkcija (v. Stolz 1885, IX. Abschnitt, §§22–25, str. 205–215). Slični se pokušaji mogu pronaći i kod Bettazzija i Höldera[328], a Hahnov vrlo važan doprinos ranoj dvadesetostoljetnoj teoriji nearhimedovskih uređenih (algebarskih) sustava, „Über die nichtarchimedischen Grössensysteme“ iz 1907.[329], sadrži prvi konkretniji popis primjera takvih struktura. Međutim, kao što je istaknuo i sâm Hahn,

---

[327] V. i Fisher 1994, §3 („Veronese's Intuitive Cotinuum“).

[328] Za Hölderov nearhimedovski model Veroneseovih principa, odnosno aksioma (P1)–(P4) v. prijevod „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass“ u Michell & Ernst 1996: 248–249, nap. 8. Za popratni komentar v. Ehrlich 2006: 71–72.

[329] U Hahnovim *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. I, Laszlo Fuchs okarakterizirao je taj Hahnov rad kao „monumentalan“ i „najutjecajniji članak u teoriji uređenih grupa i prstenova“ (v. „Commentary on Hans Hahn's paper 'Über die nichtarchimedischen Grössensysteme'“ u Hahn 1995: 439ff.). V. i Fisher 1994, §2, str. 108–112, te Ehrlich 1995.

Veronese je „u svojim matematički i filozofski značajnim *Fondamenti*“ (*mathematisch und philosophisch bedeutungsvollen Fondamenti*) bio pionir na tom području, „a daljnja osobito važna istraživanja nearhimedovskih sustava veličina potječu od Levi-Civite, koji je sebi postavio cilj aritmetičkog prikaza Veroneseova kontinuuma (*eine arithmetische Darstellung des Veronese'schen Kontinuums*) i time došao do rezultata velike općenitosti.“ (Hahn 1907: 601) Levi-Civitin model, odnosno konstrukciju takozvanih *numeri monosemii del continuo numerico di seconda specie*, izložit ću u sljedećem odjeljku, zajedno s Hilbertovim modelom nearhimedovske geometrije iz *Grundlagen* te Bindonijevim rezultatom iz 1902., koji se tiče međusobnog odnosa Veroneseova, Levi-Civitina i Hilbertova nearhimedovskog polja. Pogledajmo sada kako izgledaju takozvani *Veroneseovi brojevi*.

Veroneseova primarna motivacija za uvođenje beskonačnih i beskonačno malih brojeva proizlazila je iz pokušaja da pruži objašnjenje algebarskih operacija nad elementima polja $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Relevantno mjesto u *Fondamenti* jest razmjerno kratak §2 šestoga poglavlja uvoda, naslovljen „Numeri infiniti e infinitesimi di diversi ordini, loro proprietà e simboli“ (Veronese 1891: 99–102). Taj je odjeljak *Fondamenti* zloglasan po tome što je Veroneseovo izlaganje prilično nejasno; čak i ako bismo prema Veroneseu željeli biti krajnje dobronamjerni, navedeni §2 u najboljem je slučaju neproziran. Međutim, unatoč Veroneseovoj napomeni da taj dio *Fondamenti* nije relevantan za zasnivanje geometrije (*di questo Cap. non facciamo alcun uso nei fondamenti della geometria*[330]), osmo poglavlje uvoda, „Numeri reali, relativi e assoluti, positivi e negativi“, osobito §4 („Numeri reali, razionali e irrazionali, assoluti e relativi“), pruža nam nešto jasniji uvid u to kako je Veronese koncipirao svoje beskonačne brojeve. Naime, ondje Veronese ponovno naglašava prethodno istaknutu činjenicu da standardni aritmetički kontinuum, odnosno uređeno polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva, predstavlja samo relativni kontinuum te da je, u kontekstu razmatranja apsolutnoga nearhimedovskoga kontinuuma $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, jasno kako moraju postojati i beskonačni i infinitezimalni brojevi (različitih redova) koji na neki način dopunjuju ili, bolje rečeno, proširuju realne brojeve do jedne „nove klase realnih brojeva“ (usp. Veronese 1891: 197ff.). Iako možda na prvi pogled ne djeluje osobito značajno, ta je opaska zapravo iznimno važna utoliko što nam (makar posredno) otkriva kako je Veronese zamislio uvođenje novih beskonačnih brojeva, a povezana je s principom koji je tijekom 19. stoljeća bio najtješnje povezan sa „sustavnim pokušajem konceptualizacije ideje proširenja [pojmova]“ (usp. Buzaglo 2001: 3) i, osobito, *proširenja pojma broja*.

Riječ je o takozvanom *principu permanencije* koji se, promatrano iz povijesne perspektive, pojavljivao u različitim formulacijama i imao važnu ulogu u različitim područjima matematike.[331] Princip permanencije prvi se put eksplicitno pojavljuje u radovima iz algebre u prvoj polovici 19. stoljeća i tipično se povezuje s djelom *A Treatise on Algebra* Georgea Peacocka (1791–1858), koji ga je još nazivao i „znamenitim zakonom uniformnosti [algebarskih] operacija“ (usp. Peacock 1830, v. osobito §§132–133). Za naše potrebe neće

[330] Na str. 201 *Fondamenti* nalazimo i sljedeće riječi: „queste teorie [sc. teorije (beskonačnih) brojeva] non c'interessano per i fondamenti della geometria.“

[331] Meir Buzaglo dao je izvrstan povijesni pregled u Buzaglo 2001. V. također Toader 2021.

biti nužno ulaziti u povijest principâ permanencije. Ključna poanta u vezi s permanencijom, važna i za Veronesea, jest činjenica da je u drugoj polovici 19. stoljeća većina matematičara (makar implicitno) prihvaćala neki oblik permanencije u okviru rasprava o uvođenju novih vrsta brojeva. Do novih brojevnih sustava dolazilo se pomoću takozvane *genetičke metode* (usp. Detlefsen 2005), postupnim proširivanjem staroga univerzuma i dodavanjem novih operacija, pri čemu je glavni zahtjev bio da se novouvedeni brojevi *ponašaju na isti način* kao i stari, odnosno da se pokoravaju istim „formalnim zakonima", zbog čega se kod, primjerice, Hermanna Hankela (1839–1873) ili Hermanna Schuberta (1848–1911) govori o *principu permanencije formalnih zakona* (*Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze*, usp. Hankel 1867, I, §3), odnosno *odsutnosti iznimaka* (*Prinzip der Permanenz oder Ausnahmslosigkeit*, Schubert 1899, II, §8).[332] Upravo je ta težnja za očuvanjem *općenitosti algebre* (*généralité de l'algèbre*, usp. Cauchy 1821), odnosno za uniformnim i neograničenim izvođenjem svih algebarskih operacija, bez iznimaka, navela matematičare na proširivanje pojma broja uvođenjem novih vrsta brojeva.

Možda najbolji primjer takva pristupa predstavlja Dedekindovo habilitacijsko predavanje „Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik" iz 1854. godine, u kojem Dedekind formulira svojevrsni *generativni princip* kojim bismo se trebali voditi pri proširivanju „domene brojeva" (*Zahlgebiet*), polazeći od prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ i konstruirajući nove klase brojeva (negativne cijele, racionalne, itd.), sve do realnih brojeva $\mathbb{R}$ i kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$:

> „Aritmetika zahtijeva da […] takoreći iznova stvaramo čitavu domenu brojeva (*das gesamte vorhandene Zahlgebiet jedesmal von neuem zu erzeugen*) ili, drugim riječima, *zahtjev da* […] *operacije budu bezuvjetno izvedive* (*die Forderung der unbedingten Ausführbarkeit der Operationen*) *čini nužnim stvaranje novih klasa brojeva* (*führt auf die Notwendigkeit, neue Klassen von Zahlen zu schaffen*), budući da taj uvjet nije moguće ispuniti izvornim nizom pozitivnih cijelih brojeva. Tako dobivamo negativne, racionalne, iracionalne i, naposljetku, čak i takozvane imaginarne brojeve. A kada se domena brojeva na taj način proširi, postaje nužno iznova definirati i operacije, jer je njihova djelotvornost (*Wirksamkeit*) do tada bila određena samo za niz pozitivnih cijelih brojeva, a mi želimo da ih možemo primjenjivati i na novostvorene brojeve (*um sie auch auf die neugeschaffenen Zahlen anwenden zu können*). Ta proširenja i definicije neće biti proizvoljni sve dok slijedimo *gore navedeni opći princip, naime, da zakone kojima su se operacije pokoravale u svojem ograničenom području primjene proglasimo općevaljanima* (*diese Erweiterungen der Definitionen sind nicht willkürlich, sobald man das oben ausgesprochene allgemeine Prinzip befolgt, nämlich die Gesetze, welchen die Operationen in ihrer beschränkten Auffassung gehorchten, für allgemeingültig erklärt*)." (Dedekind 1854, navedeno prema Dedekind 1932: 431; za engleski prijevod v. Ewald 2005: 756–757, ¶6; moj kurziv)

Dakle, uvid da zadana klasa brojeva nije *zatvorena* s obzirom na neku operaciju motivira njezino proširenje. Primjerice, $\mathbb{N}$ nije zatvoren s obzirom na oduzimanje: razlika $2 - 5 = -3$ ne pripada skupu $\mathbb{N}$. Kako ne bi bilo nikakvih ograničenja u pogledu

[332] V. i Peanov rad „Principio de permanentia" iz *Rivista di Matematica*, Vol. VIII, 1903 (pretiskan u trećem tomu Peanovih *Opere*): „Quum nos introduce novo calculo, es multo utile quod nos sume nomenclatura et notatione ita ut novo calculo fie quam maxime simile (non identico) ad calculo antique. […] Tunc principio de permanentia idem es ac principio generale de oeconomia." (Peano 1959: 376)

mogućnosti izvođenja operacije oduzimanja, potrebno je proširiti domenu prirodnih brojeva uključivanjem negativnih brojeva, što znači da prelazimo sa skupa prirodnih na skup cijelih brojeva, gdje sada $\{-3\} \in \mathbb{Z}$, pa se operacija oduzimanja i dalje može neograničeno izvoditi. Slijedeći Dedekinda (i Hankela), Waismann je istaknuo da „očuvanje zakona računanja" (*die Aufrechterhaltung der Rechengesetze*) upravlja i regulira proces formiranja i proširivanja pojmova (Waismann 1936: 22).[333] Drugim riječima – a na tome je osobito inzistirao Peano – proširenja „brojevnih domena" trebaju biti *konzervativna* (*quam maxime simile, per quanto è possibile*, usp. Toader 2021: 85, nap. 12). Čini se da je taj zahtjev opravdan sve dok se bavimo konačnim brojevima. No može li uopće biti govora o permanenciji kada se prijeđe na beskonačne brojeve?

Zanimljivo je da je još Leibniz smatrao kako prijelaz s konačnih na beskonačne (i infinitezimalne) brojeve ne predstavlja (ili barem ne mora predstavljati) nikakvu supstancijalnu ni kvalitativnu razliku. Taj je uvid Leibniz kodificirao pomoću takozvanoga *zakona kontinuiteta* (*lex continuitatis*), čiju najpoznatiju formulaciju nalazimo u jednom Leibnizovu pismu Varignonu od 2.2.1702., u kojem se tvrdi da se pravila, zakoni i postupci koji vrijede za konačne veličine održavaju i u beskonačnome, i obratno: „il se trouve que les regles du fini reussissent dans l'infini […] et que vice versa les regles de l'infini reussissent dans le fini" (GM IV, 93–94).[334] Kao što ćemo vidjeti u Odjeljku [4.1], Abraham Robinson rigorozno će implementirati Leibnizov zakon kontinuiteta u nestandardnoj analizi kao takozvani *princip transfera*.[335] No povijesno je zanimljivo da su i prije Robinsona ili, bolje rečeno, prije određenih proboja u matematici devetnaestoga stoljeća, većina matematičara i filozofa konačne linearne i nekonačne nelinearne veličine (usp. Odjeljak [2.6]), osobito infinitezimale, u pravilu smatrali *ontološki i funkcionalno ravnopravnima*, barem kada je riječ o načinu na koji se njima manipulira u, primjerice, analizi ili algebri. Iako Veronese u *Fondamenti* ne govori eksplicitno o permanenciji, na više mjesta u knjizi govori o *istovrsnosti* konačnih i beskonačnih brojeva, što snažno upućuje na zaključak da je imao na umu upravo nešto nalik principu permanencije, odnosno da je smatrao kako beskonačni i infinitezimalni brojevi dijele relevantna formalna svojstva sa standardnim konačnim realnim brojevima (usp.

[333] „Unter all den unendlich vielen Konventionen, die ich treffen kann, ist eine dadurch ausgezeichnet, daß bei ihrer Wahl die Rechengesetze umgeändert bleiben. *Die Aufrechterhaltung der Rechengesetze reguliert also die Begriffsbildung*. Wir lernen hier ein erstes Beispiel für das kennen, was H. Hankel das 'Prinzip der Permanenz der Rechenregeln' genannt hat und das man so formulieren kann: Wenn man einen Begriff in der Mathematik über seine ursprüngliche Definition hinaus erweitern will, so ist unter all den möglichen Richtungen dieser Erweiterung diejenige zu wählen, bei welcher die Rechengesetze so weit wie möglich aufrecht erhalten bleiben. Dieses Permanenzprinzip ist nicht eine Behauptung, über deren Richtigkeit diskutiert werden könnte, sondern, wie gesagt, ein Leitprinzip der Begriffsbildung."

[334] V. i Leibnizov spis „Cum prodiisset…", objavljen u Gerhardtovu izdanju *Historia et origo calculi differentialis a G. G. Leibniz conscripta* (Hannover, 1846), str. 39ff.

[335] U Vopěnkinoj AST nalazimo srodni princip, *aksiom prolongacije*, koji, intuitivno rečeno, osigurava da će se neki matematički objekt koji se ponaša na dobro definiran način do takozvanoga *horizonta* (u domeni konačnih skupova) nastaviti tako ponašati i iza horizonta (u domeni velikih konačnih ili beskonačnih skupova). Usp. Vopěnka 2023, §6.2 i Sochor 1993.

Laugwitz 1992: 146).[336] U predavanju „La Geometria non-Archimedea" održanom na rimskom ICM-u 1908. godine, Veronese ipak eksplicitno govori o permanenciji:

> „U svojim sam *Fondamenti precizno konstruirao aktualno beskonačne i infinitezimalne dužine* […] s kojima se mogu izvoditi sve uobičajene operacije (*con questi segmenti si possono eseguire tutte le solite operazioni*) […] *i to na takav način da se sa simbolima, odnosno brojevima kojima su te dužine predstavljene, mogu izvoditi sve temeljne operacije za koje vrijede uobičajena pravila* (*cosicché coi simboli (numeri) che rappresentano questi segmenti si possono eseguire le operazioni fondamentali, per le quali valgono le regole ordinarie*)." (Veronese 1909: 199, Veroneseov izvorni kurziv)

Nasuprot Veroneseu, Cantor je u *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, u kojima je uveo *transfinitne ordinalne brojeve*, čuvene „omege", eksplicitno odbacio princip permanencije i ideju o istovrsnosti pravila koja vrijede za konačne i beskonačne domene. Na temelju uvodnoga paragrafa *Grundlagen* čitatelj bi mogao pomisliti da su Cantor i Veronese zapravo suglasni, utoliko što i Cantor govori o „proširenju pojma realnoga cijelog broja izvan dotadašnjih granica" (*einer Erweiterung des realen ganzen Zahlbegriffs über die bisherigen Grenzen*), koje se očituje u „proširenju ili produženju niza cijelih brojeva u beskonačnost" (*eine Erweiterung resp. Fortsetzung der realen ganzen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus*) (Cantor 1883, §1). Sasvim slično, Veronese govori o proširenju niza cijelih brojeva $1,2,\dots n,\dots$ brojem ∞, „uzimajući da simbol ∞, koji inače označuje mjesto elementa u polju u beskonačnosti, predstavlja jedan novi broj (*un nuovo numero*) u [proširenom] skupu $1,2,\dots,n,\dots,\infty,\dots$"; taj novi broj ∞, dodaje Veronese, „nazivamo beskonačnim" (*lo chiamiamo infinito*) (Veronese 1891: 99). Prije nego što objasnim na što Veronese ovdje točno cilja, pogledajmo najprije kako je Cantor koncipirao generiranje svojih transfinitnih ordinala.

Polazeći, sasvim nalik Veroneseu i Dedekindu, od skupa $\mathbb{N}$ (ili $\mathbb{Z}$), Cantor u *Grundlagen* specificira dva *generativna principa*: prvi generativni princip (*das erste Erzeugungsprinzip*) svodi se na primjenu *funkcije sljedbenika* i omogućuje nam da prijeđemo s bilo kojega broja a na njegova neposrednog sljedbenika $a + 1$ („princip dodavanja jedinice broju koji je već oblikovan i koji već postoji"), dok nam drugi generativni princip (*das zweite Erzeugungsprinzip*) omogućuje prijelaz s rastućega niza brojeva koji nema najveći element „na *jedan novi broj* (*eine neue Zahl*) koji ćemo nazvati ω i koji će izražavati činjenicu da je čitav skup [cijelih brojeva] zadan u svojem prirodnom slijedu u skladu sa zakonom (*in seiner natürlichen Sukzession dem Gesetze nach gegeben sei*)" (Cantor 1883, §11).[337] Preciznije, drugim Cantorovim principom stipulira se

---

[336] I ne samo to, Veronese dodaje da su svojstva i relacije između njegovih novih, beskonačnih i infinitezimalnih brojeva određeni svojstvima i relacijama između dužina koje ti brojevi predstavljaju. Dakle, sve što vrijedi za geometrijski shvaćeno nearhimedovsko uređeno polje $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ vrijedi i za njegov aritmetički model, odnosno aritmetičku reprezentaciju. Usp. Veronese 1891, Cap. VI, §2, 87. Oss. I, str. 99. Zanimljivo je da je i Bettazzi u *Teoria delle grandezze*, koja, kao što sam već rekao, također predstavlja jedan od pionirskih doprinosa teoriji nearhimedovskih uređenih struktura, eksplicitno prihvaćao princip permanencije, smatrajući ga „osnovom postupnih generalizacija analitičkog pojma broja" (*la base della succesiva generalizzazione del concetto analitico di numero*). V. Bettazzi 1890: 179–180 (odjeljak „*Principio di permanenza delle leggi formali*").

[337] Cantor *ad loc.* objašnjava da je simbol ω uveo umjesto simbola ∞ kojim se, kao što smo vidjeli, služi i Veronese, budući da se ∞ u pravilu upotrebljava za označavanje „neprave", odnosno potencijalne beskonačnosti (*Uneigentlich-Unendliche*).

postojanje beskonačnoga, odnosno transfinitnoga broja koji „dolazi nakon“ niza konačnih cijelih brojeva, pri čemu se „ω može zamisliti i kao svojevrsna granica (*als Grenze zu denken*) kojoj se cijeli brojevi približavaju, podrazumijevajući pod tim ništa drugo nego da je ω prvi [beskonačan] cijeli broj koji dolazi nakon cijelih brojeva (*welche auf alle Zahlen folgt*) i da je veći od svakoga broja $n \in \mathbb{Z}$.“ (*ibid.*)

Na taj način, prema Cantoru, dobivamo sljedeću situaciju: najprije imamo niz prirodnih brojeva $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$, nakon čega dolazi ω kao prvi transfinitni ordinal, potom niz $\omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + n, \dots$, zatim $\omega + \omega = 2\omega$ (to je Cantorova izvorna notacija; danas bismo, slijedeći uobičajenu praksu u teoriji skupova, zapisali $\omega \cdot 2$), na što se nadovezuje niz $2\omega + 1, 2\omega + 2, \dots, 2\omega + n, \dots$, nakon čega dolazimo i do $\omega^2, \omega^2 + 1, \dots \omega^\omega, \dots$ i tako dalje (v. *Sl. 18*). Cantorovim riječima, „kad god imamo neki niz određenih brojeva u kojem ne postoji najveći član, drugim generativnim principom stvara se novi broj (*eine neue Zahl geschaffen wird*) koji smatramo *limesom* toga niza.“ (*ibid.*)[338]

$$
\begin{aligned}
&1, 2, 3, \dots \\
&\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots \\
&\omega \cdot 2, (\omega \cdot 2) + 1, (\omega \cdot 2) + 2, \dots \\
&\omega \cdot 3, (\omega \cdot 3) + 1, (\omega \cdot 3) + 2, \dots \\
&\vdots \\
&\omega^2, \omega^2 + 1, \dots \\
&\omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega \cdot 2, \omega^2 + \omega \cdot 3, \dots \\
&\omega^2 \cdot 2, (\omega^2 \cdot 2) + 1, \dots \\
&(\omega^2 \cdot 2) + \omega, (\omega^2 \cdot 2) + (\omega \cdot 2), \dots \\
&\omega^3, \omega^3 + 1, \omega^3 + 2, \dots \\
&\omega^4, \omega^4 + 1, \omega^4 + 2, \dots \\
&\vdots \\
&\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots
\end{aligned}
$$

Sl. 18. Cantorovi transfinitni ordinali

Ključna stvar u vezi s Cantorovim transfinitnim ordinalima jest činjenica da ih Cantor nije uveo odbacivanjem Arhimedova aksioma. Drugim riječima, transfinitni ordinali ne predstavljaju nikakvo proširenje skupa $\mathbb{R}$ realnih brojeva niti „produženje“ realnoga pravca. Povrh toga, Cantor je inzistirao na tome da se svojstva i relacije transfinitnih ordinala ne

[338] Cantor je u *Grundlagen* također predložio klasifikaciju brojeva u tri klase: elemente Cantorove *prve klase* brojeva čine konačni ordinali, odnosno elementi skupa prirodnih, to jest pozitivnih cijelih brojeva; *drugu klasu brojeva* čine ω i svi brojevi koji slijede nakon ω i imaju prebrojivo mnogo prethodnika ili, drugim riječima, prebrojivo beskonačni ordinali, odnosno tipovi dobrog uređaja skupa svih konačnih ordinala; naposljetku, *treću klasu brojeva* čine svi transfinitni ordinali čiji skup prethodnika ima kardinalnost kontinuuma, odnosno $\aleph_1$ ili, drugim riječima, neprebrojivi ordinali, odnosno tipovi dobrog uređaja svih ordinala iz druge klase brojeva. Općenito uzev, svaki transfinitni ordinal možemo promatrati kao ordinalni tip skupa svojih prethodnika. Tako je, primjerice, ω ordinalni tip skupa $\{0,1,2,3, \dots\}$, a $\omega + 2$ ordinalni tip skupa $\{0,1,2,3, \dots, \omega, \omega + 1\}$.

mogu svesti na svojstva i relacije uobičajenih konačnih brojeva i, štoviše, da se „zakoni stvarno beskonačnih brojeva fundamentalno razlikuju od odnosa koji vrijede u [domeni] konačnoga (*die Gesetze unter den eigentlich-unendlichen ganzen Zahlen sind dagegen von Grund aus verschieden von den im Endlichen herrschenden Abhängigkeiten*)“ (usp. Cantor 1883, §1). To znači da, prema Cantorovu mišljenju, Leibnizov zakon kontinuiteta ne vrijedi, te da transfinitni ordinali zahtijevaju zasebnu, *transfinitnu aritmetiku*. U toj novoj aritmetici beskonačnoga, primjerice, zakon komutativnosti ne vrijedi za zbrajanje: $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$ ako su α i β transfinitni ordinali. Ni množenje transfinitnih brojeva nije komutativno, $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$ (usp. Cantor 1883, §3). Asocijativnost, pak, vrijedi i za $+$ i za $\cdot$, ali je distributivnost ograničena, a rezultati mnogih elementarnih računskih operacija nisu dobro definirani: primjerice, $\omega - 1$ za Cantora nema nikakva smisla i ne predstavlja nikakav konkretan broj, budući da je ω, kao što smo prethodno vidjeli, prvi beskonačni ordinal. Kao što ćemo vidjeti u Odjeljku [4.2], izrazi poput $\omega - 1$ dobivaju precizan smisao tek u Conway-Ehrlichovoj teoriji nadrealnih brojeva.

Nasuprot tomu, budući da je Veroneseovo polazište nearhimedovski geometrijski kontinuum koji sadrži i beskonačne i infinitezimalne elemente (dužine), koje nekako treba numerički predstaviti, Veronese pri uvođenju novih beskonačnih brojeva mora odbaciti Arhimedov aksiom, ali ipak definirati algebarske operacije s novim brojevima *analogno* načinu na koji se one standardno definiraju za konačne brojeve (usp. Cantù 1999: 104). I ne samo to, sva svojstva koja vrijede za dužine (uključujući i ona koja proizlaze iz aritmetike dužina) vrijedit će, *mutatis mutandis*, i za Veroneseove brojeve. To znači da se, kako je primijetila Cantù, Veroneseove hipoteze (H3) i (H4) o dužinama mogu preformulirati tako da sada karakteriziraju brojeve (*due ipotesi possono essere tradotte in linguaggio numerico*) (*op. cit.*, str. 110). Jasno je da (H3) jamči da neki beskonačni broj poput ∞ uvijek postoji. Prvi dio (H4) zahtijeva da, ako je zadan bilo koji beskonačni broj poput ∞, uvijek postoji neki drugi beskonačni broj $\infty - 1$ koji mu prethodi, odnosno koji je manji od njega (v. *Sl. 19*), iz čega slijedi da *ne postoji prvi*, odnosno *najmanji beskonačni broj*. Dakle, Veroneseov broj ∞ u tom se pogledu bitno razlikuje od Cantorova ω. Prema drugom dijelu (H4), postoji odgovarajući beskonačni broj takav da je svaki beskonačni broj koji mu prethodi istoga reda beskonačnosti kao i on. Cantù to formulira ovako: „izvan niza prirodnih brojeva uvijek postoji neki beskonačni broj koji nije prvi u apsolutnom smislu, ali je takav da je svaki drugi beskonačni broj koji je manji od njega istoga reda [beskonačnosti].“ (*ibid.*)



Sl. 19. Veroneseov nearhimedovski brojevni pravac

Kao što Cantor ponovljenom primjenom svojih generativnih principa dobiva transfinitne brojeve višega reda, tako i Veronese primjenom (H4) na brojeve koji više nisu konačni (poput onoga koji bi, primjerice, odgovarao jediničnoj dužini (AA_1)), nego su i sâmi

beskonačni prvoga reda (*infiniti di primo ordine*), može dobiti nove klase brojeva koje će sada biti beskonačne prvoga reda u odnosu na beskonačne brojeve prvoga reda i tako redom za svaki n-ti red beskonačnosti (i, obratno, infinitezimalnosti, jer će, kao što je jasno iz prethodne rasprave, $\frac{1}{\infty}$ za Veronesea biti infinitezimala, odnosno beskonačno malen broj, manji od bilo kojega konačnog broja). Primijenimo li (H4) konačan broj puta m, dobivamo klase beskonačnih brojeva m-toga reda, dok nam Veroneseova hipoteza (H5) (Veronese 1891: 106)[339] omogućuje da se taj postupak generiranja beskonačnih dužina (brojeva) može primijeniti ne samo *konačno* nego i *beskonačno* mnogo puta, određujući tako „postupak kojim se konstruktivno mogu dobiti sve veći beskonačni brojevi", budući da dužinama dobivenima uzastopnom višestrukom primjenom (H5) uvijek odgovaraju brojevi (usp. Cantù 1999: 110–111). Jasno je da (H5) omogućuje Veroneseu uspostavu sustava različitih konačnih i beskonačnih brojeva različitih redova beskonačnosti, odnosno infinitezimalnosti.

Kada govorimo o konačnim elementima $\boldsymbol{\nu}$, prvoj klasi dužina pripadaju sve i samo one koje su konačne u odnosu na jediničnu dužinu (AA_1) i koje su samim time elementi potpolja M sa *Sl. 17*; krajevima tih dužina pridruženi su cijeli brojevi $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Zatim, polazeći od konačnih dužina, pomoću (H3) i (H4) konstruiramo dužinu koja je beskonačna u odnosu na jediničnu dužinu (AA_1), a konačna u odnosu na svaku drugu dužinu koja joj prethodi u potpolju N. Time dobivamo klasu beskonačnih dužina prvoga reda čiji je predstavnik dužina (AA_∞). Označimo li kraj A_∞ dužine (AA_∞) beskonačnim brojem ∞_1 te potom konstruiramo polje čiji je početak u A_∞, a jedinična duž ponovo (AA_1), tada dobivamo i prvu klasu beskonačnih brojeva pridruženu elementima klase beskonačnih dužina prvoga reda:

$$\dots, \infty_1 - n, \dots, \infty_1 - 2, \infty_1 - 1, \infty_1, \infty_1 + 1, \infty_1 + 2, \dots, \infty_1 + n, \dots.$$

Sljedeći korak sastoji se u konstrukciji polja skale čiji bi početak također bio u A_∞, ali je jedinična dužina sada (AA_∞). Krajevima dužina tako dobivenoga polja odgovarali bi brojevi

$$\infty_1 \cdot 2, \infty_1 \cdot 3, \dots, \infty_1 \cdot n, \dots.$$

Tako, analogno, nastavimo li isti konstruktivni postupak, odnosno višestruku uzastopnu primjenu (H4), dobivamo beskonačne brojeve sve višega reda beskonačnosti oblika

$$\infty_1^{\infty_1^{\infty_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$ (usp. Veronese 1891: 106–113).

I, što je najvažnije, u §5 šestoga poglavlja uvoda u *Fondamenti*, naslovljenom „Legge associativa, commutativa della somma; legge distributiva, e commutativa della

[339] (**H5**) „Svaka beskonačna dužina koja već nije nekoga reda *m* (gdje je $m \in \mathbb{N}$), dobiva se primjenom principa sadržanoga u HIP. IV neki već dobiveni beskonačan broj puta (*un numero di volte infinito gia ottenuto*) ili onoliki beskonačan broj puta koji se dobiva od novih dužina koje su na taj način konstruirane." (Ip. V u Veronese 1891: 106) Veronese *ad loc.* naziva (H5) „hipotezom konstrukcije beskonačnih dužina [sc. brojeva] fundamentalne forme". Beskonačne dužine ∞_1^m-tog reda, polazeći od generatora (početka) A, Veronese naziva poljem beskonačnosti ∞_1^m-tog reda u odnosu na jediničnu dužinu (AA_1) i, obratno, dužina (AA_1) infinitezimalna je ∞_1^m-tog reda u odnosu na dužinu koja je ∞_1^m-tog reda beskonačnosti.

moltiplicazione dei numeri della classe (II)", Veronese eksplicitno ističe da za operacije nad njegovim beskonačnim brojevima vrijede *isti zakoni* kao i za standardne konačne brojeve. Pogledajmo sada kako je izgledao prvi pravi analitički model Veroneseova apsolutnog kontinuuma koji je, još kao dvadesetogodišnjak (!), konstruirao Veroneseov student Tullio Levi-Civita u dvama radovima koji se ubrajaju među najznačajnije doprinose *fin-de-siècle* nearhimedovskoj matematici.[340]

[2.6.2] Levi-Civitin model Veroneseova kontinuuma i Hilbertov model nearhimedovske geometrije

Matematičari i povjesničari matematike (i matematičke fizike) u pravilu povezuju ime Tullija Levi-Civite s tenzorskim računom koji je na prijelazu stoljeća razvio zajedno sa svojim padovanskim profesorom Ricci-Curbastrom (v. Dodatak A i nap. 62)[341] ili pak s radovima posvećenima problemu triju tijela i, nešto kasnije, općem problemu n tijela, kao i s radovima iz područja relativističke mehanike, osobito opće teorije relativnosti.[342] Međutim, ono što je manje poznato ili, bolje rečeno, gotovo posve nepoznato jest da su prve Levi-Civitine publikacije bile nadahnute Veroneseovim predavanjima iz geometrije iz akademske godine 1891/92., posvećenima problemu beskonačnosti i infinitezimala u zasnivanju geometrije, a koja su, što je očito iz njihove tematike, bila utemeljena na upravo objavljenim *Fondamenti*. Ovako je Amaldi opisao Levi-Civitin susret s *Fondamenti*:

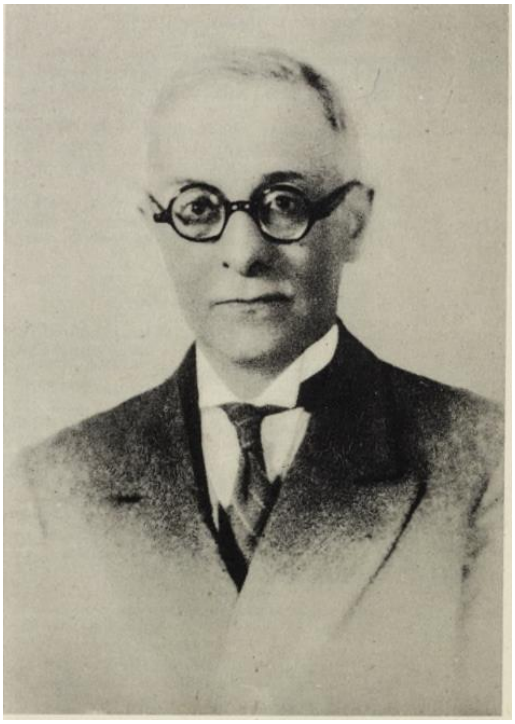
> „Od prvoga susreta sa svojim novim učiteljima, on [sc. Levi-Civita] vrlo je brzo njihova predavanja pretvorio u predmet vlastitoga istraživanja, dijeleći njihovu strast i njihove znanstvene napore. *U bezobalnom i, u nekim aspektima, nezgrapnom svijetu Veroneseovih Fondamenti, Levi-Civita je, zahvaljujući iznimnoj intuiciji (con singolare intuito), usmjerio pozornost na jedan od najoriginalnijih i najznačajnijih* [*Veroneseovih*] *rezultata, naime na dokaz mogućnosti* [sc. *neproturječnosti*] *nearhimedovskih geometrija* (*sulla dimostrazione della possibilità di Geometrie non-archimedee*). I, kao da je već predvidio neosnovane prigovore na temelju kojih će se poslije osporavati Veroneseov legitimni prioritet u pogledu toga otkrića (*con cui più tardi sarebbe stata contesa al Veronese la legittima priorità di quel ritrovato*), [Levi-Civita] je počeo tragati za izravnim opravdanjem [Veroneseova rezultata] koje bi bilo formulirano čisto analitičkim putem (*per via nettamente analitica*). Tako je između 1891. i 1892. [Levi-Civita] započeo svoju znanstvenu produkciju radom 'Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici', koji *i danas ne ostavlja dojam prvoga ogleda jednoga osamnaestogodišnjaka, nego zreloga djela već sposobnoga i*

[340] Za jedan od najranijih povijesno-filozofskih i filozofsko-matematičkih komparativnih pregleda Cantorovih i Veroneseovih teorija beskonačnih brojeva v. Petronievics 1907 i Petronievics 1917; v. također Petronijević 1929a.

[341] Ricci je radio na tenzorskom računu i ranije, još sredinom 1880-ih, a glavne je ideje razradio u razdoblju između 1885. i 1895. godine.

[342] Za više pojedinosti o Levi-Civitinu opusu i intelektualnoj biografiji v. Amaldijevu „Commemorazione" iz 1946., pretiskanu u Levi-Civitinim *Opere matematiche. Memorie e Note*, sv. I, 1954., str. ix–xxx. V. također Hodge 1942, Nastasi & Tazzioli 2005, kao i Goodstein 2018.

potpuno formiranoga istraživača.“ (citirano prema *Opere matematiche. Memorie e Note*, sv. I, 1954., str. xi, moj kurziv)[343]



Sl. 20. Tullio Levi-Civita (1873–1941)

(reproducirano iz Hodge 1942, ©2017, Royal Society[344])

I doista, već i sam naslov rada potvrđuje da je Levi-Civita primarno bio usredotočen na pružanje čisto analitičkoga tretmana nekonačnih elemenata Veroneseova nearhimedovskoga kontinuuma, odnosno polja $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Pogledajmo što sâm Levi-Civita kaže u uvodu – citiram ga *in extenso*:

> „Pojmovi aktualne beskonačnosti i infinitezimala, čije začetke možemo pronaći već kod Cavalierija i Leibniza, poslije su u potpunosti nestali iz matematike: iz analize, zato što se, nakon što su osnovi [infinitezimalnoga] računa učvršćeni na pojmu limesa, više nije smatralo da postoji potreba za ikakvom drugom [alternativnom] teorijom, a iz geometrije zbog empirizma, koji je i danas dominantno stajalište.[345]
>
> Prije svega nekoliko godina pitanje [o beskonačnosti i infinitezimalima] ponovno su otvorili Cantor i du Bois-Reymond, doduše, proučavali su ga s bitno drukčijega stajališta. Prvi je izveo pojam transfinitnih brojeva iz razmatranja nizova cijelih brojeva [usp. Odjeljak [2.6.1] – prim. S. P.], dok je drugi pokazao da uvođenje nekih novih simbola, odnosno brojeva može biti korisno za reprezentiranje redova beskonačnosti pojedinih funkcija [usp. Odjeljak [2.6] – prim. S. P.]. Međutim, ni

[343] Rad je objavljen u *Atti Ist. Veneto di Sc., lett. ed arti* (s. VII, t. IV) 1892/93., kada je Levi-Civita već navršio dvadeset godina.

[344] Levi-Civitina osmrtnica također je reproducirana u Goodstein 2018, Dodatak C, str. 157–173.

[345] Iako to ne navodi, Levi-Civita ovdje najvjerojatnije cilja na Paschov geometrijski empirizam iz *Vorlesungen* s kojim je svakako mogao biti upoznat utoliko što se o njemu mogao informirati u apendiksu *Fondamenti*, u kojem, kao što smo vidjeli, Veronese iznosi kritičke primjedbe o Paschovoj filozofiji geometrije. V. i Odjeljak [2.3].

rezultati te dvojice matematičara, niti oni do kojih je potom došao Stolz [usp. Odjeljak [2.6] – prim. S. P.], *ne zadovoljavaju sve fundamentalne principe aritmetike te stoga nisu prikladni za analitički tretman koji odgovara uobičajenim postupcima računanja* (*che corrisponda agli ordinari procedimenti di calcolo*).

Uvaženi profesor Veronese u svome je maestralnom djelu (*nella sua opera magistrale*) *Fondamenti di geometria a più dimensioni* etc. (Padova, 1891), nakon što je uspio svladati i ukloniti prepreke kojima su dugo ukorijenjene predrasude sputavale i onemogućavale razvoj hipergeometrije kao čiste znanosti te nakon što ga je upravo to istraživanje navelo da podvrgne kritičkom preispitivanju i reformira principe čitave geometrije (*a riformare i principii di tutta la geometria*), otvorio je i u ovom pogledu [sc. u vezi s pitanjima o statusu beskonačnosti i infinitezimala] nove i plodonosne perspektive. Među njima ćemo se, s obzirom na naše trenutne potrebe, *ograničiti na apstraktnu mogućnost beskonačnih i infinitezimalnih dužina* (*la possibilità astratta di segmenti infiniti ed infinitesimi*) […] i na dopustivost (*ammissibilità*) [konstruiranja ili uvođenja] novih dužina, također konačnih ili infinitezimalnih, koje se, kada se usporede s onima prethodnima, ponašaju upravo onako kako se one prve ponašaju u usporedbi s konačnim dužinama (ili pak s beskonačnim, odnosno infinitezimalnim dužinama različitih redova [beskonačnosti odnosno infinitezimalnosti]).

Kako bi reprezentirao te novouvedene entitete, on [sc. Veronese] ih je povezao s brojevima i odredio njihove temeljne operacije. Ipak, tim se [Veroneseovim] brojevima [usp. Odjeljak [2.6.1] – prim. S. P.] ne može uspješno služiti kao analitičkim instrumentima (*non possono adoperarsi con vantaggio quali strumenti analitici*), s jedne strane zbog njihova u biti geometrijskog podrijetla (*loro origine essenzialmente geometrica*), što ih upravo i čini izravnije primjenjivima u toj znanosti, a s druge strane zbog nedostatka odgovarajućih simbola ili konvencija (*la mancanza di simboli o convenzioni*) koji bi omogućili da budu sažeto prikazani (*compendiosamente rappresentati*).

Stoga mi se ne čini neprimjerenim predstaviti istu tu problematiku s jednoga posve analitičkog stajališta (*da un punto di vista assolutamente analitico*)*, pružajući pritom, doduše u znatno užem okviru, veću općenitost pojmu reda beskonačnosti* (*concetto di ordine di infinità*)*. Morat ću, stoga, izaći izvan okvira elementarne aritmetike kako bih iz tako dobivenih rezultata mogao izvesti i neke analitičke posljedice te im pružiti i čisto geometrijsku primjenu* [*i interpretaciju*]." (Levi-Civita 1892/93, citirano prema *Opere matematiche. Memorie e Note*, Vol. I, odnosno Levi-Civita 1954a: 1–2, moj kurziv)[346]

U radu „Sui numeri transfiniti" iz 1898. godine, koji se može promatrati kao nastavak rada iz 1892/93.[347], Levi-Civita dodaje da je njegov primarni cilj bio, „slijedeći fundamentalnu ideju prof. Veronesea" (*un'idea fondamentale del prof. Veronese*), pokazati kako je „pomoću nekoliko prikladnih konvencija *moguće konstruirati sustav konačnih, beskonačnih i infinitezimalnih brojeva za koje vrijede sva uobičajena pravila računanja*" (*per cui valgono tutte le ordinarie regole di calcolo*), odnosno „u kojem je *očuvano važenje svih uobičajenih zakona aritmetike*" (*tutte le ordinarie leggi dell'aritmetica*), dodajući da je do toga sustava došao „čisto aritmetičkim putem" (Levi-Civita 1898, navedeno prema *Opere*, Levi-Civita 1954b: 315, moj kurziv).[348] Levi-Civita je već 1898.

[346] U nastavku ću na Levi-Civita 1892/93. upućivati kao na Levi-Civita 1954a.

[347] I koji je sâm Veronese predstavio članovima Accademia dei Lincei 20.2.1898.

[348] U nastavku ću na Levi-Civita 1898 upućivati kao na Levi-Civita 1954b.

bio svjestan da mnogi matematičari nisu ispravno razumjeli Veroneseovu teoriju, istaknuvši da njihove kritike promašuju bit stvari, budući da je sama Veroneseova teorija formulirana „na nešto drukčiji način od onoga kako su je razumjeli njezini kritičari" (*in modo alcun poco diverso da quello inteso dei critici*), zbog čega je i preuzeo na sebe zadaću preciziranja Veroneseovih geometrijskih hipoteza kako bi pridonio uklanjanju pogrešnih tumačenja i iskrivljenih prikaza Veroneseove teorije (Levi-Civita 1954b: 316).

U tu je svrhu Levi-Civita u biti vjerno slijedio Veroneseov pristup opisan u prethodnom odjeljku. Naime, kao što možemo vidjeti na temelju prethodno citiranih mjesta, i on je prihvatio princip permanencije te je pristupio konstruiranju proširenoga nearhimedovskog numeričkog sustava koji donekle[349] prati Veroneseov apsolutni (geometrijski) kontinuum. Unutar toga sustava se sve standardne operacije i dalje mogu neograničeno izvoditi, uz opće važenje standardnih zakona aritmetike, dok su „relacije jednakosti i nejednakosti" također definirane na standardan način, čime je omogućena i međusobna usporedivost, odnosno uređaj novouvedenih nearhimedovskih brojeva. Drugim riječima, Levi-Civita je jednostavno konstruirao jedno nearhimedovsko uređeno polje, danas u literaturi poznato kao *Levi-Civitino polje* $\mathcal{R}$. Levi-Civitina prva konstrukcija toga polja iz 1892/93. godine svodi se na notacijsku inačicu leksikografski uređenoga polja čiji su elementi takozvani Laurentovi redovi potencija ili generatrise s koeficijentima i eksponentima u $\mathbb{R}$ (usp. Ehrlich 1994a: xxii) te ujedno predstavlja *najmanje realno zatvoreno nearhimedovsko proširenje* uređenoga polja $\mathbb{R}$ realnih brojeva (Shamseddine & Berz 2010: 217)[350]. Intuitivno promatrano, kao što kod Dedekinda možemo pratiti širenje domene brojeva (*Zahlgebiet*) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (v. Odjeljak [2.6.1]), kod Levi-Civite taj je postupak proširenja samo analogno nastavljen, rezultirajući relacijsko-operacijskom strukturom koja je *elementarno ekvivalentna* s $\mathbb{R}$, odnosno *elementarnim kontinuumom* koji, uz standardne konačne, sadrži i neke beskonačne te infinitezimalne elemente.[351] Za naše je potrebe osobito važan Tarskijev uvid (Tarski 1948/1951: 53–55, nap. 15–16) da se i nearhimedovska realno zatvorena uređena polja mogu promatrati kao nerazlučiva od uređenoga polja realnih brojeva s obzirom na sva svojstva prvoga reda. Ili, kako je to gotovo pola stoljeća ranije rekao Levi-Civita,

> „uvođenjem infinitezimalnih i beskonačnih elemenata standardno je numeričko polje poopćeno […] tako da se sve aritmetičke operacije i dalje izvode prema uobičajenom algoritmu (*è mantenuto l'algoritmo ordinario*), a relacije $=, <$ i $>$ „nastavljaju poštovati uobičajena pravila" (*continuino a soddisfare alle regole ordinarie*)." ((Levi-Civita 1954a, str. 7, nap. 3 i str. 9, nap. 5; usp. također Levi-Civita 1954b: 321)

[349] Levi-Civita je i sâm istaknuo da njegovi brojevi „nisu prikladni za reprezentaciju *čitavoga* Veroneseova sustava", odnosno Veroneseova polja $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ (Levi-Civita 1954: 315, moj kurziv).

[350] Prve važne rezultate iz područja teorije realno zatvorenih polja dugujemo Emilu Artinu (1898–1962) i Ottu Schreieru (1901–1929). V. glasoviti rad „Algebraische Konstruktion reeller Körper" (Artin & Schreier 1926). Kada je pak riječ o nearhimedovskim uređenim poljima, v. rad „Über nicht-Archimedisch geordnete Körper" Reinholda Baera (1902–1979) (Baer 1927).

[351] Uređena nearhimedovska polja uvijek sadrže beskonačno male, odnosno infinitezimalne elemente, ali nije nužno da istodobno sadrže i beskonačno velike elemente (Ehrlich 2010: 272).

Levi-Civitina *algoritamska identičnost* (*identità algoritmica*) upravo je ono što je Tarski izrazio pojmom *aritmetičke nerazlučivosti*: svaka tvrdnja izražena jezikom $L = (+, \cdot, <, 0, 1)$ elementarne teorije uređenih polja koja vrijedi za uređeno polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva, „jednako je primjenjiva ne samo na realne brojeve nego i na elemente svakoga drugog realno zatvorenog polja", dakle i na nearhimedovska proširenja polja $\mathbb{R}$ (Tarski 1948/1951, *ad loc. cit.*). Kao što ćemo vidjeti u Odjeljku [4.1], upravo je taj uvid omogućio i Robinsonu da pokaže kako neka od tih nearhimedovskih proširenja, poput sustava $^*\mathbb{R}$ hiperrealnih brojeva, mogu poslužiti za konzistentno zasnivanje leibnizovske infinitezimalne analize.

Polazeći od standardnog aritmetičkog kontinuuma, odnosno od uređenoga polja $\mathbb{R}$ realnih brojeva, Levi-Civita konstruira brojeve oblika a_ν, gdje su $a, \nu \in \mathbb{R}$, pri čemu a predstavlja *karakteristiku*, a ν *indeks*. Te brojeve on naziva *monosemima* numeričkog kontinuuma druge vrste (*numeri monosemii del continuo numerico di seconda specie*), između kojih su „stiješnjeni" (*compressi*) standardni realni brojevi oblika a_0, pri čemu je nula predstavljena bilo kojim monosemom oblika 0_α (Levi-Civita 1954a: 2).[352] Odabir donekle neobičnog naziva *numeri monosemii*, „jednoznačni", odnosno „jedinstveni brojevi", moguće je objasniti načinom na koji funkcioniraju Dedekindovi i Veroneseovi rezovi, proizvodeći *jedinstvene granične elemente* u strukturama na koje se primjenjuju. Veroneseovi brojevi, kao i monosemi koje Levi-Civita zajedničkim nazivom označuje kao „opće brojeve druge vrste" (*numeri generali di seconda specie*), mogu se promatrati kao u biti beskonačno složeni agregati jedinica – Veroneseovim riječima, „*numeri complessi speciali con infinite unità*" (Veronese 1891: xxvi, nap. 1).[353]

Drugim riječima, riječ je o brojevima tipa I_ν, gdje indeks ν može poprimiti bilo koju realnu vrijednost u intervalu $(-\infty, +\infty)$, dok su i same jedinice također monosemi (Levi-Civita 1954a: 9, nap. 6; Levi-Civita 1954b: 326, nap. 9). Naime, svaki se od tih „novih" brojeva α generira iz grupe monosema

$$G = a_{\nu^{(0)}}^{(0)} + a_{\nu^{(1)}}^{(1)} + \cdots + a_{\nu^{(n)}}^{(n)} + \cdots$$

i iz pripadne grupe indeksa

$$\Gamma = \nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(n)}, \ldots$$

koji zajedno konstituiraju standardne realne brojeve (Levi-Civita 1954a, §§3–7). Sâm je Levi-Civita svoje brojeve prvobitno predstavljao kao sume (*somma dei numeri*), premda je u radu iz 1898. pojasnio da je „znakom za sumiranje" (*simbolo sommatorio*) želio samo jednostavno „predstaviti agregate monosema koji konstituiraju brojeve" (Levi-Civita 1954b, §6). Danas se elementi Levi-Civitina polja $\mathcal{R}$ obično predstavljaju kao generatrise općeg oblika

[352] Ono što dosad nije bilo uočeno u literaturi jest da je Veronese u *Fondamenti* već istaknuo ideju da su standardni realni brojevi stiješnjeni između nestandardnih, ali i da sami nestandardni brojevi – oni koji su infinitezimalni i beskonačni – također mogu biti stiješnjeni između drugih nestandardnih brojeva višeg reda beskonačnosti, odnosno infinitezimalnosti (usp. Veronese 1891: 197–201). Ta je druga ideja analitički razrađena kod Levi-Civite u obliku teorije *hipermonosema*.

[353] To je dobro uočio i Hahn: „Auch Veronese bezeichnet die von ihm aufgestellten Zahlen gelegentlich als komplexe Zahlen mit unendlich vielen Einheiten." (Hahn 1907: 602, nap. 2)

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \nu^i ,$$

gdje su i koeficijenti a_i i eksponenti i realni brojevi (usp. Keisler 1994: 210).[354] Upravo se u tome ogleda i općenitost Levi-Civitine konstrukcije.[355]

Kada su monosemi infinitezimalni ili beskonačni? Monosemi i standardni realni brojevi *nisu arhimedovski ekvivalentni* (usp. Ehrlich 1997a: 59 i v. Odjeljak [2.6.1]). Svi monosemi čiji je indeks $\nu > 0$ po apsolutnoj su vrijednosti veći od svih konačnih realnih brojeva čiji je indeks $\nu = 0$, $|a_{\nu>0}| > |a_0|$ (Veronese bi rekao: beskonačni u odnosu na a_0), dok su svi nenulti monosemi s indeksom $\nu < 0$ manji od svakoga konačnog realnog broja, $|a_{\nu<0}| < |a_0|$ (Veronese bi rekao: infinitezimalni u odnosu na a_0) (Levi-Civita 1954a: 3, nap. 1). Geometrijska primjena (*applicazione geometrica*) Levi-Civitinih brojeva za numeričko reprezentiranje dužina Veroneseova kontinuuma jednostavna je i neposredna. Potpuno analogno Veroneseu (usp. Odjeljak [2.6.1]), Levi-Civita promatra varijabilni segment, odnosno dužinu, s jednim krajem fiksiranim u 0_0, a drugim koji varira do $a_{\pm\infty}$. Općenito, zadana će dužina biti ν-tog reda s obzirom na indeks ν koji pripada a, pa će utoliko i

> „dužina biti beskonačna, konačna ili infinitezimalna, ovisno o tome je li indeks koji pripada a veći, jednak ili manji od nule. […] Zadana dužina a beskonačna je, konačna ili infinitezimalna u odnosu na neku drugu dužinu k, ovisno o tome je li omjer $\frac{a}{k}$ izražen brojem čiji je indeks veći, jednak ili manji od nule.“ (Levi-Civita 1954a: 32)

Levi-Civita je, kao i Veronese prije njega (usp. 1891: 102ff. *et passim*), eksplicitno odbacio mogućnost da se njegovi nearhimedovski brojevi shvate po analogiji s Cantorovim transfinitnim brojevima (usp. Levi-Civita 1954a: 9, nap. 5). Međutim, kao što je otkrio Ehrlich, Federigo Enriques (1871–1946) prvi je u radu „Sui numeri non archimedei e su alcune loro interpretazioni“ iz 1911. godine uočio da Levi-Civitino polje $\mathcal{R}$, odnosno njemu izomorfna struktura $\mathbb{R}(\mathbb{Z})$,[356] „predstavlja prirodno sredstvo za inkorporiranje inicijalnog

---

[354] Primijetimo da je razlika u odnosu na Levi-Civitino $\sum_{r=0}^{\infty} a_{\nu(r)}^{(r)}$ samo notacijska.

[355] I Veronese je na nekim mjestima u *Fondamenti* svoje složene brojeve predstavljao kao nizove oblika $\infty_1^{y_1} r_1 + \infty_2^{y_2} r_2 + \infty_3^{y_3} r_3 + \cdots$, gdje su $r_1, r_2, r_3, \ldots$ realni brojevi, a $\infty_1^{y_1}, \infty_1^{y_1}, \infty_1^{y_1}, \ldots$ *jedinice*, od kojih je svaka infinitezimalna u odnosu na jedinicu koja joj prethodi, pri čemu ∞_1 predstavlja, kao što smo videli, beskonačni broj prvoga reda (usp. Veronese 1891: 101–102).

[356] Ako je $\mathbb{R}$ uređeno polje realnih brojeva, a $\mathbb{Z}$ Abelova grupa cijelih brojeva, $\mathbb{R}(\mathbb{Z})$ je skup svih formalnih redova oblika

$$\sum_{\alpha<\beta} \omega^{y_\alpha} r_\alpha$$

gdje je β neki ordinal, $\{y_\alpha : \alpha < \beta\}$ predstavlja opadajući niz elemenata grupe $\mathbb{Z}$, a $r_\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ za svako $\alpha < \beta$. Levi-Civita je uveo $\mathbb{R}(\mathbb{Z})$ u radu iz 1898. Jedinstveni takav niz za koji $\beta = 0$ (takozvani prazni niz) predstavlja nulu nearhimedovskog uređenog polja koje se dobiva leksikografskim uređenjem elemenata $\mathbb{R}(\mathbb{Z})$ i definiranjem zbrajanja i množenja na sljedeći način:

segmenta Cantorovih transfinitnih ordinala u nearhimedovsko uređeno polje“, budući da $\mathbb{R}(\mathbb{Z})$ „sadrži sve ordinale $\alpha < \omega^{\omega}$“ (Ehrlich 2006: 33–34). U Odjeljku [4.2] vidjet ćemo na koji je način moguće „utopiti“ Cantorove transfinitne brojeve u vrlo bogato nearhimedovsko polje, sasvim nalik Veroneseovu.

Za naše potrebe ključna implikacija Levi-Civitine konstrukcije polja $\mathcal{R}$ monosema tiče se činjenice da je njome, promatrano iz povijesne perspektive, prvi put – izuzmemo li Veroneseov pokušaj uvođenja beskonačnih brojeva – zapravo dokazana neproturječnost Veroneseove nearhimedovske geometrije. Levi-Civita je, međutim, učinio i više od toga. Već u prvom radu iz 1892/93. pokušao je *rekonstruirati odnosno razviti analizu* nad poljem $\mathcal{R}$ (trigonometrijske i eksponencijalne funkcije, nizove i limese, neprekidnost funkcija, uvjete konvergencije i dr.), čime je zapravo anticipirao prve važne rezultate koji su prethodili nestandardnoj analizi iz 1960-ih, ponajprije takozvani Ω-račun koji su potkraj 1950-ih uveli Detlef Laugwitz (1932–2000) i Curt Schmieden (1905–1991). Štoviše, u povijesno važnom radu „Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung“ iz 1958. Laugwitz i Schmieden eksplicitno ističu da su upravo Veroneseovi *Fondamenti* i u njima zasnovana aritmetika dužina (v. Odjeljak [2.6.1]) pružili odlučujući poticaj proučavanju nearhimedovskih sustava veličina, u kojem su se kao pioniri istaknuli Levi-Civita i Hans Hahn (1879–1934), jedan od utemeljitelja Bečkoga kruga, na čije se rezultate potom nadovezao Hilbert u *Grundlagen* (Schmieden & Laugwitz 1958: 3).[357] Pogledajmo sada kako je Hilbert pristupio utvrđivanju neproturječnosti nearhimedovske geometrije.

Podsjetimo da su se svi inicijalni pokušaji pružanja modela za nove, nestandardne geometrije, osobito neeuklidske, svodili na utvrđivanje njihove *relativne neproturječnosti*. Drugim riječima, kako bismo dokazali neproturječnost, primjerice, Lobačevskijeve hiperboličke geometrije, konstruiramo model te geometrije u nekoj drugoj teoriji za koju pretpostavljamo da je neproturječna – i doista, promatrano iz povijesne perspektive, Beltrami (1868), Klein (1872) i Poincaré (1882)[358] konstruirali su svoje modele neeuklidskih geometrija u standardnom euklidskom prostoru, čime su zapravo pokazali da su neeuklidski sustavi

$$\sum_{y\in\mathbb{Z}} \omega^y a_y + \sum_{y\in\mathbb{Z}} \omega^y b_y = \sum_{y\in\mathbb{Z}} \omega^y (a_y + b_y)$$

$$\sum_{y\in\mathbb{Z}} \omega^y a_y \cdot \sum_{y\in\mathbb{Z}} \omega^y b_y = \sum_{y\in\mathbb{Z}} \omega^y \left[\sum_{\substack{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \\ \mu+\nu=y}} a_\mu b_\nu \right]$$

[357] Suvremeni matematičari, osobito Martin Berz i Khodr Shamseddine, prepoznali su teorijski potencijal Levi-Civitine konstrukcije i pokazali na koji je način moguće rigorozno zasnovati analizu nad $\mathcal{R}$ (Berz 1996; Shamseddine & Berz 2010). Posebno zanimljiv detalj predstavlja okolnost da se Berz u radu iz 1996. zahvalio Detlefu Laugwitzu i Johnu Conwayu „na raspravama o Levi-Civitinim poljima, nadrealnim brojevima i nestandardnoj analizi“. Kao što sam već istaknuo, Laugwitzovi su rezultati bili važni Robinsonu pri formuliranju NSA, a Conway je 1976. uveo takozvane nadrealne brojeve koji, kao što ćemo vidjeti u Odjeljku [4.2], nalik Veroneseovu polju predstavljaju apsolutni kontinuum „svih velikih i malih brojeva“.

[358] Iako se Poincaréov znameniti disk-model prvi put pojavljuje u radu „Théorie des groupes fuchsiens“ (Poincaré 1882), šire je poznat postao tek nakon što ga je Poincaré objavio u svom filozofskom remek-djelu *La Science et l'Hypothèse* (Pariz, 1902.), dva desetljeća kasnije (usp. Poincaré 1902a, odjeljak „Le monde non-euclidien“, str. 83–87).

ekvikonzistentni s euklidskim, odnosno da su potpuno ravnopravni glede logičkog statusa. I svi Hilbertovi dokazi neproturječnosti alternativnih geometrija u *Grundlagen* također predstavljaju dokaze relativne neproturječnosti, s tom razlikom što Hilbert neće tvrditi da su te geometrije ekvikonzistentne s euklidskom geometrijom, nego da su sve one zajedno, kao uostalom i sama euklidska geometrija, ekvikonzistentne s teorijom realnih brojeva (Hilbert 1899, §9). I doista, u bilješkama za predavanja „Elemente der Euklidischen Geometrie" iz 1898/99., iz kojih su u konačnici i proizašli *Grundlagen*, Hilbert na jednom mjestu čak eksplicitno kaže da

> „euklidska geometrija postoji ako iz aritmetike usvojimo teorem da zakoni običnih realnih brojeva ne dovode ni do kakvih proturječnosti (*die Gesetze der gewöhnlichen reellen Zahlen auf keinen Widerspruch führen*). Time je istodobno dokazano postojanje svih onih [nestandardnih] geometrija (*damit ist zugleich die Existenz aller derjenigen Geometrien nachgewiesen*) koje smo razmatrali tijekom našega istraživanja." (citirano prema Hallett & Majer 2004: 391)[359]

Hilbertovi se dokazi odvijaju u dva koraka i mogu se sažeto prikazati otprilike ovako. U prvom se koraku svi relevantni geometrijski, odnosno nelogički pojmovi koji se pojavljuju u nekoj aksiomatski formuliranoj teoriji S reinterpretiraju u terminima neke pozadinske teorije B. Tako se, primjerice, pojam „točka" zamjenjuje uređenim parom (x, y) realnih brojeva $x, y \in \mathbb{R}$, pojam „pravac" skupom proporcija ili omjera $(u : v : w)$ bilo koja tri realna broja $u, v, w \in \mathbb{R}$ (pri čemu u i v ne mogu oba biti jednaki 0), dok se relacija „leži na" zamjenjuje skupom parova $\langle (x, y), (u : v : w) \rangle$ za koje vrijedi jednadžba $ux + vy + w = 0$ (Hilbert 1899, §9, usp. Blanchette 1996: 319–320). Kada se geometrijski iskazi na taj način prevedu u aritmetičke iskaze, oni izražavaju teoreme o realnim brojevima. U drugom se koraku zatim dokazuje da su tako reinterpretirani iskazi doista istiniti o ili, bolje rečeno, *u* polju $\mathbb{R}$. Poanta je, dakle, da bi se svaka proturječnost koja bi proizašla iz aksioma teorije S, kako kaže Hilbert, morala pojaviti već u aritmetici polja realnih brojeva $\mathbb{R}$. Ukratko, neproturječnost S u cijelosti se svodi na neproturječnost pozadinske teorije B. No kako nam to pomaže ako želimo dokazati neproturječnost nearhimedovske geometrije? Budući da realni brojevi čine arhimedovsku strukturu, zasigurno nam u tom pogledu ne mogu pomoći.

Odgovor je jednostavan: tako što ćemo konstruirati „sustav nearhimedovskih brojeva" (usp. Poincaré 1904: 23), odnosno nearhimedovsko uređeno polje. Drugim riječima, valja učiniti upravo ono što je prethodno već 1891. pokušao Veronese, a što je 1892/93. definitivno ostvario Levi-Civita (kojega Hilbert nigdje ne citira) konstruiravši polje $\mathcal{R}$. I doista, u §12 *Grundlagen* Hilbert konstruira jedan „kompleksni sustav brojeva" (*complexe Zahlensystem*), polje $\Omega(t)$ svih algebarskih funkcija od t koje se dobivaju iz t primjenom standardnih operacija ($+, -, \cdot$ i $/$) i operacije $\left|\sqrt{1+\omega^2}\right|$ gdje ω označuje bilo koju funkciju koja je već dobivena primjenom tih pet operacija. Hilbert je, poput Veronesea i Levi-Civite, također prihvaćao princip permanencije (usp. Detlefsen 2005: 287ff.), zahtijevajući da u novokonstruiranom sustavu $\Omega(t)$ „vrijede sva uobičajena računska pravila", odnosno zakoni računanja (*Rechnungsgesetze*) ili, preciznije, ono što je nazivao *arithmetische Axiome der*

[359] Ne čudi stoga što je pitanje neproturječnosti teorije realnih brojeva zaokupljalo Hilberta (usp. Odjeljak [2.5]).

Verknüpfung (operacije zbrajanja i množenja u $\Omega(t)$ trebaju, kao i u $\mathbb{R}$, poštovati zakone komutativnosti, asocijativnosti itd.), kao i *arithmetische Axiome der Anordnung* (relevantna svojstva relacije uređaja, poput linearnosti, tranzitivnosti itd.) (Hilbert 1899, §§12–13). Tada se, kao što je pokazao Poincaré, elementi Hilbertova nearhimedovskog polja mogu zapisati u obliku

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + A_2 t^{m-2} + \cdots,$$

gdje su koeficijenti A realni brojevi, a eksponenti m pozitivni ili negativni cijeli brojevi (Poincaré 1904: 23–24).[360] I u tako definiranom Hilbertovu polju $\Omega(t)$ možemo, kao i prethodno u slučaju $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ i $\mathcal{R}$, pronaći standardne realne brojeve kao potpolje: „naši uobičajeni brojevi predstavljaju samo posebne slučajeve ovih *nearhimedovskih brojeva* (*nos nombres vulgaires rentrent comme cas particuliers parmi ces nombres non archimédiens*)." (Poincaré 1904, *ad loc. cit.*)

Na kraju valja spomenuti i jedan zanimljiv rezultat Veroneseova studenta A. Bindonija. Naime, u radu „Sui numeri infiniti ed infinitesimi attuali"[361] iz 1902. godine Bindoni je istaknuo da je Hilbertovo nearhimedovsko polje $\Omega(t)$ zapravo „stiješnjeno u polju brojeva prof. Veronesea" (*il campo dei numeri del sig. Hilbert è compresso nel campo di numeri del prof. Veronese*), odnosno, drugim riječima, da Hilbertovo polje $\Omega(t)$, kao uostalom i Levi-Civitino polje $\mathcal{R}$, predstavlja samo potpolje bogatijega Veroneseova polja $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ (Bindoni 1902: 209). Kako bi to dokazao, Bindoni je konstruirao još jedno nearhimedovsko uređeno polje $\boldsymbol{\Gamma}(x)$, koje je smatrao uopćenjem Hilbertova polja, a čiji su elementi tipa x definirani pomoću sljedećega izraza

$$\frac{a_1 x^{\omega_n} + a_2 x^{\omega_{n-1}} + \cdots + a_n x^{\omega_1}}{b_1 x^{\omega'_m} + b_2 x^{\omega'_{m-1}} + \cdots + b_n x^{\omega'_1}}$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *realni brojevi*, a $\omega_n \ldots \omega_1$ i $\omega'_m \ldots \omega'_1$ *izrazi* prethodno dobiveni iz navedenoga izraza (Bindoni 1902: 206). Bindoni je pokazao da je $\boldsymbol{\Gamma}(x)$ polje i da zadovoljava sva uobičajena svojstva. Njegova je poanta da je Hilbert, budući da se pri konstrukciji $\Omega(t)$ ograničio samo na cijele brojeve kao moguće vrijednosti eksponenata, dobio tek „polje beskonačnih i infinitezimalnih brojeva konačnoga reda" (*un campo dei numeri infiniti ed infinitesimi di ordine finito*), dok, nasuprot tomu, Bindonijeva konstrukcija daje „polje beskonačnih i infinitezimalnih brojeva beskonačnoga reda" (*di ordine infinito*) (Bindoni 1902: 208–209; v. i nap. 247 *infra* te usp. s Levi-Civitinom konstrukcijom $\mathcal{R}$). Neovisno o tome što je, strogo uzevši, neproturječnost Veroneseove nearhimedovske geometrije bila utvrđena i prije Hilberta, posredstvom odgovarajućih manje (Veronese) ili više analitičkih modela (Levi-Civita), činjenica je da se Hilbertov pristup, kako je istaknuo Poincaré u zaključku izvješća podnesenoga međunarodnom povjerenstvu koje je ocjenjivalo natječaj za drugu Prix Bolyai 1910. godine, odlikuje „elegancijom i jednostavnošću metoda, jasnoćom izlaganja i brigom za apsolutnu strogost" (*l'élégance et la simplicité des méthodes, la clarté de l'exposition, le souci de*

[360] Primijetite već ovdje razliku u odnosu na Levi-Civitinu prethodnu konstrukciju, u kojoj su i koeficijenti i eksponenti uzimali vrijednosti iz skupa $\mathbb{R}$.

[361] Kao i u slučaju Levi-Civitina rada iz 1892/93., i ovaj je Bindonijev rad Veronese osobno predstavio u Accademia dei Lincei.

l'absolue rigueur), pri čemu je, možda i najimpresivnije, sve to spojeno sa sposobnošću da se „izbjegne zamorna opširnost" u koju se katkada zapada u nastojanju da se postigne savršena strogost (Poincaré 1912: 28). U istome je duhu Poincaré pisao i desetak godina ranije, kada je podnio izvješće o Hilbertovim doprinosima za Prix Lobatschefsky, istaknuvši da Hilbertovi radovi, a osobito *Grundlagen*, „označuju jednu epohu" (*ses travaux marquent une époque*) (Poincaré 1904: 48).

Drugim riječima, ponovno se vraćamo onomu problematičnom aspektu Veroneseovih fundamentalnih rezultata na koji sam već skrenuo pozornost u Odjeljku [2.1] – načinu i stilu izlaganja koji je čak i tadašnjim matematičarima morao djelovati zastarjelo i, u određenom smislu, kontramoderno. Usporedbe radi, *Fondamenti* imaju gotovo 700 stranica, dok je prvo izdanje *Grundlagen* imalo svega 90; isto tako, Veroneseova rasplinuta konstrukcija $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ u *Fondamenti* prostire se na više od 150 stranica, dok je Hilbert u *Grundlagen* konstruirao $\boldsymbol{\Omega(t)}$ na nešto manje od četiri stranice (!) i to na posve jasan i vrlo precizan način. Doduše, nespretnost, neprozirnost i iznimna složenost Veroneseove konstrukcije nearhimedovskoga uređenog polja mogu se razumjeti kao neizbježan nusproizvod onoga što je Veronese, osobito u *Fondamenti*, pokušao postići: konstruirati, i to čisto sintetičkim putem, prvo nearhimedovsko uređeno polje u povijesti matematike kao model svoje nove geometrije i teorije apsolutnoga, infinitezimalima obogaćenoga kontinuuma (usp. Ehrlich 2021: 507).[362] I doista, u svom posljednjem prilogu nearhimedovskoj geometriji, predavanju pripremljenom za ICM u Rimu 1908. godine, Veronese je još jednom naglasio da je

> „aritmetička koncepcija [novih nearhimedovskih] brojeva morala ostati u pozadini (*la concezione aritmetica di questi numeri doveva stare in seconda linea*) *jer je, kao što sam rekao, bilo potrebno suočiti se s tim pitanjem* [sc. *egzistencije nearhimedovskih sustava veličina*] *ne iz aritmetičkog, nego iz geometrijskog kuta*. Upravo je ta opravdana **nedostatnost aritmetičke razrade** [**moje teorije**] (*questa insufficienza giustificata di sviluppo aritmetico*) **dala povoda pojedinim kritikama usmjerenima protiv novih beskonačnosti i novih infinitezimala**. Zbog toga je prof. Levi-Civita, dok je još bio moj student, na moj savjet prvi obradio to pitanje s gledišta aritmetike, konstruiravši nove brojeve na čisto aritmetički način. […] S drugoga gledišta, gospodin Hilbert konstruiranjem nearhimedovskog geometrijskog polja pružio je potvrdu logičke mogućnosti takve jedne geometrije, a gospodin Bindoni u svom je diplomskom radu pokazao da Hilbertovo polje predstavlja samo potpolje polja koje sam ja uveo. Nedavna skupovnoteorijska istraživanja, poput onoga koje je proveo gospodin Schönflies, potvrđuju logičku valjanost nearhimedovske geometrije […] kao i nedavni radovi

[362] I sâm Veronese to priznaje u radu „Segmenti e numeri transfiniti", u kojem kaže: „Ne niječem da postoje poteškoće (*non nego che difficoltà vi siano*), ali one proizlaze iz prirode problema kojim sam se bavio." (usp. Veronese 1898: 86). Veronese u nastavku dodaje i sljedeće:

> „Più si discende e più difficili sono le questioni intorno ai fondamenti della scienza, di guisa che le maggiori difficoltà s'incontrano dapprincipio. E nel mio libro sono forse più gravi che in altri, perchè non ho supposto nulla di noto per trattare il problema in tutta la sua generalità. Se io avessi avuto di mira un solo postulato, ad es. quello di Archimede, o se io avessi fatto uso fin dal principio dell'istrumento analitico con tutte le sue risorse, le mie ricerche sarebbero state più facilmente comprese; ma avrei trattata la questione dei principî della matematica e in particolare della geometria da un punto di vista più ristretto." (str. 86–7)

gospode Hahna, Schönfliesa i Vahlena.“ (Veronese 1909: 199–200, Veroneseov izvorni kurziv, moja emfaza dodana podebljanim slovima)[363]

Neovisno o (samonametnutim) otežavajućim okolnostima koje su u Veroneseovu slučaju zapravo proizlazile iz njegove *filozofije geometrije* (usp. Odjeljak [2.4]), činjenica na koju ovdje s pravom upozorava jest da su njegovi radovi, a ponajprije *Fondamenti*, prvi put pružili sve ključne elemente jedne obuhvatne teorije nearhimedovskih veličina, koju će drugi matematičari potom dalje razvijati tijekom prve polovice 20. stoljeća u različitim kontekstima i u različitim područjima matematike –algebri, aritmetici i analizi, teoriji skupova i logici. I doista, kao što sam pokazao u odjeljcima [2.5], [2.6] i [2.6.1], svi elementi Hilbertove konstrukcije nearhimedovske geometrije u *Grundlagen*, zajedno s popratnom analizom njezinih metamatematičkih svojstava, bili su operativni već kod Veronesea (i Levi-Civite). Čak i središnja ideja da se neproturječnost neke dane geometrije utvrđuje, odnosno dokazuje, konstruiranjem *aritmetičkoga modela* njezinih aksioma zapravo potječe od Veronesea, a ne od Hilberta. Međutim, ključ potonjega uspjeha *Grundlagen* (i, moglo bi se reći, potonjega usporednoga neuspjeha *Fondamenti*) stoga ne leži u bitno drukčijim matematičkim rezultatima, nego u *načinu njihove prezentacije*. Hilbert je u biti iste ideje i rezultate predstavio na dotad neviđeno sažet, pregledan i doista metodološki jedinstven i uzoran način, pokazujući *na nizu u osnovi jednostavnih ali paradigmatskih primjera*, kako matematičarima tako i filozofima zainteresiranima za zasnivanje matematike i metamatematička pitanja, kako bi trebao funkcionirati *tip dokaza* kojima se utvrđuju nezavisnost aksioma i neproturječnost pojedinih nestandardnih geometrija te, općenito, metamatematičko istraživanje aksiomatski formuliranih teorija.

[**2.6.3**] **Aksiomi uređenoga polja i aksiomi neprekidnosti**

U prethodnim smo se odjeljcima susretali s različitim strukturama poput grupa i polja. Premda je iz konteksta izlaganja dovoljno jasno koja su relevantna i definišuća svojstva tih struktura te kakvi su njihovi međusobni odnosi, radi preglednosti ću ovdje izložiti način na koji se one danas standardno uvode. Osim toga, razumijevanje teorije uređenih polja ključno je i za ispravno razumijevanje nestandardne analize (Odjeljak [4.1]). Nadalje, premda smo u Odjeljku [2.6] već imali priliku vidjeti kako se Veroneseovi aksiomi neprekidnosti odnose prema poznatijim Dedekindovu i Arhimedovu aksiomu, u ovom ću odjeljku iznijeti i nekoliko povijesno-filozofskih te povijesno-matematičkih zapažanja o međusobnim odnosima još nekih alternativnih formulacija aksioma neprekidnosti, budući da će nam to ponajprije olakšati praćenje Cantorove kritike infinitezimalizma.

Uređeno je polje svaka struktura $\mathbb{F} = \langle F, +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle$ takva da su za sve $x, y, z \in F$ ispunjeni sljedeći uvjeti:

(I) $\langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ je polje;

[363] Veronese pritom misli na Hahnov rad „Über die nichtarchimedischen Grössensysteme“ iz 1907., Schönfliesov rad „Über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter (nicht archimedischer) Maßbestimmung“ iz 1906. te Vahlenov rad „Über nicht-archimedische Algebra“ iz 1907. godine.

(II) $\langle F, \leq \rangle$ je uređen skup;

(III) Ako je $x \leq y$, onda je $x + z \leq y + z$;

(IV) Ako je $0 \leq x$ i $0 \leq y$, onda je $0 \leq x \cdot y$.

Kada se raspišu uvjeti (I) i (II), prethodna definicija uređenoga polja poprima sljedeći oblik: za strukturu $\mathbb{F} = \langle F, +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle$, u kojoj je F skup, $+$ i $\cdot$ binarne operacije na skupu F, $\leq$ binarna relacija na skupu F, a 0 i 1 elementi, odnosno konstante skupa F, kaže se da je *uređeno polje* ako su za sve $x, y, z \in F$ ispunjeni sljedeći uvjeti:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$; *asocijativnost zbrajanja*

2. $x + 0 = 0 + x = x$; *neutralni element zbrajanja*

3. $(\exists u \in F)(x + u = 0 \wedge u + x = 0)$; *aditivni inverz*

4. $x + y = y + x$; *komutativnost zbrajanja*

5. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$; *asocijativnost množenja*

6. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$; *neutralni element množenja*

7. $x \cdot y = y \cdot x$; *komutativnost množenja*

8. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ *distributivnost množenja prema zbrajanju*

9. $x \neq 0 \Rightarrow (\exists u \in F)(x \cdot u = 1)$ *multiplikativni inverz*

10. $0 \neq 1$ *netrivijalnost polja*

11. $x \leq x$ *refleksivnost relacije* $\leq$

12. $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$ *antisimetričnost relacije* $\leq$

13. $(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ *tranzitivnost relacije* $\leq$

14. $x \leq y \vee y \leq x$ *linearnost relacije* $\leq$ (*uporedivost*)

15. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ *usklađenost relacije* $\leq$ *sa operacijom* $+$

16. $(x \leq y \wedge 0 \leq z) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$ *usklađenost relacije* $\leq$ *sa operacijom* $\cdot$

Uvjete **1–16** nazivamo aksiomima uređenoga polja. Imajući u vidu definicije iz nap. 302 u Odjeljku [2.6], primijetit ćete da prethodno izložena teorija linearno uređenih polja sadrži nekoliko važnih podteorija. Primjerice, uvjeti **1–3** predstavljaju *aksiome teorije grupa*, a uz dodatak aksioma **4** dobivamo teoriju *Abelovih odnosno komutativnih grupa*. Uvjeti **1–8** predstavljaju *aksiome teorije komutativnih prstena s jedinicom*, a uz dodatak aksioma **9** i **10** dobivamo *teoriju polja*. Aksiomi **11–13** opisuju *teoriju parcijalnoga uređaja*, a uz aksiom **14** dobivamo *teoriju linearnoga* ili *totalnoga uređaja* (usp. Mijajlović *et al.* 2014: 17–18).

Svako uređeno polje s barem dva elementa beskonačno je. Ako je $\mathbb{F}$ uređeno polje, onda iz $0, 1 \in F$, aksioma **15** i relacije $0 < 1$ sledi da je

$$\sum_{i=1}^{n} 1 < \sum_{i=1}^{n+1} 1$$

za svaki prirodan broj n, a odatle slijedi da je skup F beskonačan. Dakle, svako je uređeno polje beskonačno. Svako uređeno polje $\mathbb{F}$ također sadrži izomorfnu kopiju prirodnih brojeva: struktura $\mathbb{N} = \langle N, +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle$ čini potstrukturu polja $\mathbb{F}$. Isto vrijedi i za polje racionalnih brojeva, odnosno za strukturu $\mathbb{Q} = \langle Q, +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle$, koja je također potpolje polja $\mathbb{F}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}$. Kao što smo već vidjeli tijekom prethodnog izlaganja, za naše su potrebe osobito zanimljiva takozvana *arhimedovska* i *nearhimedovska uređena polja*. Arhimedovsko uređeno polje, naravno, jest svako uređeno polje $\mathbb{F}$ u kojem vrijedi Arhimedov aksiom, koji se može formulirati i u sljedećem obliku: za svaki element $a \in \mathbb{F}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a \leq n$. Svi su elementi arhimedovskih uređenih polja konačni. Zajedno s aksiomima uređenoga polja, arhimedovsko je svojstvo logički ekvivalentno svakoj od sljedećih dviju tvrdnji:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$[364]

Polje racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ i polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ dobro su poznati primjeri arhimedovskih uređenih polja. Standardni aritmetički kontinuum odnosno realni brojevi mogu se uvesti *konstruktivno* (polazeći od skupa racionalnih brojeva kao već zadanoga, nekom procedurom efektivno konstruiramo realne brojeve[365]) ili *aksiomatski*.[366] Aksiomi neprekidnosti, poput Arhimedova aksioma, ključni su za matematičku analizu. Međutim, oni se ne mogu izvesti iz prethodno navedenih algebarskih aksioma, nego se mogu jedino zamijeniti nekom alternativnom formulacijom.

U Odjeljku [2.6] vidjeli smo da je Stolz prvi skrenuo pozornost na važnost Arhimedova aksioma, osobito u kontekstu osnova analize, te da je Veronese prvi sustavno

---

[364] Kao što je istaknuo Šikić, Arhimedov aksiom u obliku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

djeluje kao tautologija, zbog čega mnogi nisu svjesni mogućnosti postojanja nearhimedovskih uređenih polja. Štoviše, „to je vjerojatno jedan od najjačih (iako pogrešnih) razloga za odbacivanje pojma infinitezimala, ili za često ponavljanu (također pogrešnu) tvrdnju da je taj pojam nekonzistentan." (Šikić 2023: 37)

[365] To je bio pristup Dedekinda i Cantora u njihovim radovima iz 1872. godine. Dedekindov pristup konstrukciji iracionalnih brojeva u *Stetigkeit und irrationale Zahlen* temelji se na rezovima skupa racionalnih brojeva, dok ih Cantor u radu *„Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen"* konstruira pomoću konvergentnih Cauchyjevih nizova racionalnih brojeva. Usp. Dedekind 1872 i Cantor 1872.

[366] To je bio Hilbertov pristup u radu „Über den Zahlbegriff" iz 1900. godine. Radi primjerene karakterizacije polja $\mathbb{R}$, Hilbert je među aksiome neprekidnosti, uz Arhimedov aksiom, uključio i takozvani *aksiom linearne potpunosti* (*Vollständigkeitsaxiom*), kojim se zapravo stipulira da je zadana struktura realnih brojeva *maksimalna*, odnosno da svako njezino proširenje koje zadovoljava preostale aksiome realnih brojeva već mora biti sadržano u strukturi $\mathbb{R}$:

„Es ist nicht möglich, dem Systeme der Zahlen ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so daß auch in dem durch Zusammensetzung entstehenden Systeme bei Erhaltung der Beziehungen zwischen den Zahlen die Axiome I, II, III, IV.1 sämtlich erfüllt sind; oder kurz: *die Zahlen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher Beziehungen und sämtlicher aufgeführten Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist.*" (Hilbert 1900a: 183, moj kurziv)

istražio odnos između Arhimedova i drugih aksioma neprekidnosti. Otkako je Johan Ludvig Heiberg (1854–1928), klasični filolog, povjesničar matematike i priređivač još uvijek najreprezentativnijih izdanja Euklida, Arhimeda, Apolonija i drugih klasika grčke matematike, 1880. godine izvornu formulaciju Arhimedova aksioma iz spisa Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου (*SC*, Lib. I, POST. 5) proglasio ekvivalentnom takozvanom Eudoksovu aksiomu (v. nap. 320) odnosno četvrtoj definiciji iz pete knjige Euklidovih *Elemenata*[367], Stolzova je interpretacija postala standardna:

$$\forall a, b(0 < a < b \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ puta}} > b).$$

Međutim, za razliku od Eudoksove odnosno Euklidove formulacije, kojoj ovaj oblik doista odgovara, Arhimedov je POST. 5 formuliran ovako:

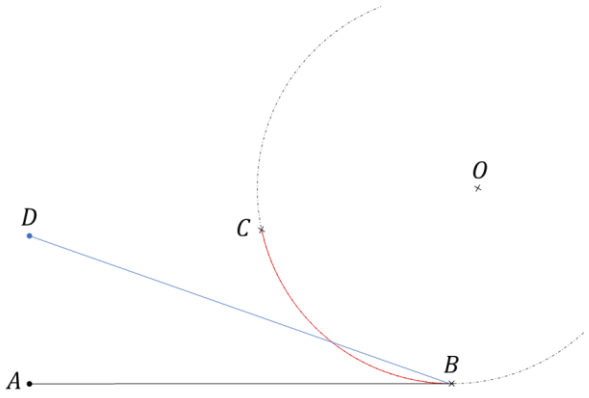
> „Od nejednakih veličina [sc. dužina, ploha ili tijela] veća nadmašuje manju za [njihovu međusobnu] razliku koja, kada se sama sebi doda [konačan broj puta], može nadmašiti (ὑπερέχειν) svaku od veličina koje se uspoređuju (παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων)."

Usporedbe radi, navedimo još jednom formulaciju iz *Elemenata*:

> „Kaže se da su dvije veličine u razmjeru jedna prema drugoj ako neki višekratnik bilo koje od njih može biti veći od druge (λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν)."

Johannes Hjelmslev (1873–1950) poistovjećivanje Eudoksova i Arhimedova aksioma nazvao je „Stolzovom pogreškom", koju su, prema njegovu mišljenju, potom preuzeli i Veronese u *Fondamenti* te Hilbert u *Grundlagen* (usp. Hjelmslev 1950: 4, nap. 1). U svojoj analizi odnosa između Eudoksova i Arhimedova aksioma (ili, kako ga on naziva, leme), Hjelmslev se poziva na prigovore koje je povjesničar matematike Hieronymus Georg Zeuthen (1839–1920) iznio još 1904. godine na Međunarodnom kongresu matematičara u Heidelbergu, dovodeći u pitanje poistovjećivanje tih dviju formulacija. Jedna je Zeuthenova napomena osobito zanimljiva. Naime, istaknuo je da je već Euklid otišao vrlo daleko u razvoju onoga što se danas (slijedeći Veronesea) naziva nearhimedovskom geometrijom: „njegove [sc. Euklidove] prve četiri knjige (kao, uostalom, i knjige VII–IX i XI) pripadaju [nearhimedovskoj geometriji]", dodajući, doduše, da je „ta činjenica potpuno zamagljena kada se postulat koji se odnosi na infinitezimale naziva 'Arhimedovim postulatom' (*wenn man das Infinitesimalpostulat 'Archimedes Postulat' nennt*) i kada se, slijedeći takvu nomenklaturu, govori o nearhimedovskoj [sc. infinitezimalnoj] geometriji." (Zeuthen 1905: 541) I doista, već u *Elementima* III.16 možemo pronaći primjer nearhimedovskih veličina, takozvanih κερατοειδεῖς odnosno *rogljastih kutova*, koje zatvaraju jedan pravac i jedna krivulja ili pak dvije krivulje (poznati su i pod nazivom *tangencijalni kutovi*). Rogljasti kutovi tipa $\measuredangle ABC$ manji su od bilo kojega uobičajenog, odnosno pravocrtnog, kuta poput $\measuredangle ABD$ – drugim riječima, infinitezimalni su (v. *Sl. 21*).

[367] V. Heibergov komentar uz POST. 5 u *SC*, LIB. I, u *Archimedis opera omnia*, Vol. I (*Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana*), str. 9, nap. 2.



Sl. 21. Rogljasti kut $\measuredangle ABC$

Kako bi trebalo shvatiti riječi παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων iz izvorne formulacije Arhimedova POST. 5? Oslanjajući se na relevantne dostupne prijevode Arhimeda, osobito Heibergov latinski, Ver Eeckeov francuski i Heathov engleski prijevod, koje Dijksterhuis (usp. Dijksterhuis 1987: 146–147) smatra najvjernijima grčkom izvorniku, Arhimedov peti postulat tvrdi da, ako su a i b nejednake veličine ($a \lneqq b$) i ako je $c = a - b$ (ili $b - a$), tada postoji neki cijeli broj n takav da je $nc > d$, gdje je

$$nc = \underbrace{c + \cdots + c}_{n \text{ puta}},$$

a d proizvoljna zadana veličina usporediva s c, ali i s veličinama a i b (*ayant un rapport avec l'une et l'autre des premières*, sec. Ver Eecke; *cum ea comparari*, sec. Heiberg). Ako imamo na umu da na Eudoksovu aksiomu počiva teorija razmjera te da ga i sam Arhimed u tom obliku primjenjuje u nizu dokaza (osobito u *QP* i *De lin. spir.*), inzistiranje na tekstualnim nijansama moglo bi se pokazati važnim za otkrivanje motiva koji je Arhimed mogao imati pri uvođenju dodatnoga postulata kojim se tvrdi nešto o veličini koja se pojavljuje kao razlika dviju drugih zadanih veličina. Intendirano značenje Arhimedove dodatne specifikacije Eudoksova aksioma može se protumačiti kao motivirano afirmacijom Zenonova aksioma, i to na sljedeći način. Naime, kada bi se Zenonov aksiom eksplicitno zanijekao, razlika između dvaju nejednakih poliedara mogla bi biti ploha, dvije bi se nejednake plohe mogle razlikovati samo za liniju, a dvije nejednake linije samo za jednu točku. Tada, međutim, ne bi bilo jasno kako bi ikada moglo vrijediti $nc > d$, budući da je sama mogućnost uspoređivanja i, uopće uzev, sumjeravanja veličina (λόγον ἔχειν μεγέθη), uvjetovana time da je riječ o *veličinama iste vrste* (μεγεθῶν ὁμογενῶν) (usp. *Elementi*, LIB. V, DEF. 3). Smisao Arhimedove dopune Eudoksova aksioma leži, dakle, u eksplicitnom zahtjevu *dimenzijske homogenosti*, prema kojemu i razlika c bilo kojih dviju veličina iste vrste, a i b, mora zadovoljavati Eudoksov aksiom u odnosu na bilo koju veličinu d koja je iste vrste kao a i b. I doista, kako je istaknuo De Risi, u geometrijskom se kontekstu tako shvaćena homogenost smatrala istovjetnom arhimedičnosti (usp. De Risi 2019: 136, nap. 54). Prema Zeuthenu i Hjelmslevu, upravo je ova dopuna Arhimedu bila ključna za *proširenje* tradicionalne eudoksovske teorije razmjera (iz pete knjige *Elemenata*) na veličine za koje ona izvorno nije bila formulirana. Drugim riječima, teoriju razmjera trebalo je smisleno proširiti sa pravih linija i pravocrtnih ravninskih likova na

krivulje i zakrivljene plohe (usp. Zeuthen 1905: 542; Hjelmslev 1950: 2). S druge strane, Heath ovako komentira Euklidovu DEF. 4:

> „Ova definicija dopunjuje prethodnu definiciju [sc. *Elem.*, LIB. V, DEF. 3]. De Morgan kaže da se svodi na tvrdnju da su veličine [o kojima je riječ] iste vrste. Ali to teško da može biti sve. Čini se da bi definiciju prije trebalo shvatiti tako da se njome, s jedne strane, isključuje [mogućnost] *razmjera* kon*ačne veličine prema veličini iste vrste koja je ili beskonačno velika ili beskonačno mala* te da se njome, štoviše, naglašava činjenica da sam pojam razmjera, kako je definiran u prethodnoj definiciji i kako će se koristiti kroz cijelu knjigu, obuhvaća odnos između bilo koje dvije nesumjerljive, jednako kao i između bilo koje dvije sumjerljive konačne veličine iste vrste.“ (Heath 1908: 120, moj kurziv)

To znači da Arhimedov aksiom isključuje: (i) mogućnost da se razlika između bilo koje dvije n-dimenzionalne veličine iste vrste transformira u $(n-1)$-dimenzionalnu veličinu, premda se ta razlika uvijek može učiniti sve manjom, *in indefinitum*; te (ii) mogućnost konstruiranja standardnih, n-dimenzionalnih veličina zbrajanjem ili množenjem konačan broj puta n-dimenzionalnih, ali beskonačno malih veličina.[368]

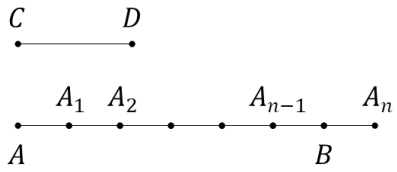
Pogledajmo sada još neke poznate aksiome neprekidnosti. Najprije navedimo formulaciju Arhimedova aksioma kakva se najčešće susreće u suvremenim aksiomatizacijama euklidske geometrije:

[**A**] Ako su (AB) i (CD) dvije proizvoljne dužine (v. *Sl. 22*), tada na pravcu AB postoji konačan niz tačaka $A_1, A_2, \dots, A_n$ takvih da važi $B \in (A_{n-1}A_n)$ (ili, alternativno, $\mathcal{B}(A, B, A_n)$) i $\mathcal{B}(A, A_1, \dots, A_n)$ pri čemu $(CD) \cong (AA_1) \cong (A_1A_2) \cong \cdots \cong (A_{n-1}A_n)$.[369]

---

[368] Pitanje statusa ovako interpretiranoga Arhimedova aksioma unutar samoga Arhimedova opusa dodatno usložnjava Heibergovo otkriće takozvanoga Arhimedova palimpsesta 1905. godine, a osobito spis *Metoda* (Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος), sačuvan u tome palimpsestu, u kojem Arhimed na pojedinim mjestima upotrebljava infinitezimale, bilo heuristički (M.1), bilo čak i u samim dokazima (M.14). Primjerice, u M.1, koji se odnosi na tvrdnju što ju je Arhimed prethodno već dokazao u *Kvadraturi parabole* (da površina paraboličkoga odsječka $\sphericalangle ABC$ iznosi 4/3 površine trokuta $\triangle ABC$ nad kojim je konstruiran, s kojim dijeli osnovicu i ima jednaku visinu), Arhimed doslovno govori o *plohama koje su sastavljene od linija* (primjerice, ἐκ τῶν [παραλλήλων] τριγωνων συνέστηκεν). Međutim, to predstavlja izravno kršenje Zenonova aksioma za koji sam gore pokazao da ga je Arhimed ugradio u vlastiti aksiom. Pojedini su tumači ovu teškoću pokušali otkloniti tvrdnjom da linije o kojima Arhimed govori *ad loc.* zapravo nisu jednodimenzionalne, nego da je riječ o infinitezimalnim plohama, te da ta mjesta samo pokazuju kako je Arhimed već imao na umu nešto nalik integriranju u suvremenoj matematičkoj analizi (usp. Tannery 1887; Heath 1923; Ruffini 1927; Lurie 1945; Mau 1954; v. i Heath 1897/2010). Međutim, to bi pak predstavljalo izravno kršenje Arhimedova vlastitoga aksioma koji, kako je to formulirao Veronese, „isključuje infinitezimale *a priori*“. V. Popović 2016, §2.1 za rekonstrukciju i jedno moguće čitanje *Metode*. Usp. i Netz, Saito & Tschernetska 2001 i 2002 o zanimljivom otkriću u vezi s M.14.

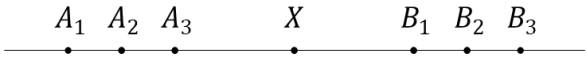
[369] $\mathcal{B}$ je ternarna ili troelementna relacija „biti između“ definirana nad skupom S koji nazivamo prostorom, a čije elemente $A, B, C, \dots$ nazivamo točkama. $\mathcal{B}(A, B, C)$ znači da se tačka B nalazi između tačaka A i C. Simbol $\cong$ označava relaciju podudarnosti (ekvidistancije ili kongruencije) između uređenih parova tačaka. Ponekada se označuje i slovom $\mathcal{C}$, gde $\mathcal{C}(A, B, C, D)$ tvrdi isto što i $(A, B) \cong (C, D)$, naime da je uređen par točaka (A, B) podudaran s uređenim parom tačaka (C, D).



Sl. 22. Vizualni prikaz Arhimedova aksioma

Kao što sam već istaknuo u uvodu, Arhimedov aksiom ponekad se naziva i „neprekidnošću u velikom" ili aksiomom dostizanja (prestizanja). Hilbert je u *Grundlagen* Arhimedovu aksiomu pridodao i takozvani aksiom linearne potpunosti (*Vollständigkeitsaxiom*), koji je, kao što smo vidjeli (nap. 366), primijenio i u aksiomatizaciji realnih brojeva iz 1900. godine (usp. Hilbert 1900a, § IV). Taj Hilbertov aksiom (izostavljen iz kasnijih izdanja *Grundlagen*) ekvivalentan je *Cantorovu aksiomu neprekidnosti*:

[**C**] Ako je $(A_1B_1), (A_2B_2), \ldots, (A_nB_n), \ldots$ beskonačan niz dužina na nekom zadanom pravcu (v. *Sl. 23*) takav da svaka dužina tog niza sadrži sljedeću, te ako ne postoji dužina koja je sadržana u svim dužinama tog niza, tada postoji točka X koja pripada svakoj dužini tog niza.



Sl. 23. Vizualni prikaz Cantorova aksioma neprekidnosti

Drugim riječima, svaki niz zatvorenih ugniježđenih zatvorenih intervala ima neprazan presjek.[370] Cantorov aksiom naziva se još i „neprekidnošću u malom". Kao što se može vidjeti, Cantorov aksiom jamči da je pravac gusto „ispunjen" točkama. Aksiomi [**A**] i [**C**] zajedno su ekvivalentni Dedekindovu aksiomu s kojim smo se već susreli u Odeljku [2.6]:

[**D**] Ako su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ dva neprazna skupa točaka nekoga usmjerenog (orijentiranog) pravca p takva da za proizvoljnu točku $P \in \mathcal{M}$ i proizvoljnu točku $Q \in \mathcal{N}$ vrijedi da točka P prethodi točki Q, odnosno da se nalazi ispred nje, $P \prec Q$, tada na pravcu p postoji točka X takva da za svaku točku $P \in \mathcal{M} \setminus \{X\}$ i $Q \in \mathcal{N} \setminus \{X\}$ vrijedi relacija $P \prec X \prec Q$.[371]

---

[370] Aksiom [**C**] u literaturi se češće pojavljuje upravo u ovoj formulaciji, i to pod nazivom *Cantorov teorem o presjeku* ili *Cantorov princip ugniježđenih* ili *umetnutih intervala* (dužina, odsječaka). Ako su $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, odsječci realnoga pravca i ako vrijedi $(\forall n \in \mathbb{N})[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, onda niz (I_n) nazivamo *nizom ugniježđenih odsječaka*. Aksiom [**C**] tada možemo formulirati i ovako:

[**C'**] Svaki niz (I_n) ugniježđenih odsječaka na realnom pravcu $\mathbb{R}$ ima neprazan presjek, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Aksiom [**C'**] može se dati i u preciziranom obliku, poznatijem pod nazivom *Cauchy-Cantorov teorem*:

[$\mathbf{T}_\mathbf{C}$] Ako niz (I_n) ugniježđenih odsječaka na $\mathbb{R}$ ima svojstvo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je duljina $|I_n| = b_n - a_n$ odsječka I_n manja od ε, tada je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ jednočlan, odnosno postoji točno jedan $x \in \mathbb{R}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Naravno, i dalje vrijedi [**A**] ∧ [**C**′] ⇔ [**D**] ⇔ [**R**], kao i [**A**] ∧ [$\mathbf{T}_\mathbf{C}$] ⇔ [**D**] ⇔ [**R**]. Aksiom [**C**] (odnosno [**C'**]) ekvivalentan je aksiomu [**TC**] u arhimedovskim uređenim poljima. Međutim, u slučaju nearhimedovskih polja, poput primjerice Levi-Civitina polja $\mathcal{R}$, to više ne vrijedi. Drugim riječima, u uređenom polju Laurentovih redova aksiom [$\boldsymbol{C}$]([**C**′]) ⇏ [**Tc**], nego vrijedi [$\boldsymbol{C}$]([**C**′]) ⇒ [**Tc**], dok je [**Tc**] ⇔ [$\boldsymbol{C}$] (usp. Laugwitz 1968).

[371] Dedekindov aksiom može se formulirati i ovako (Šikić 2023: 9):

Prema tome, budući da vrijedi $[\mathbf{A}] \wedge [\mathbf{C}] \Leftrightarrow [\mathbf{D}]$, Arhimedov i Cantorov aksiom posljedice su Dedekindova aksioma. Dedekindov je aksiom, pak, ekvivalentan takozvanomu *aksiomu potpunosti* koji vrijedi za realne brojeve, a koji se može formulirati ovako:

[**R**] Ako su A i B neprazni podskupovi skupa $\mathbb{R}$ realnih brojeva takvi da je $x \leq y$ za sve $x \in A, y \in B$, tada postoji element $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$ za sve $x \in A, y \in B$.

Struktura poput uređenoga polja realnih brojeva $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle$ koja zadovoljava [**A**] naziva se, kao što smo već rekli, arhimedovskom, a ako zadovoljava i [**A**] i [**C**] (što je ekvivalentno zadovoljavanju [**D**] odnosno [**R**]), nazivamo je *Dedekind-potpunom* ili jednostavno *potpunom*. Cantorov aksiom može se zamijeniti i *Cauchyjevim aksiomom*:

[$\mathcal{C}$] Svaki Cauchyjev niz konvergira u $\mathbb{R}$.[372]

Naravno, i ovdje vrijedi $[\mathbf{A}] \wedge [\mathcal{C}] \Leftrightarrow [\mathbf{D}] \Leftrightarrow [\mathbf{R}]$. Pri aksiomatizaciji strukture $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle$ možemo upotrijebiti bilo koju od ekvivalentnih alternativnih formulacija aksioma neprekidnosti. Jedan od najranijih obuhvatnih pregleda ekvivalentnih oblika aksioma neprekidnosti dao je A. N. Kolmogorov (Андрей Николаевич Колмогоров, 1903–1987) u predavanjima iz *Analize III*, koja je držao u Moskvi tijekom 1954. godine, a koja su bila posvećena aksiomatskom izlaganju teorije realnih brojeva (Tikhomirov 2014: 152–154; usp. Sinkevich 2017: 38 i Sinkevich 2016: 9–10). Kao što je poznato iz klasične analize, aksiomi [**R**] i [**D**] ekvivalentni su sljedećim trima teoremima:

[$\mathbf{T}_{\text{SUP}}$] (Teorem o supremumu) Svaki neprazan, odozgo omeđen podskup skupa $\mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$.

[$\mathbf{T}_{\text{INf}}$] (Teorem o infimumu) Svaki neprazan, odozdo omeđen podskup skupa $\mathbb{R}$ ima infimum u $\mathbb{R}$.[373]

[**D'**] Rez je par (D, L) za koji vrijedi $D \cup L = \mathbb{R}$, $D \neq 0 \neq L$ i $D < L$. Međom ili granicom reza (D, L) nazivamo element $c \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $(\forall l \in L)(\forall d \in D)(l \leq c \leq d)$. Rez u $\mathbb{R}$ koji nema međe naziva se *rupom* ili *prorezom* u $\mathbb{R}$.

Ukratko, aksiom [**D'**] kaže da u $\mathbb{R}$ nema rupa (usp. Odeljak [2.6]).

[372] Niz realnih brojeva (a_n) nazivamo *Cauchyjevim nizom* ili *fundamentalnim nizom* ako za svaki postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je apsolutna razlika bilo koja dva člana niza $|a_m - a_n| < \varepsilon$ čim su indeksi m i n veći od n_0. Dakle, niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest Cauchyjev niz AKKO vrijedi $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon)$. Intuitivno govoreći, niz (a_n) jest Cauchyjev ako su njegovi članovi s dovoljno velikim indeksima proizvoljno blizu jedan drugomu. U skupu $\mathbb{R}$ pojmovi konvergentnoga i Cauchyjeva niza ekvivalentni su (neki niz konvergira ako i samo ako je Cauchyjev).

[373] Kažemo da je neki podskup skupa realnih brojeva $S \subset \mathbb{R}$ *odozgo omeđen* ako postoji realan broj $M \in S$ takav da je $x \leq M$ za svako $x \in S$. Svaki takav broj M nazivamo *majorantom* ili *gornjom međom* skupa S. Analogno, kažemo da je da je neki podskup skupa realnih brojeva $S \subset \mathbb{R}$ *odozdo omeđen* ako postoji realan broj $m \in S$ takav da je $x \geq m$ za svako $x \in S$. Svaki takav broj m nazivamo *minorantom* ili *donjom međom* skupa S. Najmanja majoranta skupa S naziva se *supremum* ($\sup S$), a najveća minoranta *infimum* ($\inf S$). Ako je $\sup S \in S$, nazivamo ga *maksimalnim elementom* skupa S ($\max S$); obratno, ako $\inf S \in S$, nazivamo ga *minimalnim elementom* skupa S ($\min S$). Ako je skup $S \subset \mathbb{R}$ omeđen i odozgo i odozdo, onda se kaže da je omeđen.

[**B**-**W**] (Bolzano-Weierstraßov teorem) Svaki beskonačan omeđen podskup skupa realnih brojeva $A \subset \mathbb{R}$ ima barem jednu točku gomilanja (gomilište) u $\mathbb{R}$.[374]

Kolmogorov je [$\mathbf{T}_{\mathbf{sup}}$] i [$\mathbf{T}_{\mathbf{inf}}$] nazivao *Bolzanovim aksiomom o supremumu* (*infimumu*), dok je [**B**-**W**] formulirao u obliku Weierstraßova aksioma o konvergentnim podnizovima:

[**W**] Svaki omeđen niz ima konvergentni podniz (ili: iz svakoga omeđenog niza realnih brojeva može se izdvojiti konvergentan podniz) (usp. Tichomirov 2014: 152, v. tačku D).[375]

Naposlijetku, Kolmogorov navodi i Bolzanov aksiom o monotonim nizovima:

[**B**] Svaki omeđen monotono rastući (opadajući) niz realnih brojeva ima limes (Tichomirov 2014: 152, v. tačku E).[376]

Postoji još mnogo aksioma koje bismo mogli navesti kao alternativne ekvivalentne formulacije aksioma [**R**], odnosno [**D**] (Jordanov aksiom, Marsden-Weinsteinov aksiom, Stevinovi aksiomi, Khintchinov aksiom, Henleov aksiom, Hölderov aksiom, Leibnizov aksiom, itd.), no to za naše potrebe u nastavku izlaganja neće biti nužno. Poanta koju tijekom analize i rekonstrukcije kako arhimedovskih tako i nearhimedovskih teorija veličina iz razdoblja *fin-de-siècle* valja stalno imati na umu jest da pojam neprekidnosti, koji je predstavljao okosnicu matematičko-filozofskih rasprava o kontinuumu i statusu beskonačnosti, ni u jednom trenutku nije bio monolitan. Naprotiv, prije je riječ o *obitelji* (u Wittgensteinovu smislu) više ili manje srodnih pojmova artikuliranih u često posve različitim kontekstima – od geometrije preko algebre i teorije brojeva do teorije skupova. Drugim riječima,

> „ne postoji jedinstveni pojam neprekidnosti, nego radije nekoliko međusobno povezanih pojmova. […] Nijedna od brojnih matematičkih koncepcija

---

[374] Za neku točku $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (gde je $\overline{\mathbb{R}}$ takozvani *proširen skup realnih brojeva*, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) kažemo da je *točka gomilanja* (*gomilište*) skupa $A \subset \mathbb{R}$ ako u svakoj okolini točke a postoji beskonačno mnogo točaka skupa A ili, ekvivalentno, ako u svakoj okolini točke a postoji bar jedna točka skupa A različita od a. Primjetimo da se aksiom [**W**] lako može prevesti i u oblik za nizove:

[**W'**] Svaki omeđen niz realnih brojeva ima bar jednu točku gomilanja u $\mathbb{R}$.

[375] Pod *nizom* elemenata skupa A podrazumijevamo svaku funkciju $a: \mathbb{N} \to A$, pri čemu se vrijednost funkcije a u točki $n \in \mathbb{N}$ označuje sa a_n i naziva n-tim članom niza, dok se sam niz, kao što smo već vidjeli u nap. 372, označuje s (a_n), $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Pojmovi *konvergencije* i *divergencije* određuju se preko pojma *granične vrijednosti* ili *limesa* niza. Za točku $a \in \overline{\mathbb{R}}$ kažemo da je limes niza (a_n) realnih brojeva, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ako za svaku okolinu U točke a postoji prirodan broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $a_n \in U$ za sve prirodne brojeve n veće od n_0:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow (\forall U)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n \in U).$$

Tada kažemo da niz (a_n) teži prema a kada n teži u beskonačnost, $(a_n) \to a (n \to \infty)$. Ako je a konačan broj, niz (a_n) je *konvergentan*, a ako je $a = \pm\infty$ ili kada limes ne postoji, niz (a_n) je *divergentan*. Ako niz ima limes, on je jednoznačno određen. Također, svaki konvergentan niz je omeđen.

[376] Za niz realnih brojeva (a_n) kaže se da je *rastući* (*opadajući*) ako vrijedi $a_n \leq a_{n+1}$ (odnosno $a_n \geq a_{n+1}$) za svaki $n \in \mathbb{N}$, a da je *strogo rastući* (*strogo opadajući*) ako vrijedi $a_n < a_{n+1}$ (odnosno $a_n > a_{n+1}$) za svaki $n \in \mathbb{N}$. Takvi nizovi nazivaju se *monotonim nizovima*. Ako je $n: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastući niz prirodnih brojevna, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, i ako je $a: \mathbb{N} \to A$ niz elemenata skupa A, onda za kompoziciju funkcija a i n odnosno niz $a \circ n: \mathbb{N} \to A$ s članovima $a_{n_k} (k = 1,2, \dots)$ kažemo da je *podniz* niza (a_n).

neprekidnosti ne može se jednoznačno izdvojiti kao 'ona prava'." (Feferman 2009b: 189–190)[377]

Cantorovo neuviđanje te činjenice ili, bolje rečeno, njegovo odbijanje da je uopće prizna kao činjenicu, raspirilo je, kao što ćemo vidjeti u trećem dijelu disertacije, njegov sukob s Veroneseom, iz kojega je, s obzirom na potonji *Nachleben*, Veronese nažalost izašao kao gubitnik. Prije nego što pristupimo povijesti recepcije Veroneseove teorije i detaljnoj analizi njegova sukoba s antiinfinitezimalistima, pogledajmo kako su izgledale Veroneseove aksiomatizacije geometrije u *Fondamenti* i *Elementi*.[378]

[2.7] Komparativni prikaz aksiomatizacije geometrije iz *Fondamenti* (1891) i iz *Elementi* (1897)

Iako su se matematičari koji su krajem 19. i početkom 20. stoljeća radili na aksiomatskom zasnivanju geometrije često pozivali na Veroneseove aksiomatizacije (elementarne) geometrije, kako iz *Fondamenti* tako i iz *Elementi*[379], suvremeni povjesničari geometrije u pravilu nisu pokazivali osobit interes za rekonstrukciju i makar djelomičan pokušaj izlaganja Veroneseova pristupa aksiomatici. Koliko sam uspio ustanoviti na temelju pomnog pregleda praktički cjelokupne sekundarne literature o Veroneseu (na talijanskom, njemačkom, francuskom i engleskom jeziku), jedinu iznimku predstavlja već spomenuta habilitacija W. S. Controa iz 1968. godine. Budući da nikada nije bila objavljena te da njezin jedini primjerak postoji u obliku danas već znatno izblijedjeloga strojopisnog rukopisa, ona, nažalost, nije mogla ostvariti nikakav utjecaj na kasnije autore koji su se bavili poviješću zasnivanja geometrije. U ovom će mi odjeljku kao polazište poslužiti izvodi i napomene iz

[377] Također v. i tematski broj časopisa *Intellectica*, № 51 (2009/1), „The Mathematical Continuum. New Conceptions, New Challenges" (Michel de Glas, Ed.). Sličan stav zastupa i McCarty: „Ne postoji nešto poput *jedinstvenoga kontinuuma* (*the continuum*). U stvarnosti postoji samo mnoštvo kontinuiranih fenomena, bez ikakve jedinstvene, jasno razlučive analitičke podstrukture koja bi istodobno bila zajednička i ekskluzivna svim [tim fenomenima]." (McCarty 2021: 283; v. i str. 285–286)

[378] Većina onoga što je izloženo u ovom odjeljku danas je općepoznato i može se pronaći u svakom boljem sveučilišnom udžbeniku matematičke analize. Pri pisanju sam konzultirao Enriques 1911, §13 („Continuité et postulat d'Archimède"), str. 34–40, Adnađević & Kadelburg 2012, Mijajlović *et al.* 2014, kao i bilješke s predavanja „Wignerov problem i realni brojevi", koje je prof. Zvonimir Šikić održao na Seminaru za povijest i filozofiju matematike, mehanike i astronomije Matematičkog instituta SANU u Beogradu 17. listopada 2023. godine (usp. Šikić 2023). Ovom prilikom zahvaljujem prof. Šikiću što mi ih je stavio na raspolaganje. Usp. i Stanković 2012.

[379] Kada je riječ o recepciji Veroneseovih ideja unutar Talijanske škole, u njihovu se razvoju osobito isticao Mario Pieri. Primjerice, na *Fondamenti* i *Elementi* upućuje već u svojim ranim radovima, poput „Un sistema di postulati per la geometria projettiva astratta degli iperspazî" (1896) i „I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo" (1898), a zatim i u nizu drugih važnih publikacija, osobito u „Monografia del punto e del moto" iz 1900., kao i u predavanju „Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique", održanom iste godine na Međunarodnom filozofskom kongresu u Parizu (objavljeno 1901.). S druge strane, Veroneseovi su radovi naišli na vrlo dobar prijam i u okviru takozvane Američke postulacijske škole (*The Postulational School*), osobito u radovima E. H. Moorea (1862–1932) i Oswalda Veblena (1880–1960). Usp. Mooreove „Tactical Memoranda I–III" (Moore 1896), Veblenov rad „A System of Axioms for Geometry" (Veblen 1904) te Veblenovu bilježnicu s Mooreovih predavanja o osnovama geometrije na Sveučilištu u Chicagu iz jesenskoga semestra 1901. godine (usp. Despeaux *et al.* 2022, *Oberwolfach Report* 56/2022). Za više pojedinosti v. Odjeljak [3].

trećega poglavlja Controve studije (Kapitel III, prikladno naslovljen „Veronese“), osobito iz § 3. „Die Geometrie der *Fondamenti*“ te iz Apendiksa (*Anhang*) „Die *Elementi di geometria*“, koje ću, međutim, kontrolirati i korigirati prema izvorniku, odnosno prema tekstovima Veroneseovih *Fondamenti* i *Elementi*.

I u *Fondamenti* i u *Elementi* Veroneseove aksiomatizacije predstavljaju kombinaciju aksioma, hipoteza i definicija koje zadovoljavaju kriterije (i)–(vi), eksplicitno izložene, i to po prvi put, u predgovoru *Fondamenti*. Iako su obje knjige bile zamišljene kao udžbenici[380], ipak je riječ o bitno različitim publikacijama, osobito s obzirom na razinu i stupanj predznanja intendirane publike te njihove osnovne ciljeve, zbog čega se u konačnici znatno razlikuju i metodologija i način izlaganja u *Fondamenti* i u *Elementi*. Tretman osnova geometrije u *Fondamenti* od *ab initio* je koncipiran na najopćenitiji mogući način te je znatno složeniji utoliko što Veronese ondje nije zainteresiran samo za proučavanje elementarne geometrije nego ponajprije *apsolutne geometrije* (usp. *Fondamenti*, str. xxx). Nasuprot tomu, izlaganje u *Elementi* ograničeno je unaprijed zacrtanim pedagoškim te metodičko-didaktičkim ciljevima[381], što je rezultiralo u osnovi jednostavnijim i preglednijim prikazom ili, kako je istaknuo Contro, „neposrednom i najtransparentnijom mogućom izgradnjom elementarne geometrije“.[382] Preciznije, izvorna aksiomatizacija iz *Fondamenti* je u *Elementi* izmijenjena na sljedeći način:

1) Aksiomi neprekidnosti zbog zasnivanja nearhimedovske geometrije u *Fondamenti* imaju središnju ulogu te od samoga početka zauzimaju istaknuto mjesto u aksiomatici, počevši od predgovora, a osobito u iznimno važnim poglavljima IV, V i VI uvoda[383] (usp. §§ IV.1–VI.13). U *Elementi* je Veronese, „iz didaktičkih razloga“ (*per ragioni didattiche*), preradio i pojednostavio prvi dio *Fondamenti* kako bi ga učinio pristupačnijim učenicima (*ho rifatta e semplificata questa prima parte allo scopo di renderla sempre più accessibile alla scolaresca*). Rektimetrija, odnosno aksiomatska teorija pravca kao temeljnoga geometrijskog objekta (*la retta* […] *come la figura fondamentale*; u *Fondamenti* Veronese rabi izraz *forma fondamentale*, odnosno *Grundform*), sada je podijeljena na dva dijela. Pritom se onaj dio koji je u *Fondamenti* bio od presudne važnosti – rasprava o Arhimedovu i drugim aksiomima neprekidnosti – u *Elementi* pojavljuje tek u petoj knjizi (usp. §1, „Continuità

[380] Već smo vidjeli da su *Fondamenti* bili namijenjeni razini magistarskoga studija (usp. nap. 135 *supra*), dok su *Elementi* bili napisani za uporabu u gimnazijama i srednjim tehničkim školama (*ad uso dei licei e degli istituti tecnici*).

[381] U *Appendice agli Elementi di geometria* (1898a) Veronese otkriva da su *Elementi* bili zamišljeni kao eksperimentalni udžbenik te da su rezultati njihova ispitivanja u pojedinim gimnazijama i tehničkim školama bili „vrlo zadovoljavajući“. Na temelju tih iskustava napisao je *Appendice* kao svojevrstan priručnik za nastavnike s ciljem „da dopuni pojedine pojmove iz [osnovnoga] teksta [sc. *Elementi*], da pokaže zbog čega su postulati izvorno uvedeni iz didaktičkih razloga zapravo nužni te, naposljetku, da razjasni narav i funkciju pojedinih postulata“ (*di completare per gli insegnanti e per gli altri studiosi alcuni concetti del testo, di dimostrare i postulati ammessi per ragioni didattiche in più del necessario e infine di mettere in chiaro il carattere e l'ufficio dei singoli postulati*). Dodaje i da *Appendice* može poslužiti nastavnicima koji, uz redovitu nastavu geometrije, žele „iznijeti i neka općenitija zapažanja o njezinim osnovnim pojmovima“ (*fare alcune osservazioni generali intorno ai concetti fondamentali*) (Veronese 1898a: vii).

[382] „In den *Elementi* hingegen wollte Veronese die Elementargeometrie direkt und in möglichst durchsichtiger Weise aufbauen, wie es dem Charakter des Werkes als Schulbuch entsprach.“ (Contro 1968, ¶3.17, str. 92) V. prethodne dvije napomene.

[383] Riječ je o poglavljima koja zauzimaju najveći dio ionako vrlo opsežnoga uvoda u *Fondamenti*, naslovljenima redom „Dei sistemi di elementi e in particolare di quelli ad una dimensione“ (str. 45–61), „Della forma fondamentale“ (str. 62–83) i „Segmenti finiti, infiniti, infinitesimi, indefinitamente piccoli e indefinitamente grandi – Numeri infiniti“ (str. 84–176)

della retta", str. 203 ff.), i to praktički kao dodatak. V. predgovor (upućen *ai signori professori*) u Veronese 1897: vi.

2) U vezi s (1), prirodno je i očekivano da u *Elementi* potpuno izostaje svaka rasprava o infinitezimalima ili o aktualnoj beskonačnosti, kao i svako pozivanje na njih, premda se u *Fondamenti* pojavljuju već u hipotezama i takozvanim praktičnim aksiomima (usp. *Fondamenti*, Lib. I, Cap. I, „La retta e le figure rettilinee in generale – Assiomi e ipotesi", §15, gdje Veronese uvodi Euklidov peti postulat kao prvi praktični aksiom).

3) Općenito uzevši, vrlo opsežne i detaljne logičko-filozofske te povijesno-matematičke napomene koje prate Veroneseovu izvornu analizu temeljnih matematičkih pojmova i načela na kojima počivaju „apstraktne matematičke forme" (*principi fondamentali delle forme matematiche astratte*; usp. *Fondamenti*, Introduzione, osobito Cap. I–II), u *Elementi* su znatno skraćene i pojednostavljene. Zapravo se može reći da se iole podrobniji popratni komentar, usporediv s onim u *Fondamenti*, nalazi tek u *Appendice agli Elementi* (1898a).

Kada je riječ o *Elementi*, osnovni odnosno opći logički pojmovi, relacije i operacije (Veronese ih u *Fondamenti*, *Intr.*, Cap. I naziva *nozioni e operazioni comuni*, a u *Elementi nozioni generali*) jesu *element*, *neuređeni skup* (ono što Veronese naziva *gruppo*), *parcijalno uređen skup* (ono što Veronese naziva *gruppo ordinato* ili *serie*), *relacije pripadnosti* i *sadržanosti* odnosno *uključenosti* (koje bismo danas označili simbolima $\in$ odnosno $\subset$), te skupovna korespondencija odnosno *izomorfizam*, koji Veronese naziva *corrispondenza univoca e del medesimo ordine*. Taj se pojam svodi na sljedeće: ako su dvije grupe odnosno dva skupa $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ uređeni tako da nekom elementu A koji prethodi ili slijedije za elementom B u skupu $\mathcal{P}_1$, odgovara element A' koji prethodi ili slijeduje za elementom B' (koji odgovara elementu B) u skupu $\mathcal{P}_2$, tada se kaže da je korespondencija odnosno preslikavanje između $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ bijektivno (1-1 i „na") i invertibilno, što znači da su $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ sa strukturnoga gledišta nerazlučivi (usp. Veronese 1897: 3). Veronese, naravno, ne rabi suvremene pojmove bijekcija i inverzija, ali je očito da upravo na njih misli. Tako u definiciji izomorfizma iz *Fondamenti* (Introduzione, Cap. II, §4, str. 20)[384] govori o korespondenciji koja je *univoca e reciproca*, što je u biti isto. Popis osnovnih logičkih pojmova, relacija i operacija u *Fondamenti* opsežniji je i složeniji, ponajprije zato što je Veronese u uvodnome dijelu knjige odlučio uključiti *prazan skup* (koji naziva „nultom grupom", *gruppo nullo*), *relaciju jednakosti*, skupovnoteorijske operacije poput *unije* i *presjeka* te operaciju *dekompozicije* odnosno *faktorizacije* (*operazione dello scomporre*), koja je, za razliku od presjeka kao duala uniji, definirana kao inverzna operacija uniji (Intr., Cap. I, §8, DEF. 30a). Još jedna razlika u odnosu na *Elementi* sastoji se u tome što je Veronese u *Fondamenti* nastojao prethodno opisani logički aparat izložiti aksiomatski, posredstvom odgovarajućih *assiomi logici*. Nadalje, u uvodu *Fondamenti* nalazi se i svojevrstan pokušaj definiranja, a potom i aksiomatske karakterizacije *prirodnih brojeva* (Cap. III, §§1–4), zatim *pozitivnih i negativnih cijelih* te *realnih brojeva* (Cap. VIII, §§1–4), kao i *transfinitnih* odnosno *beskonačnih*, ali i *infinitezimalnih brojeva* (Cap. VI, §§1–13).

[384] Kako ne bi bilo zabune, u *Fondamenti* (*ad loc. cit.*) nalazi se tiskarska pogreška. Naime, premda bi odjeljak naslovljen „Corrispondenza univoca e nel medesimo ordine fra più gruppi" trebao biti označen kao §4, na str. 20 pogreškom je označen kao §5. Zapravo je pogrešno numerirano čitavo drugo poglavlje uvoda, budući da su odjeljci redom označeni kao §§1, 2, 4 i 5 (*sic!*)

Kada je pak riječ o osnovnim odnosno primitivnim geometrijskim pojmovima, Veronese polazi od *točke*, *pravca* (*la retta*, definirana kao linearno uređena grupa odnosno skup točaka) i relacije *kongruencije* odnosno *podudarnosti* (između linearnih segmenata odnosno dužina), koja – *nota bene* – za razliku od *Fondamenti*, više nema karakter logičke relacije, budući da je Veronese u *Elementi* više ne zasniva na relaciji jednakosti, što, kako ispravno primjećuje Contro, znatno pojednostavnjuje konceptualni okvir (usp. Contro 1968: 92). Tako Veronese, nakon nekoliko preliminarnih napomena o osnovnim geometrijskim objektima, odmah pristupa aksiomatskoj karakterizaciji njihovih relevantnih svojstava, dok, usporedbe radi, u *Fondamenti* aksiomatizacija započinje tek nakon više od dvjesto stranica „uvodne" analize fundamentalne forme, pa se prva definicija i prvi aksiom pojavljuju tek u prvoj knjizi *Fondamenti* (Cap. I, §1), i to na stranici 210! Za usporedbu, Hilbertove *Grundlagen der Geometrie* (1899) imaju manje od stotinu stranica, a cjelokupna je aksiomatizacija (po skupinama aksioma) izložena već na prvih petnaest stranica (usp. Hilbert 1899, Kap. I, „Die fünf Axiomgruppen").[385] Controv komentar te nepovoljne okolnosti zavrjeđuje da bude citiran:

> „Budući da je Veroneseova aksiomatizacija [iz *Fondamenti*] u biti zasnovana na njegovoj analizi kontinuuma, sve slabosti koje su eventualno inherentne toj analizi neminovno su morale biti prenesene i na samu aksiomatizaciju. Posljedično, ne iznenađuje što je geometrijski dio *Fondamenti* uglavnom nailazio na odbacivanje i nerazumijevanje (*Ablehnung und Unverständnis*), a čak i kada bi mu bio priznat značaj, često je bio tretiran prije kao kuriozitet nego kao ozbiljna teorija (*als Kuriosum denn als ernstzunehmende Theorie*). No, *želimo li donijeti pošten sud o vrijednosti Veroneseovih istraživanja*, *ne smijemo dopustiti da nas obeshrabre poteškoće koje njegova knjiga nesumnjivo postavlja*, *nego se*, *naprotiv*, *moramo potruditi izdvojiti matematički značajnu jezgru iz okolnoga popratnog materijala* (*sondern man muß vielmehr versuchen, den mathematisch bedeutsamen Kern aus dem ihn umgebenden Beiwerk herauszuschälen*)." (Contro, *op. cit.*, ¶3.15, moj kurziv)

U potpunosti se slažem s Controvom metodološkom napomenom o pretpostavkama adekvatne kritičke evaluacije Veroneseova geometrijskog opusa. Štoviše, ona je u potpunosti u skladu i s Veroneseovim interpretativnim preskriptima iz apendiksa *Fondamenti*, s kojima smo se već susreli u Odjeljku [1.1]. Na *Sl. 24a–b* (*infra*) reproducirane su prve dvije stranice prve knjige *Fondamenti*, reprezentativne i za ostatak Veroneseove aksiomatizacije. Ono što na njima možemo uočiti jest da izlaganje započinje takozvanim *empirijskim zapažanjima* (*osservazioni empiriche*), nakon kojih slijede *definicije* o kojima Veronese najčešće iznosi daljnja empirijska zapažanja. Tek nakon toga Veronese napokon formulira *aksiome*, pri čemu i njih zatim propraćuje odgovarajućim empirijskim zapažanjima.

[385] Na ovu ćemo se okolnost vratiti prilikom evaluacije povijesti recepcije *Fondamenti* u svjetlu takozvane Poincaréove dvostruke pogreške u Odjeljku [3.2].

LIBRO I.

LA RETTA E LE FIGURE RETTILINEE IN GENERALE.

CAPITOLO I.

La retta e le figure rettilinee in generale. Assiomi e ipotesi.

---

§ 1.

Punto — Assioma I — Figura — Spazio generale — Geometria. Sistemi di punti ad una dimensione.

1. *Oss. emp.* [1]) Alla presenza dei corpi fuori di noi, che ci appariscono per mezzo dei sensi, specialmente per mezzo della vista e del tatto, è collegata l'idea di ciò che li contiene, e, si chiama *ambiente esterno* o *spazio intuitivo*, nel quale i corpi occupano ciascuno un determinato *posto* o *luogo*. Se osserviamo un corpo, esso occupa un determinato luogo; ma spostandosi il corpo, e fissando colla mente il luogo da esso occupatò nel primo momento intuiamo che questo luogo esiste da sè indipendentemente dal corpo. Anche se un corpo non si muove, ad es. il libro che ho sul tavolo, io posso fare astrazione da esso, e pensare al posto che occupa.

Apparentemente questo luogo riempito prima dal corpo in movimento, o dal corpo in quiete ma del quale facciamo astrazione, è evidentemente *vuoto*, vale a dire non lo vediamo, o non lo immaginiamo, occupato da altri corpi. Da ciò non consegue punto che esista effettivamente il *vuoto assoluto*, vale a dire un ambiente che non sia riempito da alcun corpo; ma se noi pensiamo che un grave muovendosi (e per questo possiamo pensare anche ad un punto materiale (corpuscolo)), il luogo in cui giace in un dato momento non venga riempito dalla materia circostante, noi abbiamo la nozione astratta del vuoto assoluto. Ed essendo il vuoto ciò che astrattamente era o può essere occupato da un corpo *non é il nulla*. È coll'idea del vuoto abbiamo anche l'idea dell'*immobilità* del vuoto stesso o dello spazio intuitivo.

Il concetto (int. 4) dell'elemento fondamentale della scienza di cui vogliamo ora dare i principî (int. def. I, 57), col quale cioè riteniamo determinate le forme (oggetti) dei nostri studî (int. def. IV, 57), ci viene fornito da oggetti effettivamente esi-

---

1) Delle considerazioni empiriche che ci servono per stabilire gli assiomi non teniamo alcun conto nell'enunciato delle proprietà e nelle dimostrazioni geometriche, facendo uso soltanto dei risultati che indipendentemente da esse stabiliamo negli assiomi.

Sl. 24a. Faksimil str. 209 Veroneseovih *Fondamenti di geometria* (Veronese 1891: 209)

stenti fuori di noi nel mondo esterno, ad es. dall'estremità di un filo o da un'estremità dell'oggetto della fig. 1. Facendo astrazione dalle sue qualità fisiche, l'estremità del filo, o ciò che segna la separazione di due delle sue parti consecutive, risveglia in noi l'idea di ciò che considereremo quale elemento fondamentale, ossia del punto [1]).

Altri oggetti, come il segno tracciato sul foglio dalla punta finissima di una matita risvegliano o producono in noi lo stesso concetto, la qual cosa dimostra che il punto è indipendente dalla materia dell'oggetto che ce lo fornisce, imperocchè l'intuizione del punto non si riferisce tanto all'oggetto quanto al posto che esso occupa nell'ambiente che ci circonda.

Def. I. L'elemento fondamentale (int. def. I, 57) del quale si compongono le forme (int. def. IV, 57) è dato dalla rappresentazione particolare summentovata, e si chiama *punto* [2]) I).

Oss. emp. II. L'identità dei punti è manifesta per l'intuizione del punto (int. def. VI, 8), e quindi dobbiamo stabilire il seguente assioma:

Ass. I. **Esistono punti distinti — Tutti i punti sono identici** (int. def. III e oss. III, 9; def. II, III e oss. II, 57) [3]).

Oss. I. Indipendentemente dall'intuizione o in senso puramente astratto questo assioma significa che tutti gli elementi fondamentali a cui si dà il nome di punto sono identici; esso ci dà dunque una proprietà astratta indipendente dall'intuizione del punto.

2. *Oss. I.* Ripeteremo qui alcune definizioni già stabilite nell'introduzione per i sistemi di elementi, considerando come elemento il punto, senza occuparci momentaneamente della loro esistenza, la quale deve essere data o dedotta dagli assiomi che stabiliremo in appresso.

---

1) Vedi anche int. 55. Adoperando il verbo risvegliare non intendo dire che risieda in noi *a priori* l'idea del punto, chè di tale questione il matematico non si occupa (vedi pref.), ma intendo dire che questa idea è una di quelle che si formano o si svolgono in noi gradatamente senza che ce ne accorgiamo, e che quando cominciamo a studiare geometria questa idea, come quella della retta e di altre semplici figure, l'abbiamo già in noi bella e formata.

2) Questa è una definizione puramente nominale, non intendiamo con essa di definire le proprietà del punto ma di riferirci alla rappresentazione spiegata nell'oss. emp. I o nel n. 55 dell'introduzione.

I) Nelle note segnate con numeri romani, come abbiamo avvertito nella prefazione trattiamo della geometria nel campo di una sola unità come avviene comunemente, sia per scopo didattico come per mostrare che si possono seguire gli stessi principî indipendentemente dalle nostre ipotesi astratte sull'infinito e infinitesimo, ma nello stesso tempo per far conoscere anche l'utilità di queste ipotesi nello studio delle proprietà del campo finito stesso (vedi pref.). Non facendo uso dell'introduzione la def. di punto può essere data dunque come oggetto del quale si compongono tutti gli altri oggetti che noi consideriamo, o meglio come oggetto dato dalla rappresentazione suddetta. In un trattato elementare pei licei bisogna evitare le discussioni critiche, come ad es. l'oss. I. Ciò valga per tutte le altre note. Così bisogna supporre alcune cose conosciute, ad es. le proprietà principali dei numeri interi.

Per la def. del punto come per stabilire gli assiomi è utile ricorrere anche in un trattato elementare a considerazioni empiriche.

Osservo che in queste note intendo solo di mostrare la possibilità di seguire i miei principî in un trattato elementare; senza voler stabilire rigidamente un ordine determinato, specialmente nel principio.

3) Lasciamo da parte la questione se il punto abbia o no in sè parti, sebbene da quanto abbiamo detto al n. 55 dell'introduzione intorno all'oggetto della fig. 1 non solo il punto non è parte rispetto a questo oggetto, considerata la parte nel senso che serva a costruire il continuo secondo il teor. d. 105, ma non ne ha neppure considerato in sè stesso. (Vedi int. nota 4, 55). Il punto è per noi una forma costante (int. def. VII, 67).

Sl. 24b. Faksimil str. 210 Veroneseovih *Fondamenti di geometria* (Veronese 1891: 210)

Osim toga, čitavo izlaganje neprestano prate *dvije vrste napomena* u fusnotama – one označene rimskim i one označene arapskim brojevima. Napomene *segnate con numeri romani* pritom su tiskane i krupnijim slogom te, kako Veronese navodi u nap. I na str. 210, služe isključivo tomu da pokažu kako je njegove principe moguće slijediti i u djelima elementarnoga karaktera kakvi će, primjerice, biti *Elementi*. Budući da su takve publikacije prvenstveno namijenjene srednjoškolskoj nastavi, u njima je, prema Veroneseovu mišljenju, potrebno izbjegavati kritičke rasprave i napomene kakve su, u pravilu, sadržane u njegovim brojnim empirijskim zapažanjima i digresijama. To, međutim, ne znači da iz izlaganja treba isključiti i *empirijska razmatranja* (*considerazioni empiriche*). Naprotiv, Veronese smatra da ona mogu biti vrlo korisna kako pri formuliranju definicija tako i pri uspostavljanju aksioma, ali istodobno naglašava da se u samim dokazima ne smijemo oslanjati na empirijska razmatranja niti ih, općenito uzevši, uzimati u obzir, nego isključivo na rezultate koji su prethodno, neovisno o njima, ustanovljeni na temelju aksioma (Veronese 1891: 209, nap. 1).[386]

Ovo je ilustrativan primjer pretjerano složenoga stila izlaganja karakterističnog za *Fondamenti* (za više pojedinosti v. Odjeljak [2.1]), gdje je jasno vidljivo da je matematički sadržaj, koji bi trebao biti u središtu pozornosti, *de facto* razvodnjen umetanjem niza „zapažanja", „razmatranja" i „napomena". Iako su ta mjesta sama po sebi uglavnom jasno i kvalitetno napisana te, osobito s logičko-filozofskog i povijesnomatematičkog gledišta, vrlo zanimljiva, strogo uzevši nisu nužna za razrješenje, pa ni za razjašnjenje problema kojima se Veronese bavi u glavnom tekstu. To proizvodi objektivan problem: nedovoljno pažljiv ili nestrpljiv čitatelj, nenaviknut na ovakvu vrstu matematičke proze, teško će se snaći u Veroneseovu na prvi pogled kaotičnom tekstu.[387] Štoviše, kada je riječ o recepciji njegovih uvida i rezultata, ne samo da je moguće nego je i vrlo vjerojatno da neće prepoznati njihovu važnost ni inovativnost, budući da su utopljeni „u mnoštvo koje je prezentirano" (*in der Fülle des Dargebotenen*), koje samo „nepotrebno napuhuje [Veroneseovo] djelo" (*das Werk nur unnötig aufblähen*). *Weniger wäre gerade in diesem Falle entschieden mehr gewesen* – s pravom će napisati Contro: u Veroneseovu slučaju manje bi doista bilo više (Contro 1968: 90–91). Istoga je mišljenja bio i Petronijević koji je, kao što smo vidjeli u Odjeljku [1.1], prema Veroneseovu vlastitom sudu bio jedan od rijetkih istinskih poznavatelja njegove teorije. Već početkom 20. stoljeća Petronijević je Veroneseu predložio da napiše novo, „omanje djelo" u kojem bi svoje glavne rezultate i osnovne stavove nove geometrije izložio sažetije, jasnije i preciznije. U vezi s prethodno spomenutom paralelom između Veroneseovih *Fondamenti* i Hilbertovih *Grundlagen*, Pambuccian je zapisao:

> „Dok se Hilbertove *Grundlagen* mogu čitati bez ikakva povijesnog vodstva, kao tekst koji govori sam za sebe (barem je to bilo moje iskustvo, budući da sam ih upravo tako čitao još kao srednjoškolac), *Veroneseovi Fondamenti djeluju zastrašujuće*, *kako*

[386] Uz sve navedene „dodatke", u pojedinim se dijelovima uvoda *Fondamenti* pojavljuju i *konvencije* (*convenzioni*), koje se ponajprije odnose na notaciju, odnosno na uporabu pojedinih znakova ili simbola.

[387] Hans Freudenthal, primjerice, upravo je tako okarakterizirao *Fondamenti* (usp. Freudenthal 1966: 615). Za opširniju verziju Freudenthalova rada v. njegovu studiju „*Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts*" (Freudenthal 1960); usp. i Bos 1993. Slijedeći Freudenthala, o „kaotičnom dojmu" (*chaotischen Eindruck*) koji *Fondamenti* ostavljaju na čitatelja govorio je i Contro (*op. cit.*, ¶3.16).

svojom opsežnošću (628 stranica), *tako i samom prirodom argumentacije*." (Pambuccian 2014, Zbl 1158.51300, moj kurziv)

Aksiomatizaciju u *Fondamenti* dodatno komplicira pojava *hipoteza* (*ipotesi*) i takozvanih *praktičnih aksioma* (*assiomi pratici*), uz odnosno povrh geometrijskih aksioma u užem smislu. Već sam napomenuo da se čini kako Veronese pojmove „hipoteza", „postulat" i „aksiom" rabi kao sinonimne i međusobno zamjenjive (usp. Odjeljak [2.2]). Međutim, na jednome mjestu u predgovoru *Fondamenti* ističe da se, „kao što će biti pokazano u napomenama označenima rimskim brojevima", geometrija može proučavati i razvijati „uz pomoć [glavnoga] teksta i *neovisno o hipotezama*", ali pritom dodaje da je njihova uloga kao apstraktnih načela dvojaka. S jedne strane, omogućuju da se ustanovi na koji su način međusobno koordinirana temeljna geometrijska svojstva, a s druge pokazuju na koje je sve načine moguće razvijati geometrijski sustav koji počiva „na što manjem broju aksioma", budući da „hipoteze ne uvode nijedan novi aksiom povrh onih koji su već dani" (Veronese 1891: xxx). Tako, kao što smo vidjeli u odjeljcima [2.6] i [2.6.1], Veronese u *Fondamenti* ne formulira aksiome neprekidnosti, nego hipoteze apsolutnoga i relativnoga kontinuiteta, želeći „obraditi znanstveni problem [zasnivanja geometrije] na najopćenitiji mogući način" (*in tutta la sua generalità*). Upravo je zato formulirao hipoteze neprekidnosti „kako bi ustanovio geometriju nezavisnu od Arhimedova aksioma i kako bi što temeljitije mogao ispitati i utvrditi na koji su način s njom povezani različiti drugi poznati geometrijski sustavi" (*op. cit.*, *ad loc.*). Dakle, kada je riječ o aksiomatizaciji iz *Fondamenti*, hipoteze koje u njoj figuriraju obrađene su već u uvodu knjige te proizlaze iz Veroneseova razmatranja problema strukture kontinuuma i s njime povezanoga pitanja statusa uobičajenih aksioma neprekidnosti, ponajprije Arhimedova i Dedekindova aksioma. Ta je razmatranja Veronese prvi put iznio u pionirskom radu „Il continuo rettilineo e l'assioma V di Archimede" iz 1889. godine.[388]

„Praktični aksiom" Veroneseova je izvorna (i prilično neobična) kovanica, a u *Fondamenti* možemo pronaći tri stava koja on naziva tim imenom:

(**A**$_p$**1**) [EUKLIDOV POSTULAT] „Na području [sc. domenu] naših aktualnih opažanja s velikim stepenom aproksimacije potvrđeno je svojstvo da se kroz točku izvan zadanoga pravca može povući samo jedan njemu paralelan pravac." (Lib. I, Cap. I, §15)

(**A**$_p$**2**) [AKSIOM GIBANJA BEZ DEFORMACIJE] „Sve se točke bilo koje figure [sc. geometrijskog objekta] mogu slobodno gibati te svaka od njih, neovisno o ostalima, opisuje intuitivnu liniju tako da položaji točaka figure odgovaraju bijektivno i invertibilno (*univocamente e nel medesimo ordine*) [v. prethodno objašnjenje izomorfizma] sukcesivnim položajima, premda nije isključeno da više točaka može zauzimati isto mjesto u nekom sukcesivnom položaju (*lo stesso luogo in una posizione successiva*)." (Lib. I, Cap. I, §23)

(**A**$_p$**3**) [AKSIOM TRODIMENZIONALNOSTI] „Intuitivni prostor (*lo spazio intuitivo*) je trodimenzionalna figura [sc. geometrijski objekat] s obzirom na svoje točke." (Lib. III, Cap. II, §12)

[388] U Odjeljku [2.2] vidjeli smo da je Veronese (fundamentalnom) hipotezom nazivao i stav koji smo označili kao Veroneseov aksiom (V), kojim se tvrdi da je opći prostor n-dimenzionalan.

Prema Veroneseovu mišljenju, aksiomi i hipoteze dostatni su za razvoj teorijske geometrije, ali nisu dovoljni za „praktične primjene geometrije“, kao ni za utvrđivanje koji od mnogih alternativnih geometrijskih sustava (Veronese kao primjer uzima standardnu euklidsku i Riemannovu eliptičku geometriju) „odgovara području [sc. domenu] naših opažanja“. Pritom dodaje da se „takva pitanja ne tiču geometrije po sebi (*la geometria in sè*)“, nego njezinih praktičnih primjena, osobito u mehanici, budući da je „glavna svrha geometrije biti primjenjiva na proučavanje tijela“ (*di essere applicabile allo studio dei corpi*) (Veronese 1891: 262, 279). Drugim riječima, za praktične primjene geometrije potrebni su nam praktični aksiomi, koji nam omogućuju da se približimo geometriji aktualnoga fizičkog prostora odnosno da je aproksimiramo, dok bi se za aksiome (u užem smislu) i hipoteze moglo reći da opisuju geometrijska svojstva i relacije *lokalno*, u konačnoj okolini neke točke (*in der endlichen Umgebung eines Punktes*), odnosno, u slučaju hipoteza, *globalno*, to jest za čitav prostor (usp. Contro 1968, ¶3.15, str. 85). To je izvanredno zanimljiv i dubok uvid, jer znači da u Veroneseovu sustavu lokalno ili, kako on često kaže, „u konačnom području“ (*nel campo finito*), možemo imati posla sa standardnom trodimenzionalnom euklidskom, pa čak i arhimedovskom geometrijom, premda je prostor, promatran globalno, neeuklidski i nearhimedovski. Doista, već u predgovoru *Fondamenti* Veronese piše:

> „Slijedeći hipoteze o aktualnoj beskonačnosti i infinitezimalnosti, formulirat ćemo hipoteze koje nam omogućuju *uspostavu apsolutne geometrije nezavisne od Arhimedova aksioma te iz nje izvesti opći sustav u kojemu su obuhvaćeni* (*compressi*) *pojedinačni sustavi Euklidove i Riemannove* [*geometrije*]. U sustavu apsolutnoga zatvorenog pravca (*retta chiusa assoluta*) koji usvajamo nalazimo i Euklidov i Riemannov sustav, pri čemu nam prethodne hipoteze služe za povezivanje tih dvaju sustava u jedan opći sustav (*a mettere in relazione questi due sistemi in un solo sistema generale*).“ (1891: xxx, moj kurziv)

Govoreći o geometrijskim aksiomima i hipotezama, uz prethodno uvedenu distinkciju lokalno-globalno[389], Veronese iznosi još jednu napomenu koja se nadovezuje na raspravu iz odjeljaka [2.3], [2.4] i [2.5]. Naime, on tvrdi da su aksiomi *intuitivnog karaktera*, odnosno da se temelje „na onim istinama koje intuitivno zahvaćamo pri opažanju [realno postojećeg] objekta (*che si intuiscono colla percezione di quell'oggetto*)“, dok hipoteze, za razliku od toga, predstavljaju onu vrstu geometrijskih aksioma koja se ne odnosi samo na konkretne objekte nego i na „objekte za koje zamišljamo da postoje izvan toga područja [sc. konkretnih objekata] i koji, premda su jednaki onim prvima, imaju samo *apstraktno postojanje* (*hanno solamente un'esistenza astratta*)“ (1891: viii, moj kurziv). Iako nisu iskustveno potvrđene niti dokazane (*comprovati dalla nostra esperienza*), pa stoga ni ne posjeduju *očitost* aksioma u užem

[389] Još uvijek ne znajući za Controvu studiju, sličnu sam distinkciju – između *intra-* i *ekstramonadoloških* svojstava prostora – uveo u svom magistarskom radu o razvoju nearhimedovske matematike i teorija infinitezimala, od Leibnizova infinitezimalnog računa do 1890-ih godina, odnosno do razdoblja u kojem Veronese uvodi nearhimedovsku geometriju. Doduše, ondje se ta distinkcija pojavljuje u drukčijem i tehnički zahtjevnijem kontekstu, naime u okviru rješenja takozvana *Poyssonova problema* (izvorno formuliranoga 1635. godine) posredstvom konstrukcije modela Tarskijevih aksioma geometrije (usp. Tarski & Givant 1999) pomoću nearhimedovskih uređenih polja, koja je prvi uveo upravo Veronese. V. Popović 2016, §5.3. (Dodatna povijesna napomena: Tarski je elementarnu euklidsku geometriju prvi put aksiomatski izložio još u predavanjima održanima u Varšavi tijekom akademske godine 1926/27. Konačan oblik svojega aksiomatskog sustava razradio je oko 1965., dok je mnoga metamatematička svojstva svoje geometrije dokazao u radovima objavljenima između 1948. i 1967. godine.)

smislu (*e perciò essi non hanno evidenza dei primi*), hipoteze ipak nisu u suprotnosti sa „zakonima iskustva“ te ih, tvrdi Veronese, upravo zato prihvaćamo kao *fundamentalne istine* (*verità fondamentali*) geometrije.

Imajući u vidu sve prethodno navedene razlike između *Fondamenti* i *Elementi*, pogledajmo sada kako su točno izgledale aksiomatizacije koje je Veronese u njima izložio. Započet ćemo aksiomatizacijom geometrije iz *Fondamenti*. Radi lakšega praćenja izostavljat ću reference na prethodne dijelove *Fondamenti* koje je sam Veronese umećao u formulacije definicija i aksioma u običnim zagradama, kao i njegova popratna, nerijetko vrlo brojna zapažanja. Jedino ću (DEF. 1) ostaviti u izvornom obliku, onako kako ju je formulirao Veronese, dok ću kao reference navoditi samo brojeve stranica talijanskoga izdanja *Fondamenti*, i to u uglatim zagradama na kraju svake formulacije. Grubo govoreći, Veroneseova aksiomatizacija iz 1891. sastoji se od dvaju dijelova. Prvi dio (Aksiomi I–V i Definicije 1–6) ponajprije je posvećen uspostavi elementarne rektimetrije odnosno teorije pravca s obzirom na jednu jedinu *jedinicu* (*unità*, *Einheit*), koja, kako kaže Veronese, „odgovara osjetilno zamjetljivoj jedinici“ (*corrispondente all'unità sensibile*), a upravo bi prvih pet aksioma trebalo karakterizirati tu jedinicu. Drugi dio (počevši od §10, Cap. I prve knjige prvoga dijela *Fondamenti*) predstavlja uopćenje i proširenje početnoga sustava posredstvom novih aksiomatskih pretpostavki – hipoteza – koje „nisu u proturječju ni s prethodno ustanovljenim aksiomima ni međusobno te nam omogućuju ne samo da proširimo područje geometrije (*di allargare il campo della geometria*), nego i da njihovim posredstvom potom proučavamo svojstva konačnoga područja s obzirom na jedinice [različitih vrsta], i to sa znatno općenitijega stajališta“ (Veronese 1891: 244, usp. Oss. I). Drugim riječima, Veronese u drugom dijelu svojega sustava, posredstvom hipoteza, namjerava proučavati takozvani „apsolutni pravac“ (*la retta assoluta*) i uspostaviti načela njemu odgovarajuće apsolutne rektimetrije, a zatim dati karakterizaciju cjelokupne odnosno Riemannove ravnine (Lib. II, Cap. II) i (eliptičkoga) prostora (Lib. III, Cap. I–II), odnosno uspostaviti načela planimetrije i stereometrije. Pritom se ograničava samo na jedinice reda konačnosti (*dell'ordine finito*, *von endlicher Ordnung*), premda bi, radi što općenitijega mogućeg izlaganja, načelno mogao razmatrati i jedinice koje pripadaju nekom redu beskonačnosti (ili infinitezimalnosti) (Contro 1968, ¶3.08, str. 67).[390] I ne samo to, upravo se u drugom dijelu aksiomatizacije pojavljuju i prethodno spomenuti praktični aksiomi.

(**DEF. 1**) *Fundamentalni element* (*l'elemento fondamentale*, *Grundelement*) (usp. Int, DEF. 1, 57) od kojega su sastavljene sve druge forme [sc. geometrijski objekti – v. (DEF. 2) *infra*] (usp. Intr., DEF. 4, 57) i koji je zadan posredstvom pojedinačne predodžbe (*rappresentazione*, *Vorstellung*) naziva se točkom. [str. 210]

(**A**$_F$ **I**) Postoje različite točke – sve točke su identične. [str. 210][391]

[390] Da mu je i ta druga mogućnost bila na raspolaganju, očito je već iz činjenice da je u uvodu *Fondamenti* uspostavio ne samo hipoteze o neprekidnosti nego i hipoteze o redovima beskonačnosti i infinitezimalnosti (v. Cap. VI, str. 84ff.).

[391] Iako ova formulacija na prvi pogled može djelovati zbunjujuće, ona zapravo nije osobito neobična. Naime, točno je da su sve točke međusobno identične, odnosno *kvalitativno nerazlučive*, no ipak se razlikuju s obzirom na svoj položaj ili, rečeno jezikom analitičke geometrije, s obzirom na koordinate koje su im pridružene.

(**DEF. 2**) Svaka forma čiji je fundamentalni [konstitutivni] element točka naziva se *figurom* ili *geometrijskim entitetom*, odnosno *objektom*. [str. 211][392]

(**A_F IIa**) Postoji jednodimenzionalni sustav točaka identičan s obzirom na položaj svojih dijelova (*identico nella posizione delle sue parti*, *in der Position seiner Theile identisches*), koji je određen dvjema svojim točkama i koji je neprekidan. [str. 214]

(**DEF. 3**) Taj sustav nazivamo *pravom linijom* ili, jednostavnije, pravcem (*linea retta o retta*, *Linie oder Gerade*). [str. 214]

(**A_F IIb**) Postoje točke izvan pravca. Svaka točka koja ne pripada zadanomu pravcu određuje sa svakom njegovom točkom neki drugi pravac. [str. 216]

(**A_F III**) Ako ma koja dva pravca p_1 i p_2 imaju zajedničku točku A, tada za svaku dužinu $(AB) \in p_1$ postoji dužina $(AB') \in p_2$ koja joj je identična, kao što su i višekratnici (*die Vielfachen*) dužine (AB) identični višekratnicima dužine (AB') [*Grundzüge*, str. 238][393]

(**DEF. 4**) Pod *pravocrtnom figurom* (*figura rettilinea*) nekoga sustava točaka ili više različitih sustava točaka podrazumijevamo onu koja je određena dužinama (*individuata dai segmenti*) čije su krajnje točke (*estremi*) upravo te zadane točke, kao i dužinama određenima točkama tih prethodnih dužina, i tako dalje. [str. 221]

(**DEF. 5**) Pravocrtna figura određena trima nekolinearnim točkama A, B i C (*punti non situati in una retta*) naziva se *trokutom*, pri čemu se tačke A, B i C nazivaju *vrhovima* [tog trokuta], a dužine (AB), (BC), (AC) njegovim *stranicama*. [str. 221]

(**A_F IV**) Ako ma koja stranica trokuta postane neodređeno mala (*indefinitamente piccolo*, *unbegrenzt klein*), tada i razlika između preostalih dviju stranica postaje neodređeno mala. [str. 223]

(**DEF. 6**) Pravocrtna figura određena dvama pravcima naziva se *parom pravaca* (*coppia di rette*); promatraju li se pritom pravci s određenim usmjerenjem (*in un determinato verso*, *in einer bestimmten Richtung*), tada se takav par pravaca naziva *parom zraka* (*coppia di raggi*, *Strahlenpaar*). [str. 237–38]

Zanimljivo je da su na to upozorili i Fraenkel, Bar-Hillel i Levy u *Foundations of Set Theory* (1973), istaknuvši da je priroda točaka „homogena", za razliku od (cijelih) brojeva, koji se međusobno razlikuju „s obzirom na karakteristična individualna svojstva" (str. 212).

[392] Veronese na ovome mjestu ponovno piše (DEF. 1) umjesto (DEF. 2) samo zato što prelazi na novu stranicu, što znatno otežava praćenje izlaganja. Stoga u nastavku neću slijediti njegov način numeriranja definicija.

[393] Formulacije Aksioma III u *Fondamenti* i u nemačkom prevodu knjige to jest u *Grundzüge* se razlikuju. S obzirom na to da je sâm Veronese izmenio formulaciju (A_F III) u izdanju iz 1894, i ja sam sledio kasniju formulaciju. Izvorna formulacija iz *Fondamenti* (str. 221) glasi: „Se due rette qualunque hanno un punto comune A, ad un segmento (AB) dell'una è identico un segmento (AB') dell'altra."

(**A$_F$ V**) Ako u ma koja dva para zraka AB, AC i $A'B'$, $A'C'$ odaberemo dva para točaka B i C, B' i C' tako da vrijedi $(AB) \equiv (A'B')$ i $(AC) \equiv (A'C')$, a pritom je dužina (BC) identična dužini $(B'C')$, tada su identična i sama dva para zraka. [str. 240]

Kao što ističe i sâm Veronese (usp. Oss. III, str. 214), Aksiom IIa treba shvatiti u smislu da na pravcu leže najmanje dvije različite točke koje ga *jednoznačno određuju*, premda mogu postojati i parovi točaka koji to ne čine. Uzimajući u obzir način na koji su formulirani logička Hipoteza II (Intr., Cap. V, §3), kao i (A$_F$ IIa) i (Def. 3), vidimo da je Veroneseova fundamentalna forma naprosto pravac, odnosno *linearni kontinuum* ili, u svjetlu onoga što Veronese kaže u prvom empirijskom zapažanju (Oss. emp. I, str. 213), „pravocrtni segment" (*segmento rettilineo*) kontinuuma, odnosno *dužina* koja predstavlja elementarni geometrijski objekt na koji se mogu svesti svi ostali geometrijski objekti. U tom smislu, kontinuitet odnosno neprekidnost ovdje treba shvatiti u smislu u kojem je definirana Veroneseovim Hipotezama VI i VIII, odnosno takozvanim uvjetima *relativne* i *apsolutne neprekidnosti* (usp. *Fondamenti*, Cap. VI, „Segmenti finiti, infiniti, infinitesimi, indefinitamente piccoli e indefinitamente grandi – Numeri infiniti", §7, str. 128 i §8, str. 150), s kojima smo se prethodno susreli u Odjeljku [2.6.1]. Veronese, doduše, u nap. IV na str. 216 dodaje da je za potrebe izlaganja elementarne geometrije, osobito na gimnazijskoj razini (*per uso dei licei*), i s praktičnog i s didaktičkog gledišta dovoljno ograničiti se na Arhimedov aksiom.

Kad je riječ o Aksiomu IIb, Veronese ističe da ga označava kao IIb zato što se, za razliku od Aksioma IIa, odnosi na parove točaka koji određuju pravac (usp. nap. 1 uz (A$_F$ IIb), str. 216). Važnije od same nomenklature jest primijetiti da nam, strogo uzevši, Aksiom IIb jamči samo postojanje dvodimenzionalnih struktura. Međutim, Veronese prešutno pretpostavlja da iz njega automatski proizlazi i postojanje geometrijskih prostora bilo kojega konačnog broja dimenzija. To zapravo znači, kako je primijetio Contro (1968, §3, ¶3.07, str. 65), da Veronese (A$_F$ IIb) tretira kao *shemu aksioma*, što je sasvim prirodno s obzirom na to da je njegov primarni cilj u *Fondamenti*, kao što smo već vidjeli, izgradnja što općenitijeg sustava apsolutne geometrije. To nam, uostalom, Veronese gotovo eksplicitno i kaže:

> „Naši aksiomi utvrđuju samo postojanje dvodimenzionalnih figura, ne isključujući pritom postojanje figura s više od dvije dimenzije; međutim, ostala svojstva [koja ćemo ustanoviti] u ovom poglavlju vrijede kako za dvije dimenzije, tako i za opći prostor s neodređenim brojem dimenzija, kao i za prostore od tri ili više dimenzija." (Veronese 1891: 211, nap. 2)

Iz drugoga dijela Aksioma IIb neposredno slijedi važan teorem (Veronese ga naziva Teor. VI; v. str. 217 *Fondamenti*), prema kojemu, ako dvije točke ne određuju pravac, tada svaki pravac koji sadrži jednu od tih točaka mora sadržavati i onu drugu. Kao što se može vidjeti *ad loc. cit.*, Veronese je radi dokazivanja toga teorema, koji inače karakterizira sfernu geometriju, u formulaciju Aksioma IIa uključio pretpostavku o jednoznačnosti pravaca određenih bilo kojim dvjema točkama.

Aksiom III Veronese uvodi kao „čisto geometrijski konstrukcijski postulat" (*rein geometrischen Konstruktionspostulat*, usp. Contro, *op. cit.*, str. 66) te ga u daljnjem izlaganju koristi kao *kriterij jednakosti* odnosno *identiteta pravaca* (v. *Teor.* I, str. 221 *Fondamenti*). Štoviše, (A$_F$ III)

zamjenjuje čisto logičku Hipotezu I iz §3 petoga poglavlja („Della forma fondamentale“) uvoda u *Fondamenti*, kojom se tvrdi da postoji fundamentalna forma koja služi određivanju svih ostalih formi (utoliko što i sâm njihov identitet zapravo počiva na činjenici da su konstruirane posredstvom fundamentalne forme), kao i da su sve fundamentalne forme međusobno identične (str. 67). Kao što sam već istaknuo, ta fundamentalna forma ili elementarni objekt (*Elementarfigur*) jest dužina jer, u skladu s (DEF. 4), upravo dužine služe za *individuiranje* ostalih geometrijskih objekata, pri čemu je jasno da svaki geometrijski objekt predstavlja dio pravca, budući da ga uvijek možemo promatrati kao klasu točaka (*Punktklasse*). Zanimljivo je primijetiti da Veronese ovdje geometrijski identitet (pravaca) ne želi svesti na logički, nego na u osnovi konstruktivan proces povezan s operacijama nad dužinama, osobito s njihovim umnažanjem. Drugim riječima, *incidencija* nije u prvom planu, pa ono što Veronesea ponajprije zanima nije pitanje „leže li iste točke na oba pravca p i q?“, nego „jesu li, i u kojem smislu, pravci p i q strukturno slični?“.

Aksiom IV u biti se svodi na dobro poznatu i temeljnu nejednakost trokuta, kojom se tvrdi da je u bilo kojem trokutu ABC zbroj dužina bilo koje dvije stranice, (AB) i (BC), veći ili jednak dužini treće stranice (AC), odnosno da vrijedi $(AB) + (BC) \geq (AC)$. Međutim, kao što se vidi iz same formulacije, Veronese dodatno pojačava ovu tvrdnju dodajući joj odredbu o ponašanju geometrijskih objekata na beskonačno malim udaljenostima. Time (A_F IV) poprima karakter prikrivenoga *aksioma neprekidnosti* kojim se jamči da će ponašanje geometrijskih objekata u prostoru, čak i pri infinitezimalnim transformacijama, ostati glatko (uniformno) i predvidljivo. Nadalje, iz nejednakosti trokuta slijedi da je udaljenost ϱ neprekidna funkcija dviju varijabilnih točaka (usp. Borsuk & Szmielew 1960, Ch. II, §19 i Ch. III, §17). Sâm Veronese iz (A_F IV) izvodi sljedeće dvije važne posljedice u obliku teorema:

(**TEOR. I**) Ako udaljenost točke R od točke X nekoga pravca p postaje neodređeno malom (*va diminuendo indefinitamente*, *unbegrenzt abnimmt*), tada točka R pripada pravcu p. [str. 224]

(**TEOR. II**) Ako je pravac otvoren, tada svaki par točaka jednoznačno određuje pravac, dok je u slučaju zatvorenoga pravca on određen ma kojim dvjema svojim točkama, osim u mogućem slučaju kada je riječ o [dijametralno] nasuprotnim točkama (*punti opposti*), odnosno kada te točke raspolavljaju zatvoreni pravac. [str. 233–34][394]

Naposljetku, iz Aksioma V slijedi da su pravolinijski likovi (figure) određeni dvjema grupama od m točaka $A, B, C, D, \ldots, M$ *i* $A', B', C', D', \ldots, M'$ jednaki ako su dužine (čiji su date točke krajevi) po parovima jednake (*ordinatamente uguali*, *der Reihe nach gleich sind*) (*Fondamenti*, str. 242, Teor. VII). Iz istoga aksioma također slijedi da su tri točke kolinearne

[394] Razlika koju Veronese ovdje povlači između otvorenoga i zatvorenoga pravca odgovara uobičajenoj distinkciji iz elementarne geometrije, s tim da se u suvremenoj terminologiji češće govori o otvorenim i zatvorenim (pravim ili zakrivljenim) linijama. Paradigmatičan primjer otvorene linije jest svaka *dužina* AB, dok je paradigmatičan primjer zatvorene (zakrivljene) linije odnosno krivulje bilo koja *kružnica* C.

ako i samo ako je zbroj udaljenosti jedne od njih do preostale dvije jednak međusobnoj udaljenosti tih dviju preostalih točaka. Pogledajmo sada kako izgleda drugi, općenitiji dio aksiomatizacije iz *Fondamenti*, zasnovan na hipotezama i korolarima koji iz njih logički slijede, kao i na trima praktičnim aksiomima.

(**HIP. I**)	Pravac je jednodimenzionalni sustav točaka identičan s obzirom na položaj svojih dijelova, koji je neprekidan u apsolutnom smislu (*continuo assoluto*) i određen dvjema svojim različitim točkama. [str. 244]
(**HIP. II**)	Dva se pravca podudaraju u apsolutnom smislu (*coincidono in senso assoluto*) ako, polazeći od bilo koje zadane točke kao ishodišta i s obzirom na bilo koju jedinicu (*relativo ad un'unità qualunque*), obuhvaćaju isto zajedničko područje odnosno polje. [str. 245]
(**DEF. 1**)	Promotrimo sve pravce koji sadržavaju, odnosno prolaze kroz, neku točku S. Sve točke tih pravaca koje se nalaze na konačnoj udaljenosti od S s obzirom na zadanu jedinicu s, u oba smjera tvore ono što nazivamo *konačnim područjem* ili *poljem* (*campo*) oko točke S s obzirom na jedinicu s. Svaku figuru određenu pravcima koji prolaze kroz točku S nazivamo *apsolutno konačnim područjem* ili *poljem* oko točke S. [str. 247–48]
(**HIP. III**)	U apsolutno konačnom području ili polju oko točke S vrijede aksiomi (A_F IIb), (A_F III), (A_F IV) i (A_F V). [str. 248]
(**HIP. IV**)	Bilo koja dva različita pravca u konačnom području ili polju oko točke S, koji prolaze kroz točku S, ostaju različiti i u svakom beskonačnom ili infinitezimalnom području s obzirom na odgovarajuće jedinice tih područja, i obratno.

Prethodno smo vidjeli da (A_F IIa) ne isključuje neprekidnost u apsolutnom smislu, što znači da je HIP. I u skladu s prvim aksiomom i da mu ne proturječi (usp. Veronese 1891: 245). Prema tome, svi teoremi čiji je dokaz ovisio o (A_F IIa) „očito vrijede i u apsolutnom smislu" (*in senso assoluto*), odnosno pod pretpostavkom prve hipoteze. Uzevši zajedno, iz Hipoteza I, II i IV slijedi da bilo koje dvije točke (osim u slučaju zatvorenoga pravca, u kojem su one međusobno nasuprotne u apsolutnom smislu) jednoznačno određuju pravac u apsolutnom smislu (*determinano la retta in senso assoluto*) (*op. cit.*, str. 253). Contro pritom primjećuje da upravo taj stav motivira Veronesea da navedene hipoteze formulira upravo na takav način (1968: 207–208, nap. 683). Nakon što je uspostavio prve četiri hipoteze, Veronese prelazi na karakterizaciju relacija u kojima mogu stajati jedinice različitih vrsta odnosno redova (konačne, beskonačne i infinitezimalne), posredstvom sljedećih teorema:

(**TEOR. I**)	Točke u beskonačnosti u nekom zadanom smjeru podudaraju se (*coincidono*) u jednoj jedinoj točki s obzirom na bilo koju jediničnu dužinu. [str. 245]
(**TEOR. II**)	Ako je na zatvorenom pravcu zadana dužina (AB), ona je konačna ili infinitezimalna nekoga točno određenog reda n s obzirom na cijeli pravac

te, slijedom toga, na pravcu *simpliciter* i s obzirom na (AB) ne postoje beskonačne dužine reda [beskonačnosti] višega od n. Zatvoreni je pravac beskonačan, i to nekoga točno određenog reda s obzirom na bilo koju svoju zadanu dužinu. Oko bilo koje točke, s obzirom na neku jedinicu (AB), na zatvorenom pravcu postoje konačno područje te beskonačna područja ili polja prvoga, drugoga, …, i n-tog reda. Područja u beskonačnosti prvoga, drugoga, … i $(n-1)$-tog reda s obzirom na fundamentalnu jedinicu (AB), u oba smjera polazeći od početne točke, nemaju nijednu zajedničku točku, dok se beskonačna područja n-tog reda međusobno podudaraju [sc. poklapaju]. [str. 245–46]

(**TEOR. III**) S obzirom na jedinicu (AB), u jednom i drugom smjeru na zatvorenom pravcu postoje dvije granične točke u beskonačnosti prvoga, drugoga, … i $(n-1)$-tog reda te samo jedna granična točka n-tog reda. [str. 246]

(**TEOR. IV**) Beskonačna dužina nekoga zadanog reda n (ako $n = 0$, dužina je konačna) može se zanemariti u usporedbi s beskonačno velikom dužinom višega reda. Infinitezimalna dužina nekoga zadanog reda n može se zanemariti u usporedbi s infinitezimalnom dužinom nižega reda. [str. 246]

(**TEOR. V**) Ako su dvije stranice nekoga trokuta konačne, a treća infinitezimalna, prve su dvije stranice jednake s obzirom na bilo koju zadanu jedinicu te se podudaraju s obzirom na konačnu jedinicu, kao i na svaku beskonačnu jedinicu.

(**TEOR. VI**) Konačno područje ili polje oko neke točke A s obzirom na neku jedinicu jednako je konačnom području oko bilo koje druge točke B prvoga područja [sc. oko A] s obzirom na istu tu jedinicu. [str. 251]

(**TEOR. VII**) Različite točke u beskonačnosti (*punti distinti all'infinito*) nekoga pravca [koji pripada] konačnom području [oko točke S] određuju pravce koji se podudaraju u točki S s obzirom na konačnu jedinicu, budući da se u slučaju zatvorenoga pravca prethodno spomenuti pravci ne sijeku s danim pravcem ni u jednoj njegovoj točki unutar konačnoga područja. [str. 253–54]

Pojam *točke u beskonačnosti* (poznat i pod nazivom *idealna točka*), koji potječe iz projektivne geometrije[395] i koji figurira u TEOR. I–VII, Veronese zapravo uvodi kako bi definirao *paralelizam*, i to neovisno o ravnini.[396] Štoviše, već je i sâm Desargues u svojem

[395] Veroneseov mentor Cremona u svojim je utjecajnim *Elementi di geometria projettiva* istaknuo da je Girard Desargues po svoj prilici prvi u geometriji razmatrao „elemente na beskonačnoj udaljenosti" (*elementi a distanza infinita*) (Cremona 1873: xiv).

[396] U jednoj od napomena uz §13 prvoga poglavlja prve knjige *Fondamenti* („Raggi e retti paralleli") Veronese ističe da se u konačnome euklidskom području pravac paralelan zadanomu pravcu može definirati neovisno o ravnini na sljedeći način: „Ako dva jednaka trokuta imaju dva para nasuprotnih stranica, tada se stranice nasuprot tim parovima nazivaju paralelnima." (nap. XVI, str. 257–258).

najvažnijem spisu o konikama, takozvanom *Brouillon project*, posve eksplicitno tretirao, pa gotovo i definirao, paralelne pravce kao pravce koji se sijeku u nekoj točki u beskonačnosti (*dont le but est à distance infinie*; Desargues 1863: 105; usp. Cremona 1873: xiv). Evo Veroneseovih definicija:

(**DEF. 1**) Kažemo da je zrak unutar konačnoga područja ili polja *paralelan* nekom drugom zraku istoga područja ako točka toga drugog zraka koja leži u beskonačnosti prvoga reda leži na prvome zraku, pod uvjetom da točka u beskonačnosti prvoga reda [zajedno] sa svakom točkom konačnoga područja određuje pravac te da je, u slučaju zatvorenoga pravca, jedinica konačnoga područja infinitezimal prvoga reda u odnosu na cijeli pravac (čime je u slučaju zatvorenoga pravca isključena mogućnost presijecanja u nasuprotnim točkama). [str. 257]

(**DEF. 2**) Pravci kojima pripadaju dva paralelna zraka nazivaju se *paralelnima* u smjeru određenom tim dvama zrakama. [str. 257]

Iz toga slijedi da su dva polupravca koja su paralelna nekom trećem polupravcu ujedno paralelna i međusobno (Veronese 1891: 257, Coroll.). Veronese zatim navodi i sljedeće važne teoreme:

(**TEOR. I**) Dva paralelna pravca nemaju nijednu zajedničku točku unutar konačnoga područja ili polja. [str. 257]

(**TEOR. II**) Ako je pravac otvoren ili, u slučaju zatvorenoga pravca, ako je jedinica konačnoga područja ili polja barem infinitezimal prvoga reda u odnosu na cijeli pravac, tada je iz točke S moguće povući samo jedan pravac paralelan zadanom pravcu u određenome smjeru. [str. 257]

(**TEOR. III**) Ako je pravac otvoren, neovisno o tome koja je jedinica konačnoga područja ili polja, tada je iz točke S moguće povući dva pravca paralelna zadanom pravcu koji se podudaraju s obzirom na konačnu jedinicu, ali ne i u apsolutnom smislu. [str. 257]

Veronese smatra da ovi teoremi pokazuju kako, polazeći od nekoga zadanog pravca i točke S izvan njega, možemo konstruirati *jedan*, *dva* ili *nijedan* pravac paralelan zadanom pravcu, naravno, ovisno o dodatnim pretpostavkama. To znači – i upravo se u tome sastoji Veroneseov iznimno zanimljiv i dubok uvid – da su *u apsolutnom smislu* i standardna euklidska geometrija, kao i Riemannova i Lobačevskijeva geometrija (eliptička odnosno hiperbolička), kompatibilne s prethodno formuliranim Hipotezama I–IV (usp. Oss. II, str. 261 *Fondamenti*). Međutim, hiperbolička geometrija, u kojoj, kao što je poznato, kroz točku S izvan nekoga zadanog pravca prolazi *beskonačno mnogo* pravaca koji ne sijeku taj pravac, odnosno koji su s njime paralelni, u slučaju konačnog područja ili polja bilo koje jedinice isključena je već samim Veroneseovim definicijama paralelizma. Time kao jedine moguće alternative u ograničenim, odnosno konačnim područjima, ostaju euklidska i Riemannova geometrija (u slučaju kada je pravac zatvoren u apsolutnom smislu).

U jednoj napomeni, kao i na još nekoliko mjesta u *Fondamenti*, Veronese sugerira da je u njegovu sustavu moguće dobiti i hiperboličku geometriju (usp. Oss. II, str. 261, kao i Lib. II, Cap. III, §§1–2, osobito „Assioma delle parallele nel sistema di Lobatschewsky"; v. također i osvrt o Lobačevskom u apendiksu *Fondamenti*), ali po cijenu prevelike izmjene izvornoga aksiomatskog sustava. To bi, naime, rezultiralo time „da bi postojale točke i pravci *različitih kategorija*" (*esisterebbero punti e rette di categorie diverse*), čime bi bila narušena *uniformnost* koju jamče izvorni aksiomi i hipoteze (*non vi sarebbe la stessa uniformità come colle ipotesi adottate*), a do koje je, kao što smo vidjeli i u kontekstu rasprave o geometriji hiperprostora u Odjeljku [2.3], Veroneseu osobito bilo stalo. Budući da mu je jednako tako bilo stalo i do najvećeg mogućeg stupnja općenitosti, prirodno je što je svoj aksiomatski sustav *ab initio* oblikovao tako da obuhvati Riemannovu sfernu (eliptičku) geometriju (usp. Contro 1968: 70, nap. 1). Kao što je poznato, Riemannova generalizacija takozvane Gaußove *mjere zakrivljenosti*[397] na n-dimenzionalne prostore ili, kako ih je sam Riemann nazivao, n-mnogostrukosti (*Mannigfaltigkeiten*), omogućuje da prostore standardne euklidske, ali i drugih neeuklidskih geometrija – čega je već Beltrami bio svjestan u *Saggio di interpretazione* iz 1868. – promatramo kao posebne slučajeve Riemannovih trodimenzionalnih mnogostrukosti *konstantne zakrivljenosti* (nulte u slučaju euklidskoga, pozitivne u slučaju eliptičkoga, a negativne u slučaju hiperboličkoga prostora). Nastavljajući svoju aksiomatizaciju, Veronese ističe sljedeće:

> „Ne bavimo se, naime, opredjeljivanjem između euklidskog ili rimanovskog sustava (niti sustava Lobačevskog u slučaju u kojem je i on također moguć), nego se moramo opredijeliti u apsolutnom smislu (*deciderci in senso assoluto*) između otvorenoga i zatvorenoga pravca. Budući da zatvoreni pravac – uzimajući u obzir naše Hipoteze I–IV – uključuje i Riemannov i Euklidov sustav, kao i zbog primjena Riemannova sustava u proučavanju euklidskoga, opredjeljujemo se i za sljedeću hipotezu:"

(**HIP. V**) Pravac je zatvorena linija. [str. 262]

Uz HIP. V Veronese dodaje i sljedeću definiciju:

(**DEF. 1**) Apsolutni sustav koji proizlazi iz zatvorenoga pravca nazivamo *apsolutnim rimanovskim sustavom*. S druge strane, pod pretpostavkom da je pravac otvoren u apsolutnom smislu, ako se kroz svaku točku van njega može povući jedan njemu paralelan pravac, tada imamo *apsolutni euklidski sustav*. [str. 262]

Jasno je da HIP. V i DEF. 1, budući da se *in abstracto* odnose na apsolutni sustav, ne govore ništa o tome koja geometrija – Riemannova ili euklidska – odgovara fizičkom prostoru našega iskustva. Kao što sam već prethodno napomenuo, Veronese takva pitanja smatra izvangeometrijskima i relevantnima jedino u kontekstu mogućih primjena geometrije.

[397] U djelu „Disquisitiones generales circa superficies curvas" (Göttingen, 1828) Gauß je istraživao geometriju ploha euklidskoga prostora, uvevši razlikovanje između takozvane *internalne* i *eksternalne geometrije* ploha, koje se svodi na razlikovanje dviju vrsta geometrijskih veličina (*quantitates*): onih koje se mogu odrediti već mjerenjima na samoj plohi i onih za čije su određivanje potrebna dodatna mjerenja izvan dane plohe, u okolnom prostoru. Temeljna veličina internalne geometrije upravo je *zakrivljenost*, koju je Gauß definirao kao funkciju koja mjeri lokalno odstupanje neke dane plohe od standardne euklidske ravnine, odnosno od nulte zakrivljenosti. Za tekst Gaußovih „Disquisitiones" v. Dombrowski 1979; usp. i Jost 2016, §2.4.

Za takve praktične primjene geometrije potrebno je približiti se geometriji aktualnoga fizičkog prostora, odnosno aproksimirati je, a upravo tome služe prethodno navedeni praktični aksiomi (A_p1), (A_p2) i (A_p3) o paralelizmu, gibanju bez deformacije i trodimenzionalnosti. Euklidov peti postulat, odnosno aksiom (A_p1), osobito je zanimljiv jer, kako primjećuje Contro, kod Veronesea funkcionira i kao oslabljena inačica Arhimedova aksioma[398], i to u sljedećem smislu. Uzmemo li u obzir (A_p1) i prethodne hipoteze, jedinica koja odgovara već spomenutoj opažajnoj jedinici (*unità sensibile*) infinitezimalna je (i to prvoga reda) u odnosu na cijeli pravac. Prema tome, ako bismo analitičku reprezentaciju zasnovali na toj jedinici, sve bi se točke i dužine mogle izraziti pomoću dviju jedinica i to u obliku

$$a \times \infty_1 + b,$$

gdje su $a,b \in \mathbb{R}$, a vrijedi $n \times b < \infty_1$ za svako $n \in \mathbb{N}$ (kako bismo mogli razvijati analitičku geometriju, dovoljno je ograničiti operacije množenja i dijeljenja). To je u skladu s sljedećom Veroneseovom konvencijom:

> „Fundamentalnom jedinicom (*unità fondamentale*) na zatvorenom pravcu smatramo jedinicu koja je infinitezimal prvoga reda u odnosu na cijeli pravac. Kada pak govorimo o točkama i likovima [sc. geometrijskim objektima] ograničenoga područja ili polja (*campo finito*), navedenu ćemo jedinicu smatrati euklidskom. Tako ćemo fundamentalne jedinice konačnih područja nazivati *euklidskim jedinicama*, a jedinice beskonačnih, odnosno Riemannovih područja, *rimanovskim jedinicama*." (Veronese 1891: 263)[399]

Hipoteze I–V i (A_p1) jednoznačno određuju geometriju konačnih područja ili polja. Međutim, te pretpostavke još uvijek nisu dovoljne za karakterizaciju geometrije beskonačnih područja, ponajprije zato što nije odlučivo određuju li dvije dijametralno suprotne točke pravac jednoznačno ili ne. Stoga Veronese uvodi još i

(**HIP. VI**) Na pravcu postoje parovi točaka koji ga ne određuju. [str. 266]

To naprosto znači da Veronese u konačnom području, odnosno lokalno, daje prednost euklidskoj geometriji, dok se globalno, u beskonačnom području, opredjeljuje za sfernu odnosno eliptičku geometriju. Sa HIP. VI Veroneseova je aksiomatizacija praktički dovršena, premda će je u nastavku izlaganja dopuniti još dvama praktičnim aksiomima, (A_p2) i (A_p3). U vezi s (A_p2), odnosno aksiomom slobodnoga gibanja, Veronese će u §23 prve

[398] „Das praktische Axiom I hat also auch die Wirkung eines abgeschwächten archimedischen Axioms." (Contro 1968, ¶3.9, str. 71)

[399] Povezanošću između Playfairova aksioma o paralelama i Arhimedova aksioma poslije se bavio Hilbertov student Max Dehn (1878–1952), već u svojoj disertaciji iz područja zasnivanja geometrije, *Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck* (1900), posvećenoj pitanju može li se Saccheri-Legendreov teorem, prema kojemu je zbroj unutarnjih kutova trokuta jednak zbroju dvaju pravih kutova (180°), dokazati bez pretpostavke aksioma neprekidnosti. Jeremy Gray kao da sugerira da se prije Dehna nitko nije bavio pitanjem povezanosti nearhimedovske i neeuklidske geometrije (usp. Gray 2009b: 677), premda je očito da je već Veronese bio svjestan povezanosti aksioma neprekidnosti i aksioma o paralelama, kao i implikacija odbacivanja Arhimedova aksioma za potonji. Tim se vezama bavio i Veroneseov student Levi-Civita, već u radu „Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici" iz 1892./93., u kojem je konstruirao model Veroneseove aksiomatizacije iz *Fondamenti*. Usp. Cerroni 2007: 263, nap. 13 (gdje se, doduše, samo navodi da se kod Veronesea i Levi-Civite „može pronaći mnogo sugestija (*sic!*) u tom smjeru", misleći na ono čime će se kasnije baviti Hilbert i Dehn).

knjige *Fondamenti* ispravno primijetiti da, iako (A_F IIa) (odnosno njemu ekvivalentna HIP. I) postuliraju postojanje jednakih dužina, ni (A_F IIa) ni ostali dotad formulirani aksiomi i hipoteze ne objašnjavaju „kako je moguće konstruirati dva jednaka segmenta [sc. dvije dužine] na nekom pravolinijskom objektu ili pak na različitim pravolinijskim objektima“ (str. 279, 37. Oss. emp.). Drugim riječima, prethodna aksiomatizacija ne govori nam kako možemo *reproducirati dužine* (usp. Contro 1968, ¶3.10). Za to nam je, kako kaže Veronese, potrebno „jedno praktično sredstvo“ (*un mezzo pratico*) – aksiom (A_p2) – jer u praksi jednake dužine konstruiramo oslanjajući se na fizička kruta tijela (mjerne štapove) na kojima možemo označavati i pomicati dužine bez deformacije:

> „[O]slanjajući se na iskustvo, ako se tijelo kreće u fizički homogenoj sredini, intuitivno zaključujemo (*intuitiamo*), promatrajući tijelo u dva različita položaja, da ono u drugom položaju zauzima mjesto (*luogo*) *jednako* mjestu koje je zauzimalo u prvom položaju, i to na takav način da su dijelovi prostora koje zauzimaju isti dijelovi tijela [koje je promijenilo položaj] međusobno jednaki. Stoga kažemo da se tijelo može gibati *bez deformacije* (*senza deformazione*).“ (Veronese 1891: 279, *loc. cit.*, Veroneseov izvorni kurziv)

Dakako, gibanje bez deformacije, odnosno bez narušavanja strukture, metričkih relacija i identiteta (geometrijskih) objekata, pretpostavlja (a) *apstraktnu egzistenciju* jednakih odnosno kongruentnih dužina (što je već zajamčeno aksiomom (A_F IIa) i HIP. I) te (b) *konkretnu mogućnost* gibanja duž proizvoljnih putanja. Veroneseovim riječima,

> „[m]ogućnost takvoga gibanja očito proizlazi iz postojanja prethodno opisanoga sustava na pravcu [liniji], koji ovisi o homogenosti [sc. uniformnosti u svim smjerovima] i neprekidnosti pravca (Teor. II, Teor. III, Ass. IIa). […] Odsad ćemo, kada budemo govorili o gibanju likova [sc. geometrijskih objekata ili figura], uvijek pod tim podrazumijevati gibanje bez deformacije, prethodno dokazujući, kao što smo učinili i u slučaju pravca, da postoje kontinuirani sustavi invarijantnih likova u entitetu (*nell'ente*) (*sic!*) koji ćemo najprije konstruirati.“ (Veronese 1891: 280, Oss. IV–V)

Dakle, premda Veronese inzistira na tome da (A_p2) nije nužan za teorijsko razvijanje geometrije, nego samo za njezine praktične primjene, on je ipak koristan jer nam omogućuje lakše razumijevanje *kongruentnosti* i *simetričnosti dužina*. Tako Veronese uvodi i sljedeću definiciju

(**DEF. 1**) Dvije jednake dužine na istome pravcu, istoga usmjerenja (*nello stesso verso*), nazivaju se *kongruentnim*, a ako su suprotnog usmjerenja onda se nazivaju *simetričnim*. [str. 274]

Ako kažemo da dužina *klizi* (*scorre*) po pravcu kada se njime giba u zadanome smjeru opisujući kontinuirani sustav invarijantnih dužina, tada iz DEF. 1 i mogućnosti gibanja dužine po pravcu bez deformacije, koju jamči (A_p2), slijedi:

(**TEOR. I**) Dužina koja klizi po pravcu kongruentna je sama sebi. [str. 274, Teor. III]

(**TEOR. II**) Dvije kongruentne dužine na istome pravcu mogu se bez deformacije superponirati (poklopiti) (p*ossono trasportarsi senza deformazione l'uno sull'altro*). [str. 274, Teor. VI]

(**TEOR. III**) Dvije simetrične dužine ne mogu se bez deformacije superponirati (poklopiti) na pravcu (*non possono trasportarsi l'uno sull'altro, senza deformazione sulla retta*). [str. 274, Teor. VII]

Ovim je upotpunjeno i zaokruženo Veroneseovo aksiomatsko izlaganje rektimetrije u prvoj knjizi *Fondamenti*. U nastavku izlaganja, odnosno u drugoj knjizi *Fondamenti*, Veronese prelazi na zasnivanje planimetrije i karakterizaciju ravnine, uvodeći – kao što je bio običaj u raspravama iz projektivne geometrije 19. stoljeća – pojam ravnine preko pojma pramena pravaca (*fascio di raggi, Strahlenbüschel*) te, kao i u slučaju pravca, najprije razmatrajući konačni, a tek potom i beskonačni dio ravnine. Ovdje neću ulaziti u sve pojedinosti Veroneseove planimetrije; čitatelja upućujem na Controvu studiju kao vrlo pouzdan vodič (usp. Contro 1968, ¶3.11–13). U osnovi, stil i metoda izlaganja u drugoj knjizi oblikovani su po uzoru na prvu te je slijede u svim bitnim aspektima, s tom razlikom što planimetrija zauzima još više prostora od rektimetrije — *više od stotinu stranica* razuđenoga teksta (točnije, od str. 281 do str. 384). U §§1–6 opisuje se svojstva pramenova, u §7 tek se uvodi definicija standardne euklidske ravnine[400], potom Veronese uspostavlja kriterije za mjerenje kutova i uređivanje elemenata ravnine, da bi, naposljetku, uvođenjem elemenata u beskonačnosti u drugom poglavlju druge knjige konstruirao takozvanu potpunu odnosno Riemannovu ravninu (§1ff.). To, međutim, zahtijeva formuliranje još jedne dodatne hipoteze – HIP. VII (str. 361–362, odjeljak „Determinazione del piano completo") – kako bi se osigurao prijenos, odnosno proširenje, valjanosti teorema dokazanih za konačni dio ravnine (koji je zapravo identičan, odnosno izomorfan, standardnoj euklidskoj ravnini[401]) i na njezin beskonačni dio.

Kao što se ravnina dobiva projekcijom pravca iz neke njemu nepripadajuće točke, tako Veronese u trećoj knjizi *Fondamenti* definira standardni trodimenzionalni euklidski prostor preko projekcije ravnine iz točke koja se nalazi izvan nje (usp. Lib. III, Cap. I, §1, Def. I). Sve točke na konačnoj udaljenosti tvore euklidski prostor, dok se potpuni trodimenzionalni Riemannov prostor dobiva uvođenjem točaka u beskonačnosti. I ponovno, *mutatis mutandis* i gotovo potpuno analogno slučajevima rektimetrije i planimetrije, Veronese definira najvažnije pojmove (primjerice pojam *zvijezde*[402]) te ih karakterizira odgovarajućim teoremima. Kako je istaknuo Contro, „s metodološko-aksiomatskog stajališta ova [Veroneseova] istraživanja ne donose ništa bitno novo te ih stoga ovdje nije potrebno

---

[400] Veroneseova definicija glasi ovako: „Figura [sc. geometrijski objekt] koja nastaje iz pramena pravaca, uz pretpostavku da je točka [fundamentalni odnosno generirajući] element (*erzeugende Element*), naziva se dvodimenzionalnim sustavom ili ravninskom plohom ili, jednostavnije, ravninom." [str. 299]

[401] Što, naravno, znači da je euklidska ravnina sadržana u Riemannovoj, odnosno da predstavlja njezin dio.

[402] Ako su zadani ravnina π i točka P izvan nje, tada pravci koji nastaju povezivanjem točke P s točkama ravnine π, promatrani kao generirajući elementi, određuju figuru koja se naziva *zvijezdom prve vrste* (*stella di 1° specie*) ili, jednostavnije, *zvijezdom*. V. Veroneseovu sl. 75 na str. 385 *Fondamenti*.

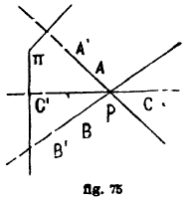


fig. 75

podrobno analizirati, premda ih svakako vrijedi pročitati, osobito dio posvećen potpunom prostoru [sc. Lib. III, Cap. II].“ (Contro 1968: 83) Svoj aksiomatski sustav – rektimetriju, planimetriju i stereometriju – Veronese naposljetku zaključuje praktičnim aksiomom (A_p3), kojim kodificira našu intuiciju o trodimenzionalnosti fizičkoga prostora (Veronese 1891: 454), dakle nakon više od 250 stranica vrlo složenoga i u svakom pogledu atipičnog i idiosinkratičnog izlaganja. Moglo bi se reći da su u slučaju *Fondamenti* sadržajnost izlaganja, s jedne strane, te njegova jasnoća i preciznost, s druge, u obrnuto razmjernom odnosu.[403] Može li se, međutim, aksiomatizacija iz *Elementi* (1897) doista smatrati „najtransparentnijom mogućom izgradnjom elementarne geometrije“, kako ju je okarakterizirao Contro?

U uvodnom dijelu ovoga odjeljka već smo naznačili glavne točke u kojima aksiomatizacija elementarne geometrije iz *Elementi* odstupa od aksiomatskog sustava iz *Fondamenti* te ga ujedno i pojednostavnjuje. Kao što će istaknuti i sâm Veronese, „čisto znanstvena istraživanja o osnovama geometrije“ – *Fondamenti* nesumnjivo predstavljaju paradigmatski primjer – „sama su po sebi iznimno teška te iziskuju mnogo vremena i nemalo odricanja“, dodajući pritom i sljedeće:

> „Ako vas privlače opći pojmovi, zamarat će vas pojedinosti koje su nužne [za uspostavljanje odgovarajućeg aksiomatskog sustava]. Posebna teškoća sastoji se u tome što se nove ideje i metode ne pojavljuju uvijek u umu već pri prvom pokušaju u najjasnijem i najelegantnijem obliku. No, *ta istraživanja još težima čine ukorijenjene predrasude* (*pregiudizî inveterati*) *s kojima se neizbježno suočavaju čim makar i neznatno odstupaju od prevladavajućih metoda i ideja* (*quando si allontanano dai metodi e dalle idee predominanti*). Mnogi od onih koji su već po navici skloni površno promatrati takva pitanja i to samo s određenoga stajališta teško da će vas uopće pratiti, a bit ćete sretni ako vas ne budu smatrali metafizičarima-vizionarima ili ako, kako bi ostavili dojam da su pročitali i razumjeli vaš rad, ne budu pokušavali diskreditirati ga dvosmislenim riječima i opaskama, izbjegavajući pritom dati bilo kakvo pristojno objašnjenje. Stoga se u ovakva spekulativna istraživanja načela geometrije ne bi trebalo upuštati osim ako ne vjerujete da time, u mjeri u kojoj vam to vlastite snage dopuštaju, ispunjavate određenu dužnost prema znanosti, zadovoljavajući se jedino unutarnjim osjećajem ispunjenosti koji pruža dovršeno djelo (*l'opera compiuta*). Ako je *novost prepreka brzom širenju* (*la novità è un ostacolo per la pronta diffusione*) ovakvih znanstvenih istraživanja, onda to još više vrijedi za školski udžbenik (*un'opera scolastica*). Nastojao sam uzeti u obzir didaktičke zahtjeve, ali *zasigurno nisam utrošio toliko vremena na jedan nimalo lak pothvat zbog nade u slavu ili materijalnu korist* (*per la speranza di fama o di lucro*). To sam vrijeme, naime, možda mogao posvetiti i nekim zanimljivijim istraživanjima. Kao što je i Cremona dobro rekao, *u Italiji se ne događa uvijek da knjiga koja nije loša postigne uspjeh* (*in Italia non accade sempre che un libro non pessimo trovi fortuna*). *Ovu sam knjigu napisao u jedinoj nadi da će dati nezanemariv doprinos rješavanju problema nastave elementarne geometrije te da će je nepristrani i dobronamjerni nastavnici srednjih škola, koji vjeruju u progresivan razvoj znanosti i nisu opterećeni predrasudama, ispitati s otvorenošću te, ako je u cjelini budu smatrali vrijednom – čemu se iskreno nadam – biti spremni iskušati je* [*u nastavnoj*

[403] Zahvaljujem prof. Slobodanu Vujoševiću na ovoj formulaciji koja, smatram, vrlo dobro i vrlo sažeto sažima temeljni problem povezan s *Fondamenti*.

praksi]. […] *Sa zahvalnošću ću prihvatiti zapažanja i napomene nepristranih i konstruktivnih kritičara.*" (Veronese 1897: xx–xxi, moj kurziv)

Kao što možemo vidjeti, ovaj je odlomak, napisan svega pet godina nakon objavljivanja *Fondamenti* (15. 12. 1896.), intoniran prilično pesimistično. Plauzibilno je pretpostaviti da je razlog tomu ponajprije negativna recepcija *Fondamenti* u prethodnom razdoblju, osobito u Italiji i u vezi sa sporom s Peanom (usp. Odjeljak [2.3] i [3.1.1]). I ovdje, kao i u pojedinim odlomcima *Fondamenti* s kojima smo se već susreli u Odjeljku [1.1], Veronese govori o *predrasudama* koje iskrivljuju i onemogućuju primjerenu recepciju i daljnje širenje njegovih novih ideja i rezultata iz područja zasnivanja geometrije. Čini se da u tom trenutku odustaje od nastojanja da razuvjeri „one koji su opterećeni predrasudama" (Peano, Cantor *et al.*) te se okreće problemima metodike nastave geometrije i, slijedom toga, mijenja ciljanu publiku: umjesto profesionalnih matematičara, početkom 20. stoljeća to prije svega postaju nastavnici matematike u talijanskim srednjim i višim školama. Tu je okolnost važno imati na umu pri pokušaju ispravnoga razumijevanja i kritičke evaluacije povijesti recepcije Veroneseovih ideja. U tom svjetlu ne bi trebalo čuditi što će pojedini tumači istaknuti da su „Veroneseova pionirska istraživanja nastavili školski nastavnici bez ikakvih akademskih uspjeha i postignuća." (Avellone *et al.* 2002: 384) Međutim, takva ocjena nije posve precizna, a nije ni sasvim točna. Već sam pokazao da su *Elementi*, unatoč tomu što su bili zamišljeni kao udžbenička publikacija za srednjoškolsku nastavu, ipak naišli na recepciju izvan metodičko-didaktičkoga miljea, i to upravo unutar Talijanske škole, ponajprije u Pierijevim radovima posvećenima osnovama geometrije (usp. nap. 379 *supra*). U drugom izdanju *Elementi* iz 1900., Veronese je u predgovoru, napisanom u rujnu 1899., iznio napomenu donekle sličnu prethodno citiranoj, u kojoj je također prilično očit njegov resentiman:

> „Kao što su nova znanstvena istraživanja o principima geometrije bila osporavana i ismijavana, toliko da je veliki Gauß izjavio kako nije objavljivao ništa o novoj teoriji paralela, bojeći se 'galame Beoćana' (*das Geschrei der Beoten*), tako ne treba čuditi ni to što nova istraživanja koja predstavljaju prirodnu posljedicu prethodnih [sc. Gaußovih] istraživanja i *koja nastoje unijeti dašak modernosti* (*un soffio di modernità*) čak i u nastavu elementarne geometrije *te je postaviti na rigoroznije temelje* (kao što je to već učinjeno i kao što se još uvijek čini u slučaju racionalne aritmetike) *nailaze na žestoke protivnike* (*trovano accaniti oppositori*). […] Učenici, koji nisu opterećeni predrasudama, imaju um otvoreniji za nove metode i nove istine. A prije svega, da bi se uopće mogla prosuditi nova knjiga ove vrste [poput *Elementi*], potrebno ju je pažljivo pročitati i zatim iskušati u nastavi, osobito kada je već preliminarno ispitivanje dalo zadovoljavajuće rezultate. *Tek tada kritika može biti doista djelotvorna*. Stoga nije dopušteno, kao što su neki činili, prosuđivati moju knjigu na temelju jedne ili dviju rečenica nekog empirijskog zapažanja (*osservazione empirica*). […] Ima i kritičara koji sebi pridaju važnost baveći se nebitnim pojedinostima i tiskarskim pogreškama u knjigama drugih autora (*occupandosi delle minuzie e degli errori di stampa dei libri altrui*). Primjerice, zgražaju se ako netko kaže 'dvije točke' umjesto 'dvije različite točke', premda je iz konteksta posve jasno da se upravo na to misli. […] Vrsta kritike koju

cijenim i na kojoj sam uvijek zahvalan jest inteligentna i nepristrana kritika (*la critica intelligente e imparziale*)." (Veronese 1900a: xii–xv, moj kurziv)[404]

Prije nego što pristupimo rekonstrukciji aksiomatizacije iz *Elementi*, valja napomenuti da već i letimičan pregled teksta pokazuje kako je riječ o djelu posve drukčijem od *Fondamenti*. Izlaganje je sažetije i konciznije te znatno pojednostavljeno, ponajprije stoga što ili uopće nema različitih vrsta digresija u obliku napomena i različitih vrsta zapažanja ili je njihov broj bitno smanjen. Govori se isključivo o postulatima odnosno aksiomima[405], bez uvođenja dodatnih aksiomatskih pretpostavki druge vrste (poput Veroneseovih hipoteza)[406], a, što je možda i najvažnije, način izlaganja neposredniji je i takoreći *in medias res*. Sve to rezultira matematičkom prozom koja je u osnovi prepoznatljiva i, samim time, znatno pristupačnija suvremenom čitatelju – v. *Sl. 25a–b infra*. Knjiga započinje kratkim pregledom osnovnih logičkih pojmova i njihovih definicija (odjeljak „Nozioni generali", str. 1–5 drugoga izdanja), nakon čega prva knjiga, posvećena rektimetriji, odmah započinje izlaganjem osnovnih svojstava pravca te formuliranjem prvoga postulata i odgovarajućih definicija (§1), već na osmoj stranici. Podsjećanja i usporedbe radi, prvi se aksiom u *Fondamenti* pojavljuje tek na stranici 210.

Kao i u *Fondamenti*, Veronese će i u *Elementi* inzistirati na tome da broj aksioma mora biti što manji, ali istodobno dovoljno velik da osigura najveću moguću ekspresivnu moć sustava, kao i na tome da aksiomi moraju biti formulirani „apstrahiranjem od intuicije" (*astraendo dall'intuizione*), odnosno od intuitivnog sadržaja osnovnih geometrijskih pojmova, i to na način da rezultirajući geometrijski sustav bude sveden na „sustav logički dobro određenih istina neovisan o njihovu geometrijskom značenju" (*un sistema di verità logicamente ben determinato, indipendente cioè dal loro significato geometrico*) (Veronese 1897: vi–vii), kao što je to slučaj u aritmetici (Veronese 1900a: ix). Dakle, nužno je da formulacije geometrijskih tvrdnji, kao i zaključivanje te, osobito, dokazi teorema, budu neovisni „o intuitivnim pojmovima" i, općenito uzev, „o svemu onome što uvodi logički neodređene koncepcije" (1897, *loc. cit.*).

[404] Iako ga Veronese ne spominje, ovdje gotovo sigurno misli na Peana, budući da je upravo on u svojoj recenziji *Fondamenti* iz 1892. prigovorio Veroneseu zbog *sgrammaticature abituali*, kao i zbog nedovoljno preciznog izražavanja. Usp. nap. 146 *supra*.

[405] Za razliku od *Fondamenti*, Veronese u *Elementi* govori o geometrijskim postulatima, premda u jednoj napomeni (str. 7, nap. 2) ističe da ne smatra kako postoji ikakva razlika između aksioma i postulata te da je zapravo svejedno kojim se od ta dva pojma služimo. Već u izdanju *Elementi* iz 1900. godine, u odjeljku „Nozioni generali", Veronese govori samo o „postulatu ili aksiomu" (usp. Veronese 1900a: 4).

[406] I u *Elementi* pojavljuju se praktični aksiomi, i to isti oni kao i u *Fondamenti* – (A_p1), (A_p2) i (A_p3) – s tom razlikom što Veronese već u predgovoru donosi zanimljivu napomenu da bi se i Arhimedov aksiom mogao smatrati praktičnim aksiomom, premda bi to zahtijevalo proširenje teksta knjige (Veronese 1897: x)

LIBRO PRIMO

§ 1.

Prime proprietà della retta

5. Oss. emp. I. — Per *punto materiale* intendesi una particella di un corpo qualsiasi, che si considera come non scomponibile in parti.

Oss. emp. II. — Ad altri oggetti simili a questo si dà il nome di *punto*.

Ciò che limita un corpo da ciò che lo circonda dicesi *superficie* del corpo. — Ad es. ciò che vedesi di un corpo è tutta o una parte della sua superficie. — Per *punto* intendesi anche una particella di superficie, come ad es. il segno tracciato sul foglio da una punta finissima.



Fig. 1

Se si separa da una superficie una sua parte, come ad es. da quella del foglio teso del disegno; il termine di questa parte chiamasi *linea*. E per *punto* intendesi anche un trattino di linea non scomponibile in parti, o ancora l'estremità *P* di una linea (come ad es. quella dell' orlo superiore dell' oggetto della fig. 1). *)

---

*) Coll'idea del corpo è legata quella del *luogo* da esso occupato; e per *punto* intendesi ancora il luogo occupato dall'estremità d'una linea.

Per *punto* intendesi anche l' imagine prodotta in noi per mezzo della vista o del tatto dall'estremità di una linea. I punti sopra accennati sono segni esteriori di questo punto; ma è logicamente indifferente in questo trattato di considerare come punto uno o l' altro degli oggetti sopra indicati con tal nome.

Sl. 25a. Faksimil str. 7 Veroneseovih *Elementi di geometria* (Lib. I, §1, „Prime proprietà della retta“)

POST. I. — Esistono punti distinti.

Def. — Dicesi *figura* qualunque gruppo di punti o un insieme di gruppi di punti, considerati come elementi.

Oss. — Il *punto* è pertanto l'elemento fondamentale di ogni figura. I punti si indicheranno con lettere maiuscole.

Dich. — *Geometria* dicesi la scienza che tratta delle figure.

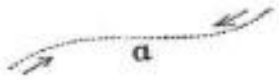


Fig. 2

6. Def. I. — 1) *Sistema lineare di punti* (fig. 2) è un gruppo di punti dotato di due ordini, l'uno inverso dell'altro. Ciascuno degli ordini del gruppo dicesi *verso* del sistema.

Oss. emp. — I due versi nella fig. 2 sono indicati dalle freccie.

2) *Segmento* dicesi ogni parte di un sistema lineare limitata da due punti o il sistema stesso se è limitato da due punti (n. 2). E per *parti* di un segmento intendonsi i segmenti in esso contenuti.

Se A e B sono i punti del segmento, fra i quali si trovano gli altri punti del segmento stesso, i punti A e B si dicono *estremi* del segmento, e gli altri punti compresi fra essi chiamansi *interni* al segmento.

Il segmento considerato nel verso da A a B si indica con (AB) o con AB; il segmento inverso, con (BA) o con BA. Ove però non sia necessario indicare il verso, il segmento potrà essere dinotato con una sola lettera minuscola, ad es. a.

Def. II. — 1) Se il sistema lineare è poi tale che si possa riguardare come un segmento i cui estremi,

Sl. 25b. Faksimil str. 8 Veroneseovih *Elementi di geometria* (Lib. I, §1, „Prime proprietà della retta“)

Naravno, to ne znači da je intuicija nepoželjna i u čisto didaktičkom kontekstu; naprotiv, Veronese smatra da bi svaku tvrdnju i svaki korak u dokazu trebalo „neprestano oživljavati prostornom intuicijom“ (*continuamente vivificati dall'intuizione spaziale*), budući da to pridonosi razvoju „geometrijske imaginacije“ (*imaginativa geometrica*) i održava je živom (1897: viii; 1900a: xi).[407] Tako empirijska zapažanja koja se pojavljuju u *Elementi* služe isključivo tome da motiviraju ili opravdaju uvođenje pojedinih aksioma ili definicija te da olakšaju njihovo razumijevanje, dok potpunija i što je moguće stroža znanstvena razjašnjenja valja potražiti u *Fondamenti* ili u *Appendice agli Elementi* (1898a), jer je upravo u tim dvama spisima Veronese temeljito (*a fondo*) razmotrio pitanja (i) logičkih odnosa među aksiomima i (ii) najvažnijih posljedica aksioma elementarne geometrije. Strogo uzevši, empirijska zapažanja ni u kojem smislu ne čine sastavni dio „logičkog razvoja geometrije“, pa tako ni Veroneseova aksiomatskog sustava, nego služe isključivo kao usputne eksplanatorne napomene (1900a: x).

Pogledajmo sada kako izgleda sama aksiomatizacija. U nastavku ću se uglavnom oslanjati na drugo izdanje *Elementi* iz 1900., pri čemu ću na prvi i drugi dio upućivati oznakama 1900a odnosno 1900b, a, kao i u slučaju *Fondamenti*, reference ću navoditi brojevima stranica u uglatim zagradama. Kada se budem pozivao na prvo izdanje iz 1897., to ću eksplicitno i naznačiti. Kada je riječ o osnovnim pojmovima, *točki* i *pravcu*, imamo sljedeće:

(**A_E I**)	Postoje različite točke. [1900a: 8; up. sa (A_F I) *supra*]
(**DEF. 1**)	Ma koji skup točaka ili skup skupova točaka koje promatramo kao elemente nazivamo *figurom*. [1900a: 8]
(**DEF. 2**)	*Linearni sustav točaka predstavlja* skup točaka koji je uređen u dva smjera tako da je jedan suprotan [sc. inverzan] (*inverso*) drugomu. Svaki od ta dva uređaja nazivamo *smjerom sustava* (*verso del sistema*). [1900a: 8]
(**DEF. 3**)	Svaki omeđeni dio linearnoga sustava [točaka] naziva se *dužinom* ili, alternativno, sam sustav nazivamo dužinom ako je omeđen dvjema točkama.[408] Svaka dužina sadrži [krajnje] točke koje je omeđuju, kao i sve točke između njih.[409] Pod *dijelovima dužine* podrazumijevamo sve dužine koje su u njoj sadržane. [1900a: 8]
(**DEF. 4**)	Ako je linearni sustav [točaka] takav da se može promatrati kao dužina čiji se krajevi, promatrani neovisno o sustavu, podudaraju ili poklapaju (*coincidono*),

[407] S tim u vezi, v. Veroneseovu posljednju publikaciju, „Osservazioni intorno ad una polemica“ (Veronese 1914). Koliko mi je poznato, nitko od dosadašnjih tumača nije ni primijetio da ovaj Veroneseov rad, posvećen metodici i didaktici nastave geometrije u srednjim školama i tiskan u *Bolletino della Mathesis*, uopće postoji.

[408] Usp. 7. Oss. emp. I u Veronese 1900a: 9, gdje Veronese navodi da će svaku ograničenu pravu naprosto nazivati dužinom.

[409] Kao što sam već istaknuo u nap. 4, očito je da Veronese u *Elementi* pod dužinama podrazumijeva isključivo zatvorene dužine, dok takvo ograničenje u aksiomatizaciji iz *Fondamenti* ne postoji.

tada se za sustav kaže da je *zatvoren*; u protivnom ćemo ga smatrati *otvorenim*. [1900a: 8–9][410]

(**DEF. 5**) Iskaz „Dužina a jednaka je dužini b" znači da između točaka dužina a i b postoji *izomorfizam* (*una corrispondenza univoca e del medesimo ordine*), odnosno bijektivno preslikavanje koje čuva uređaj (poredak) elemenata[411], te, slijedom toga, da se svaki iskaz koji se može formulirati o dužini a ili o nekom njezinu dijelu može formulirati i za dužinu b ili za njezin odgovarajući dio, i obratno. Kako bismo naznačili da je dužina a jednaka dužini b, pišemo $a \equiv b$.

(**A_E II**) Postoji linearni sustav točaka koji nazivamo *pravcem*, za koji vrijede sljedeća svojstva:

(i) Ako su a i b dužine danoga sustava promatrane u nekom smjeru, tada su ili jednake ili nejednake, odnosno vrijedi ili $a \equiv b$ ili $a \not\equiv b$. Za svaku dužinu a vrijedi $a \equiv a$. Nijedna dužina ne može istodobno biti i jednaka i nejednaka nekoj drugoj dužini. Naposljetku, ako je $a \equiv b$ i $b \equiv c$, tada je i $a \equiv c$. [v. prethodnu DEF. 5, kao i str. 10–11 *Elementi*]

(ii) Nijedna dužina nije jednaka nekom svom dijelu. Svaka dužine (AB) jednaka je svom inverzu (BA) ili, kraće rečeno, svaka je dužina *invertibilna*.

(iii) Ako su na pravcu zadani točka A i proizvoljna dužina (XY), tada u zadanom smjeru na pravcu postoje dvije dužine, od kojih ima jedan kraj u A, a druga drugi kraj u A, te su obje jednake dužini (XY). [1900a: 11–12]

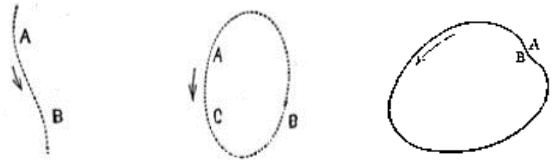
(**DEF. 6**) Svaki linearni sustav točaka koji zadovoljava uvjete i–iii specificirane u (A_E II) naziva se *linearni homogeni sustav*.[412] [1900a: 12]

(**A_E III**) Pravac je svakom svojom točkom podijeljen na dva dijela odnosno, drugim riječima, *pravac je otvoren*. [1900a: 20]

Alternativna formulacija: Svaka se dužina može podijeliti na dva jednaka dijela. [*Appendice agli Elementi*, 1898a: 5–8][413]

---

[410] Veronese *ad loc. cit*. donosi sljedeću sliku kao ilustraciju DEF. 4; s lijeve je strane prikazana otvorena, a s desne zatvorena linija. Još jedan primjer zatvorene linije Veronese navodi i u *Nozioni elementari di geometria intuitiva* (1912: 3).



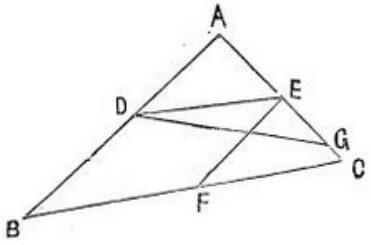
[411] Contro doslovno kaže „eine eineindeutige ordnungserhaltende Abbildung" (1968: 93).

[412] Upravo pravac, i to u smislu u kojem je prethodno određen posredstvom (A_F IIa) (ili, alternativno, HIP. I) i DEF. 3 iz *Fondamenti*, predstavlja paradigmatski primjer jednodimenzionalnoga linearnog homogenog sustava koji, u svjetlu DEF. 4 iz *Elementi*, može biti otvoren ili zatvoren (usp. Veronese 1900a: 12, Oss. III). Primijetite da uvjet (ii) iz (A_E II) omogućuje Veroneseu da iz *Elementi* izostavi dodatnu, nezgrapnu karakterizaciju pravca kao sustava koji je „identičan s obzirom na položaj svojih dijelova".

[413] U *Appendice agli Elementi* Veronese ističe da se (A_E III) zapravo može dokazati pomoću aksioma (A_E XI) i (A_E XII) (v. *infra*), kao i da aksiomi II, XI i XII (= Arhimedov aksiom) „određuju pravac po sebi (*la retta in sè*),

(**A_E IV**) Postoje točke izvan pravca. Postoji samo jedan pravac koji sadrži dvije zadane točke. [1900a: 20][414]

(**DEF. 7**) Pod pravocrtnom figurom (*figura rettilinea*) određenom trima nekolinearnim točkama A, B i C, podrazumijevamo sustav dužina (AB), (BC), (CB), kao i dužine (ED), (FE), (GD) koje povezuju točke prvih triju dužina, …, i tako dalje (v. sliku).

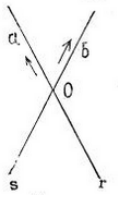


Općenito uzev, pod pravocrtnom figurom nekoga zadanog sustava točaka podrazumijevamo figuru određenu dužinama (*determinata dai segmenti*) čije su krajnje točke (*estremi*) upravo te zadane točke, kao i dužinama određenima točkama tih prethodnih dužina, i tako dalje. [1900a: 21][415]

(**DEF. 9**) Iskaz „Pravocrtne figure F i F' su jednake“ znači da je između njihovih točaka moguće uspostaviti preslikavanje koje je bijektivno i invertibilno (*una corrispondenza univoca e del medesimo ordine*) tako da dužinama jedne odgovaraju dužine druge figure. Općenito uzev, bilo koje dvije nepravocrtne figure (*due figure non rettilinee*) jednake su ako se mogu dovesti u korespondenciju s [dijelovima] jednakih pravocrtnih figura. Ta se korespondencija između jednakih figura naziva *relacijom jednakosti*. [1900a: 22]

(**A_E V**) U svakom pravcu postoji dužina jednaka proizvoljnoj dužini nekoga drugog pravca. [1900a: 25]

(**DEF. 10**) Pravocrtna figura određena dvama usmjerenim pravcima (v. sliku) naziva se *par pravaca* (*coppia di rette*) i označuje se s (ab).



Ako dva pravca imaju zajedničku točku [poput točke O], nazivamo je *vrhom* para (*vertice*), a svaki par pravaca omeđen zajedničkom točkom nazivamo *parom zraka* (*coppia di raggi*). [1900a: 26]

---

odnosno neovisno o prostoru“. Međutim, iz didaktičkih je razloga na početku *Elementi* ipak uveo aksiom (A_E III), premda on „strogo govoreći nije nužan“, kako bi „izbjegao uvođenje infinitezimala u ranoj fazi poučavanja“ i ne bi prerano uvodio aksiome neprekidnosti, budući da se oni prvi put pojavljuju tek u četvrtoj knjizi *Elementi* (Veronese 1898a: 5).

414 Prvi dio aksioma omogućuje konstrukcije u ravnini, dok se drugim dijelom isključuje sferna, odnosno Riemannova geometrija. Kao što je već rečeno, Veronese se u *Elementi* usredotočuje isključivo na elementarnu euklidsku geometriju.

415 Primijetite da je ova definicija ekvivalentna DEF. 4 iz *Fondamenti* (v. *supra*).

(**A_E VI**) Par zraka (ab) sa vrhom u O invertibilan je, odnosno, jednak je inverznom paru zraka (ba). [1900a: 26][416]

(**DEF. 11**) Kažemo da je figura A', B', C' *nasuprotna* (*opposta*) nekoj drugoj figuri A, B, C s obzirom na točku O, ako su dužine $(OA'), (OB'), (OC'), \ldots$ prve figure redom jednake i nasuprotne dužinama $(OA), (OB), (OC), \ldots$ druge figure (drugim riječima, obje figure leže na istom pravcu koji prolazi točkom O, samo na različitim stranama, odnosno u različitim smjerovima od točke O). Prema ovoj definiciji, figura koja je nasuprotna nekoj drugoj s obzirom na zadanu točku jedinstvena je (*e unica*). [1900a: 27]

(**DEF. 12**) Dva se pravca nazivaju *paralelnima* ako jedan od njih sadrži dvije točke nasuprot dvjema točkama drugoga s obzirom na zadanu točku. [1900a: 28][417]

(**DEF. 13**) *Transverzalom* dvaju pravaca $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ naziva se dužina (AA') čije se krajnje točke (*estremi*) A i A' nalaze na tim pravcima. [1900a: 27]

(**A_E VII**) Dva paralelna pravca nasuprotna su s obzirom na *središnju točku* (*punto di mezzo*, *Mittelpunkt*) svake njihove transverzalne dužine. [1900a: 28][418]

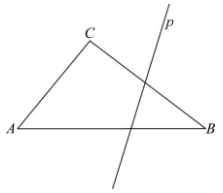
---

[416] Kao što možemo vidjeti, aksiom (A_E VI) predstavlja sažetiju *reformulaciju* aksioma (A_F V) iz *Fondamenti*. Contro ističe da se ovdje prvi put u povijesti geometrije važnost aksioma refleksije, odnosno simetrije ravnine, eksplicitno ističe u okviru aksiomatskoga zasnivanja elementarne planimetrije, budući da je u *Fondamenti* bio tek prešutno pretpostavljen. Aksiomi simetrije pojavljuju se već kod Pascha u *Vorlesungen*, ali nisu eksplicirani jer u njegovu izlaganju figuriraju „samo kao jedna od točaka u aksiomatskoj karakterizaciji kongruencije odnosno podudarnosti" (Contro 1968: 95; usp. i nap. 1 *ad loc.*). S druge strane, (A_E VI) Veroneseu omogućuje da u nastavku uvede pojam kuta (§2) bez ikakvih dodatnih aksiomatskih pretpostavki specifičnih za kutove, da izvede sve relevantne teoreme o kongruenciji te da, zajedno s aksiomom paralelnosti, izvede podudarnost trokuta (§6). Time aksiom neprekidnosti ravnine (A_F IV) iz *Fondamenti* postaje suvišan, budući da se sva relevantna svojstva ravnine i ravninskih figura sada mogu izvesti pomoću aksioma (A_E IV) i aksiomâ neprekidnosti iz *Elementi* (usp. Contro, *op. cit.*, nap. 952, str. 213). Kao što je poznato, nakon Veronesea Hilbert će prvi sustavno istaknuti ulogu aksioma simetrije i, općenito, inzistirati na refleksijama pravca (*Spiegelungen an einer Geraden*) u zasnivanju geometrije u *Grundlagen*. V. i disertaciju Hilbertova studenta i asistenta H. Arnolda Schmidta, „Die Herleitung der Spiegelung aus der ebenen Bewegung" (*Math. Ann.*, Bd. 109, str. 538–571, 1934), na koju Paul Bernays (1888–1977) skreće pozornost u predgovoru sedmom izdanju *Grundlagen*.

[417] Primijetite da aksiom (A_E VI) omogućuje Veroneseu da uvede pojam paralelnosti *neovisno* o pojmu ravnine i bilo kakvim planimetrijskim razmatranjima, kao i bez ikakva pozivanja na beskonačnost, odnosno na točke u beskonačnosti. Usporedbe radi, prisjetimo se da je u *Fondamenti* pojam točaka u beskonačnosti bio nužan za definiciju i karakterizaciju paralelizma (posredstvom TEOR. I–VII).

[418] Budući da aksiom (A_E II, i) jamči jedinstvenost prijenosa dužina, iz njega neposredno slijedi i jedinstvenost paralela, kao i standardni euklidski stav da se paralelni pravci ne sijeku, zahvaljujući aksiomu (A_E IV). U nastavku izlaganja (str. 28 ff.) Veronese kao teoreme dokazuje tvrdnje da se kroz točku izvan zadanoga pravca može povući jedna i samo jedna paralela na taj pravac (TEOR. I) te da paralelni pravci nemaju zajedničkih točaka (TEOR. II).

[419] U *Appendice* Veronese pokazuje kako se ovaj aksiom može dokazati pomoću aksioma neprekidnosti i prethodno uspostavljenih aksioma, osobito (A_E VI) i (A_E VII) (Veronese 1898a: 9 ff.). Primijetite da (A_E VIII), ovako formuliran, u sebi uključuje Paschov aksiom, kojim se tvrdi da pravac koji siječe zadani trokut, a ne prolazi ni kroz jedan njegov vrh, siječe dvije stranice toga trokuta (v. sliku). Usp. i Controvu napomenu o „afinitetu" između aksioma o paralelama i svojstava rasporeda (*Anordnungseigenschaften*) (1968: 96, nap. 1).



(**A_E VIII**) Ako se iz unutarnje (ili vanjske) točke na jednoj stranici trokuta povuče pravac paralelan drugoj stranici, tada taj pravac siječe treću stranicu trokuta u unutarnjoj (ili vanjskoj) točki. [1897: 31; usp. i *Appendice agli Elementi*, str. 9–14][419]

(**DEF. 14**) Figura sastavljena od svih pravaca koji povezuju točke nekoga zadanog pravca r s točkom P koja se nalazi izvan njega, zajedno s pravcem kroz P paralelnim s r, naziva se *pramen pravaca*, *pramen zraka* ili jednostavno *ravnina*, ovisno o tome uzimamo li kao [fundamentalni] element pravac, zrak ili točku. Sustav točaka određen pramenom pravaca naziva se ravnina. [1900a: 31–32]

Nakon što je izložio prvi dio aksiomatizacije, odnosno Aksiome I–VIII, Veronese izvodi više od deset teorema koje zajedno pružaju karakterizaciju svih relevantnih relacija incidencije, odnosno rasporeda u ravnini, a većinom slijede iz (A_E VIII). Neću ih ovdje sve navoditi; v. Veronese 1897: 30–60, kao i Contro 1968: 97–98. Drugi dio Veroneseove aksiomatizacije iz *Elementi* glasi ovako:

(**A_E IX**) Ako su a i b udaljenostiizmeđu neke točke P i krajnjih točaka A i B neke dužine (ili kružnog luka) (AB) te ako je $a < b$, tada postoji barem jedna točka X na (AB) takva da je dužina (PX) jednaka dužini c koja leži između a i b, odnosno $a < c < b$. [1897: 85][420]

(**A_E X**) Postoje točke izvan (*fuori*) ravnine. [1897: 105][421]

(**DEF. 17**) Figura sastavljena od pravaca koji povezuju točke neke ravnine π (uključujući i točke u beskonačnosti) s točkom O koja se nalazi izvan ravnine π naziva se *zvijezdom pravaca*, *zvijezdom zraka* ili *prostorom*, ovisno o tome uzima li se kao temeljni element pravac, zrak ili točka. Sustav točaka određen zvijezdom pravaca naziva se *geometrijskim prostorom* ili, jednostavnije, *prostorom*. [1900b: 1–2; primijetite da je definicija prostora potpuno analogna prethodnoj definiciji ravnine, DEF. 14][422]

---

[420] Aksiom (A_E IX) uključuje u sebe aksiom (A_E III) te se, kao i (A_E III), može izvesti iz aksioma neprekidnosti. Contro ga naziva „temeljnim konstrukcijskim postulatom (*grundlegende Konstruktionspostulat*) Euklidovih *Elemenata*, koji sâm Euklid, doduše, ne navodi eksplicitno“ (1968: 99). Za razvoj elementarne planimetrije dovoljni su aksiomi I–IX, pa nije potrebno uvoditi aksiome neprekidnosti.

[421] Deseti aksiom nužan je za uvođenje višedimenzionalnih struktura odnosno, preciznije, omogućuje prijelaz s planimetrije na stereometriju. U radu „Nota sul metodo degli elementi all'infinito“ (*Elementi*, Parte seconda, Libro III, 1900b: 22 ff.) Veronese ističe da tranzitivnost paralelizma (ako je $a \parallel b$ i $b \parallel c$, tada je i $a \parallel c$) omogućuje uvođenje takozvanih *idealnih elemenata*, odnosno točaka u beskonačnosti. Pritom iskaz „povezati točku P s točkom u beskonačnosti nekoga pravca r“ znači „povući kroz P pravac r' paralelan pravcu r“, tako da se, „imajući u vidu takav *façon de parler* (*modo di dire*), može reći da se dva paralelna pravca sijeku u beskonačnosti“ (1900b: 22, Dich. i Oss. II).

[422] Podsjetimo da je postupak kojim se u DEF. 14 i DEF. 17 konstruiraju ravnina, odnosno prostor, u *Fondamenti* uopćen kako bi se omogućila konstrukcija višedimenzionalnih prostora.

(**A_P1**) Ako su zadani neka ravnina i neka točka O izvan nje, svaki pravac koji prolazi kroz O siječe ravninu u točno jednoj točki ili je paralelan nekom pravcu te ravnine. [1897: 112][423]

(**A_P2**) [AKSIOM GIBANJA BEZ DEFORMACIJE] Zadana se figura može slobodno gibati (*muoversi liberamente*) po pravcu, u ravnini ili u prostoru, ostajući pritom kongruentna sama sebi (*mantenendosi congruente a se stessa*) [sc. jednaka s obzirom na veličinu i orijentaciju], čak i ako neke njezine točke ostaju nepomične odnosno fiksirane. [1897: 198][424]

Veronese zatim uvodi neprekidnost dvama nezavisnim aksiomima:

(**A_E XI**) Ako bilo koja duž (XX') nekog zadanog pravca ima krajnje točke koje neprestano variraju u suprotnome smjeru (*gli estremi sepre variabili in verso oposto*), tada ona sadrži barem jednu točku različitu od svojih krajnjih točaka. [1897: 205][425]

(**A_E XII**) [ARHIMEDOV AKSIOM] Ako su zadane dvije nejednake dužine na istom pravcu, uvijek postoji neki [konačni] višekratnik manje dužine koji nadmašuje veću. [1897: 207, 1900b: 77]

Kao što smo već vidjeli u Odjeljku [2.6.3], aksiom (A_E XI) izražava neprekidnost pravca u Cantorovu smislu[426] (takozvana neprekidnost u malom). Međutim, (A_E XI) ostavlja otvorenim pitanje postoje li beskonačne i infinitezimalne dužine. Tu mogućnost isključuje Arhimedov aksiom, odnosno (A_E XII), kojim se, kao što je poznato, tvrdi nepostojanje beskonačnih i infinitezimalnih elemenata neke zadane strukture. To znači da Veroneseovi aksiomi XI i XII, uzeti zajedno, čine pravac neprekidnim u Dedekindovu smislu, odnosno Dedekind-potpunim. Nakon što je formulirao aksiome neprekidnosti, Veronese u drugom dijelu *Elementi* (1900b) dovršava izlaganje elementarne euklidske geometrije razvijanjem,

---

[423] Kao i u slučaju *Fondamenti*, ovaj praktični aksiom nije nužan ni za jedno matematičko izvođenje ni dokaz, nego Veroneseu služi isključivo za ograničenje na trodimenzionalni prostor.

[424] Ovaj aksiom olakšava utvrđivanje jednakosti i nejednakosti dužina. Kao što je istaknuo Contro, kvalifikativ „slobodno" u izrazu „slobodno gibanje" ovdje valja shvatiti u smislu „moguće s obzirom na ono što dopuštaju Aksiomi I–X i (A_P1)" (Contro 1968: 100). *Ad loc.* dodaje i sljedeću napomenu: „Zbog praktičnog postulata II [sc. (A_P2)] sve konstrukcije koje se pojavljuju u teoriji doista su izvedive. Osim toga, on nam omogućuje razlikovanje podudarnih i simetričnih figura te izvođenje odgovarajućih teorema."

[425] U drugom izdanju *Elementi* nalazimo donekle izmijenjenu formulaciju (A_E XI): „Između dvaju uzastopnih nizova (*due serie contigue*) (X) i (X') točaka na pravcu koji nemaju prvu, odnosno posljednju točku, postoji barem jedna točka pravca." (Veronese 1900b: 74). Ova se formulacija oslanja na definiciju *uzastopnosti* iz četvrte knjige drugoga dijela *Elementi*: dva niza ili klase točaka (X) i (X') na pravcu nazivaju se *uzastopnima* (*contigue*) ako točke niza (X) prethode točkama niza (X') (ili obratno) te ako za svaku zadanu dužinu ε postoje dvije točke X i X' takve da je dužina (XX') manja od dužine ε (str. 73).

[426] Podsjetimo, Cantorov se aksiom standardno formulira ovako: ako je $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$,…, $[A_nB_n]$,… niz zatvorenih dužina (alternativno: niz ugniježđenih intervala) na nekom zadanom pravcu takav da za svako n vrijedi $[A_{n+1}B_{n+1}] \subset [A_nB_n]$, tada postoji barem jedna točka X takva da je $X \in [A_nB_n]$ za svako n (usp. Odjeljak [2.6.3]).

sasvim u skladu sa suvremenom praksom, *teorije mjere* i *teorije proporcija*. Posljednja dva aksioma iz *Elementi*, koja nalikuju svojevrsnim principima konzervacije oblika, glase:

(**A*E* XIII**) Nemoguće je neki konačni poligon odnosno mnogokut (*figura poligonale finita*) rastaviti na mnogokutne dijelove tako da, zanemarujući pojedine dijelove, preostali dijelovi, nakon što se drukčije rasporede (*anche se disposte in differente modo*), tvore figuru jednaku početnoj figuri. [1897: 223]

(**A*E* XIV**) Nemoguće je neki konačni poliedar (*figura poliedrica finita*) rastaviti na poliedarske dijelove tako da, zanemarujući pojedine dijelove, preostali dijelovi, nakon što se drukčije rasporede, tvore figuru jednaku početnoj figuri. [1897: 240]

Očigledno je da je, u usporedbi s izvornim sustavom iz *Fondamenti*, aksiomatizacija iz *Elementi* znatno elegantnija, preglednija i u logičko-matematičkom smislu superiornija. Contro će je nazvati *remek-djelom* (*ein Meisterstück*) koje je s pravom postalo uzor svakom kasnijem izlaganju elementarne geometrije, osobito u okviru Talijanske škole (1968, ¶3.18, str. 104), što će dva desetljeća poslije potvrditi i Cautiero i Gerla, ističući prije svega *originalnost* Veroneseova povezivanja metodičko-didaktičkih problema nastave geometrije s problemima njezina zasnivanja i aksiomatizacije (Cautiero & Gerla 1988, §5). Sažeto:

> „U svojim *Elementi Veronese je postigao cilj za kojim se bezuspješno tragalo još od početka modernoga razdoblja: znanstveno rigorozno* (*wissenschaftlich exakte*) *izlaganje elementarne geometrije koje ujedno može poslužiti i u nastavi*." (Contro, *op. cit.*, *ad loc.*, moj kurziv)[427]

Promatrano sa stajališta same aksiomatike, Veroneseov se pristup može smatrati odlučujućim korakom naprijed u odnosu na Paschovu aksiomatizaciju projektivne geometrije iz *Vorlesungen* (usp. Odjeljak [2.3]) utoliko što je Veronese uvidio da se – *contra* Pascha (i, zapravo, *contra* Peana) – sami aksiomi moraju promatrati kao iskazi prije svega *logičke naravi*, odnosno kao *čisto logička načela*, neovisna o ograničenjima koja neizbježno nameću vizualizacija i empirijska razmatranja te neovisna o svakom *ekstrageometrijskom* – empirijskom ili intuitivnom – opravdanju. Drugim riječima, primarni motivi kojima se valja rukovoditi pri izgradnji aksiomatskih sustava moraju biti *intrageometrijski*. Prema Controvu mišljenju, Veroneseov je pristup, unatoč rezervama koje je imao prema modernoj simboličkoj logici (v. nap. 190 *supra*), zapravo uspostavio *primat logike nad geometrijom u hijerarhiji pitanja koja se tiču osnova* (1968, ¶3.15, str. 86). O tome svjedoči činjenica da najveći dio uvoda u *Fondamenti* zauzima „teorija principa apstraktnih matematičkih formi", odnosno, jednostavnije rečeno, teorija temeljnih logičkih pojmova, relacija i operacija. S time su neposredno povezani *metamatematički desiderata*, odnosno kriteriji koje aksiomatski sustavi moraju zadovoljavati, a koje je Veronese specificirao već u predgovoru *Fondamenti*: sustavi moraju biti konzistentni i potpuni[428], sastojati se od najmanjega mogućeg broja najslabijih mogućih aksioma najveće

[427] Veronese je već u predgovoru *Fondamenti* istaknuo da svaka „rasprava o osnovnim matematičkim pojmovima ne može ne uzeti u obzir i didaktičku stranu pitanja" (1891: xxvi).

[428] V. Odjeljak [2.5] o metageometriji i metamatematici.

moguće izražajne moći, pri čemu ti aksiomi moraju biti međusobno nezavisni i implicitno definirati najmanji mogući broj primitivnih, odnosno osnovnih geometrijskih pojmova.

Još jedna važna razlika između *Fondamenti* i *Elementi* sastoji se u tome što je u *Elementi* vrlo lako razlučiti kako su pojedini dijelovi aksiomatskog sustava međusobno logički povezani. Naime, sve pretpostavke, odnosno aksiomi za koje nije eksplicitno naznačeno (bilo u samim *Elementi*, bilo u *Appendice*) da su dokazivi, odnosno da slijede iz drugih aksioma, međusobno su nezavisni. Nasuprot tomu, u *Fondamenti* je praktički nemoguće, barem ne na jednostavan i očit način, utvrditi koji aksiomi, hipoteze i praktični aksiomi ovise jedni o drugima i na koji način. Premda složeno i nerijetko neprozirno, Veroneseovo izlaganje u *Fondamenti* ipak nije kaotično (iako je jasno zbog čega bi se takvim moglo učiniti – usp. nap. 387). Za razliku od, primjerice, Hilbertovih *Grundlagen* ili Pierijevih aksiomatizacija, Veronese u *Fondamenti* (a najvećim dijelom tako postupa i u *Elementi*) aksiomatski sustav gradi *postupno*, korak po korak, odnosno aksiom po aksiom, a ne *en bloc*. Svaki novi aksiom kod Veronesea otvara ili odgovara nekoj novoj konceptualnoj mogućnosti, što rezultira nekonvencionalnom aksiomatikom koja po svojoj strukturi nalikuje stablu (*Axiomenstammbaum*), u kojem se aksiomi pojavljuju u *čvorovima*, odnosno upravo na onim mjestima na kojima su, s obzirom na dotad uspostavljene aksiome, moguća različita alternativna *grananja*. Na taj način aksiomi zapravo određuju razvoj pojedine geometrije duž određene *grane* (usp. Contro 1968: 87). To osobito dolazi do izražaja u Veroneseovu tretmanu n-dimenzionalne geometrije u *Fondamenti*, gdje višedimenzionalne prostore generira uzastopnim projekcijama pravaca i ravnina, a zatim neovisno ispituje geometrije koje im pripadaju. Takav mu pristup omogućuje da precizno odredi koji su aksiomi doista nužni za svaki pojedini *tip geometrije*, kao i koja su proširenja ili poopćenja rektimetrije tih alternativnih ili nearhimedovskih geometrija potrebna za razvoj planimetrije i stereometrije.[429]

Dodatak C. Leibnizova *analysis situs* i Veroneseov projekt zasnivanja geometrije

Većina suvremenih čitatelja pri spomenu *analysis situs* – situacijske analize – najvjerojatnije bi prvo pomislila na istoimenu seriju Poincaréovih radova objavljenih između 1895. i 1904. godine[430], u kojima je Poincaré praktički zasnovao suvremenu (algebarsku) topologiju kao autonomnu matematičku disciplinu. Povijesno je zanimljivo da je sâm Poincaré kao relevantan kontekst za razradu *analysis situs* vidio n-dimenzionalnu, odnosno hipergeometriju, čiji je pionir bio upravo Veronese, dodajući da „danas nitko ne sumnja da n-dimenzionalna geometrija ima realan objekt [istraživanja] (*un objet réel*)“ i da „entiteti hiperprostora podliježu jednako tako preciznim definicijama kao i oni uobičajenoga prostora,

[429] V. i Enriquesov prilog „Principes de la géométrie“, §11, odjeljak b. „Systemes de postulats de Veronese“, u *Encyclopédie des sciences mathématiques* (Enriques 1911: 29 ff.).

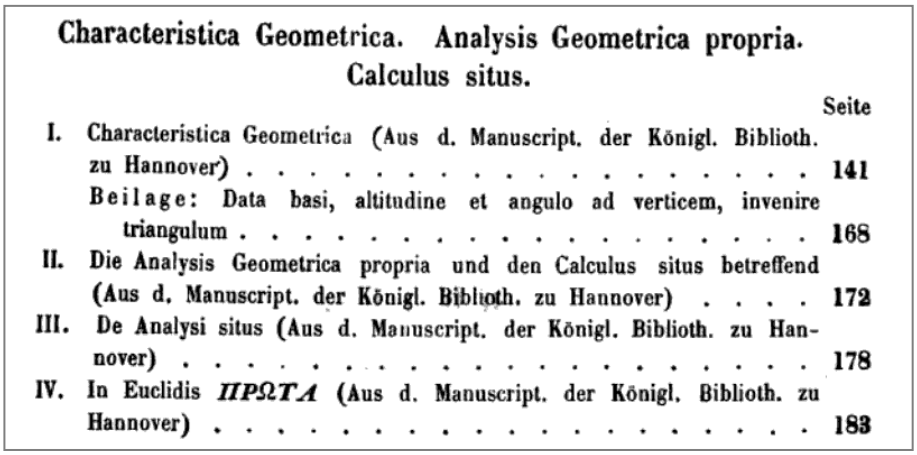
[430] Doduše, prvi važan anticipatorni rad, „Sur l'Analysis Situs“ (*C. r. des séances de l'Académie des sciences*), pojavio se već 1892., a prvi temeljni rad, „Analysis Situs“, Poincaré objavljuje 1895. (*Journal de l'École Polytechnique*, II$^{\text{ième}}$ série, I$^{\text{er}}$ cahier, str. 1–121). Sljedećih pet radova (1899.–1904.) Poincaré je objavio u obliku *compléments*, odnosno dodataka radu „Analysis Situs“. Za povijesni pregled Poincaréovih pionirskih doprinosa području topologije v. Gray 2012, Ch. 8, str. 427–466.

tako da ih, čak i ako ih ne možemo predočiti, možemo pojmiti i, samim time, proučavati.“ (Poincaré 1895: 1) Ta formulacija pokazuje da je svega pet godina nakon spora između Veronesea i Segrea, s jedne strane, i Peana, s druge (usp. Odjeljak [2.3]), među matematičarima postignut konsenzus o legitimnosti proučavanja geometrije hiperprostora. Drugim riječima, Veronese je definitivno odnio pobjedu nad Peanom. Međutim, ovdje nas ne zanima veza između Veroneseova pristupa zasnivanju geometrije i onoga što je Poincaré podrazumijevao pod *analysis situs* (čisto *kvalitativna geometrija*, „grana geometrije koja opisuje relativni položaj (*qui décrit la situation relative*) točaka, pravaca i ploha bez ikakva razmatranja njihove veličine odnosno mjere (*sans aucune considération de leur grandeur*)“, usp. Poincaré 1895: 2), a koja će se kasnije razviti u suvremenu topologiju; naprotiv, zanima nas jedna mnogo starija i zapravo *izvorna analysis situs* koja je mogla imati formativan utjecaj na oblikovanje Veroneseova pristupa filozofiji i zasnivanju geometrije: geometrijska analiza kojom se bavio G. W. Leibniz (1646.–1716.).

Bilo bi posve opravdano očekivati da mora postojati nekakva veza između Leibniza i Veronesea, osobito ako imamo na umu činjenicu da je Veronese uveo nearhimedovsku (infinitezimalnu) geometriju, a da je Leibniz bio jedan od utemeljitelja infinitezimalnog računa. I doista, kao što sam pokazao u Popović 2016, Leibnizove ideje iz područja infinitezimalne analize nisu egzaktno realizirane samo u nestandardnoj analizi i drugim suvremenim područjima nearhimedovske matematike iz druge polovice 20. stoljeća, nego su ostvarile utjecaj i na matematičare u drugoj polovici 19. stoljeća. Tome je presudno pridonio Carl Immanuel Gerhardt (1816–1899)[431], priređivač Leibnizovih dotad uglavnom neobjavljenih matematičkih i filozofskih spisa, kao i relevantne korespondencije iz Leibnizova arhiva u Hannoveru. Naime, Gerhardt je između 1849. i 1863. objavio izdanje *Leibnizens mathematische Schriften* (GM I–VII), koje se sastojalo od četiri sveska matematičke korespondencije i triju svezaka Leibnizovih izvornih matematičkih spisa. Radovi iz područja infinitezimalne analize (*analysis infinitorum*) matematičarima su bili poznati i ranije, budući da je nemali broj tih radova Leibniz za života objavio u *Acta Eruditorum*, *Journal des sçavans* i drugdje. Međutim, zahvaljujući Gerhardtu, matematičari 19. stoljeća prvi su put dobili priliku upoznati se i sa sadržajem Leibnizove geometrijske analize. Osobito je u petom svesku[432] Gerhardt objedinio nekoliko najreprezentativnijih Leibnizovih radova iz toga područja – v. *Sl. 26*.

[431] V. Cantor 1900 za pregled Gerhardtove biografije i bibliografije.

[432] V. i GM VII, drugi dio (*Geometrica*), osobito §II, *Specimen geometriae luciferae*, Leibnizov kasni tekst o problemu neprekidnosti iz druge polovice 1690-ih godina.



Characteristica Geometrica. Analysis Geometrica propria. Calculus situs.

Seite

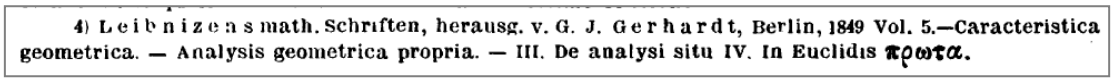
I. Characteristica Geometrica (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 141
Beilage: Data basi, altitudine et angulo ad verticem, invenire triangulum 168
II. Die Analysis Geometrica propria und den Calculus situs betreffend (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 172
III. De Analysi situs (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 178
IV. In Euclidis ΠΡΩΤΑ (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 183

Sl. 26. Faksimil dijela sadržaja GM V, str. vi

U povijesno-kritičkom apendiksu *Fondamenti*, neposredno nakon napomene da „ne treba zaboraviti da se ni za jednu teoriju ne može reći *prolem sine matre creatam*“, Veronese se osvrće na Leibniza i kaže:

> „*Leibniz, najveći filozof i matematičar, s mnogo se ljubavi bavio i našim problemom* (*Leibniz, sommo filosofo, e matematico, si occupò con molto amore anche del nostro problema*), nastojeći dokazati pojedine Euklidove aksiome i predlažući različite nove definicije pravca i ravnine.“ (Veronese 1891: 567–568, moj kurziv)

I ne samo to, uz tu rečenicu Veronese dodaje i sljedeću vrlo značajnu i znakovitu fusnotu – v. *Sl. 27*:



4) Leibnizens math. Schriften, herausg. v. G. J. Gerhardt, Berlin, 1849 Vol. 5.—Caracteristica geometrica. — Analysis geometrica propria. — III. De analysi situ IV. In Euclidis πρωτα.

Sl. 27. Faksimil nap. 4 iz Veronese 1891: 568

Dakle, to mjesto predstavlja neposrednu tekstualnu potvrdu da je Veronese svoj projekt u *Fondamenti* smatrao nadovezivanjem na Leibnizove ideje o *analysis situs* i njihovom razradom; ono samim time predstavlja i *ratio essendi* ovoga dodatka. Što je Leibniz, za razliku od Poincaréa, podrazumijevao pod *analysis situs*? Kao što je istaknuo Vincenzo De Risi, jedan od najvećih suvremenih autoriteta za Leibnizove geometrijske spise, *analysis situs* predstavlja zbirni naziv za skupinu Leibnizovih matematičko-filozofskih istraživanja o zasnivanju, razvoju i formalizaciji geometrije (De Risi 2018: 247). Ta Leibnizova geometrijska istraživanja bila su, sasvim u duhu gesla „ma métaphysique est toute mathématique pour ainsi dire, ou la pourroit devenir“[433], utopljena u njegova šira metafizička razmatranja o prirodi prostora, koja je, doduše, Leibniz počeo artikulirati tek potkraj 17. i početkom 18. stoljeća, a manje-više definitivno formulirao tek između 1712. i 1716. godine (usp. De Risi 2007: x), o čemu najbolje svjedoči njegova znamenita prepiska sa Samuelom Clarkeom (1675–1729) iz posljednje godine Leibnizova života. S druge strane, *analysis situs* bio je Leibnizov cjeloživotni projekt koji ga je zaokupljao tijekom četiri desetljeća, od takozvanoga Pariškog razdoblja (koje je bilo formativno za Leibniza kao matematičara), 1672–1676, pa sve do posljednjih

[433] Iz pisma L'Hospitalu od 27.12.1694, GM II, 258.

skica koje se mogu pouzdano smjestiti u razdoblje između 1714. i 1716. godine. Tijekom tih četrdeset godina Leibniz je napisao nekoliko stotina spisa, skica i bilježaka, međutim za života nije objavio nijedan rad posvećen *analysis situs*, po svoj prilici obeshrabren inicijalnom negativnom recepcijom, naročito Huygensovom (v. A III, 2, 888–889; usp. De Risi 2018: 247, nap. 2). No zahvaljujući činjenici da je pojedine ideje i rezultate razmjenjivao sa svojim mnogobrojnim korespondentima, o situacijskoj se analizi u matematičkim i filozofskim krugovima govorilo već za Leibnizova života. Nažalost, većina Leibnizovih radova posvećenih *analysis situs* još uvijek nije objavljena.[434]

Leibnizova primarna motivacija za formuliranje nove geometrije proizlazila je iz *rezervi* u pogledu razmjera, prikladnosti i opravdanosti uporabe algebarskih i, općenito uzevši, analitičkih metoda u geometriji. To je nedvojbeno moralo biti privlačno i samom Veroneseu koji je, kao što smo vidjeli (v. odjeljke [2.3] i [2.4]), inzistirao na prioritetu čisto geometrijskog stajališta i na „rekonstrukciji temeljnih [geometrijskih] načela sintetičkom metodom", oslanjajući se na konstruktivne postupke karakteristične za geometrijsku praksu (usp. Veronese 1891: vi i Popović 2017: 99). To, naravno, ne znači da su Leibniz i Veronese bili protiv analitičkih metoda. S jedne strane, Leibniz je bio svjestan da Viète-Descartesova analitička geometrija predstavlja iznimno moćan alat za tretiranje problema rektifikacije krivulja (i, utoliko, svojevrsnu anticipaciju infinitezimalnoga računa – v. Odjeljak [1.3]) i, štoviše, da konstituira jednu vrstu *ars inveniendi*, odnosno heurističku metodu koja vodi otkriću novih, važnih rezultata u geometriji (v. osobito spis *De constructione* u GM VII, 249ff.). S druge strane, Veronese je već u svojim ranim radovima iz projektivne geometrije i geometrije hiperprostora smatrao posve prihvatljivim kombiniranje analitičkih i sintetičkih metoda (usp. Odjeljak [1.2]), a u *Fondamenti* je uveo svoje beskonačne brojeve kako bi pokazao na koji je način moguće zasnovati analitičku geometriju nad njegovim nearhimedovskim uređenim poljem (v. odjeljke [2.6] i [2.6.1]). Međutim, i Leibniz i Veronese primijetili su da je upravo analitički tretman pojedinih geometrijskih pitanja, budući da je *indirektan*, davao povoda sumnji da su neki od rezultata dobivenih čisto analitičkim putem zapravo geometrijski nemogući (Veronese je pritom ponajprije mislio na pitanja povezana sa statusom neeuklidske i, još više, n-dimenzionalne geometrije – usp. Veronese 1891: xxii *et passim*). To potvrđuje i sljedeća fusnota iz Veroneseova predgovora *Fondamenti*:

> „Iako je Leibniz davao veliku prednost analizi, ipak je uočio nedostatke analitičke metode, osobito u obradi načela geometrije, kada ju je pokušao zamijeniti svojom geometrijskom analizom." (Veronese 1891: xxii, nap. 1)

Evo kako je De Risi sažeo Leibnizove rezerve:

> „Međutim, [Leibniz] je bio zabrinut zbog osnova simboličkih metoda. Algebra je koristan alat za geometriju, ali njezin formalizam može voditi pogrešnim zaključcima; drugim riječima, ona dokazuje *previše* jer simboli u uobičajenoj algebri nemaju jednoznačnu i izravnu geometrijsku interpretaciju te mogu označavati

[434] Tim istraživača i povjesničara trenutačno priprema jedan svezak radova za Leibniz-Akademie-Ausgabe: *PHILIUMM. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe*, Vers. 1 & 2; v. Bella *et al.* 2022 i 2023. Zahvaljujem Vincenzu De Risiju što mi je te materijale stavio na raspolaganje.

> veličine koje nemaju nikakvo značenje u (klasičnom, euklidskom) geometrijskom okviru (primjerice, imaginarni brojevi ili višedimenzionalni produkti). Nije čak ni jasno mogu li se algebarski dokazati svi relevantni geometrijski rezultati (drugim riječima, algebra dokazuje i *premalo*), jer bi njezinu potpunost moglo ograničiti čisto numeričko podrijetlo njezina formalizma, koji izvorno uopće nije bio osmišljen za rješavanje geometrijskih problema. Štoviše, osnove uobičajene algebre uglavnom su nejasne, a čini se da njezina pravila počivaju na pojedinim geometrijskim rezultatima (kao što je, primjerice, Pitagorin teorem), što posljedično onemogućuje oslanjanje na algebru u kontekstu geometrijskog opravdanja." (De Risi 2018: 249)

Dakle, Leibniz je smatrao da nije moguće sve geometrijske probleme rješavati algebarski jer formalizam algebre nije bio uopćen, nego se u primjeni *ad hoc* prilagođavao pojedinačnim slučajevima, a razlog izostanka općenitosti, prema Leibnizovu mišljenju, ležao je u činjenici da je taj formalizam izvorno bio konstruiran za rješavanje aritmetičkih, a ne specifično geometrijskih problema. Stoga je Leibnizovo rješenje za prevladavanje tih poteškoća bilo *eliminirati algebru iz geometrije, a pritom ne eliminirati simboličko rasuđivanje koje joj je u osnovi* i u tu je svrhu, u duhu svojega šireg i ambicioznog projekta razvoja *characteristica universalis* te zasnivanja logike i (egzaktnih) znanosti iz 1670-ih i 1680-ih godina, odlučio konstruirati formalni jezik posebno namijenjen geometriji, takozvanu *characteristica geometrica propria* ili *characteristica situs*, u kojoj konstante i varijable *izravno označuju same geometrijske objekte* (točke i likove u prostoru, a ne brojeve, brojevne odnose ili numeričke veličine) i čije su primarne relacije podudarnost (kongruencija) i (geometrijska) sličnost, a ne jednakost (kao u slučaju brojeva). Vidjeli smo da je Veronese u istom duhu u *Fondamenti* inzistirao na primatu elementarne metode koja geometrijske objekte tretira *qua* geometrijske (*che tratta sempre le figure come figure*) i koja nam omogućuje da njima izravno manipuliramo (*che lavora direttamente cogli elementi*) (Veronese 1891: xix).

Temeljni pojam oko kojega je Leibniz izgradio svoj novi formalizam za geometriju i njemu pripadajuću algebru, odnosno račun (*calculus situs* – usp. GM V, 172), bio je *situs* – relacijski predikat koji nam govori nešto o relativnom položaju objekta (točaka ili geometrijskih likova) u prostoru. Pojam *situs* ima aristotelovsku provenijenciju: Aristotel ga uvodi kao jednu od deset kategorija (usp. *Cat.* 4.1 b 25), a potom se pojavljuje i u Aristotelovoj definiciji točke kao „jedinice s položajem" (τὸ δὲ πάντῃ καὶ θέσιν ἔχον στιγμή, usp. *Phys.* 1016 b 24–26); Leibniz je prihvatio Aristotelovu definiciju točke (v. spis *In Euclidis πρῶτα*, GM V, 183, DEF. I: *Punctum est cujus pars nulla est. Addendum est: situm habens.*). Kao što je istaknuo De Risi, u Leibnizovo vrijeme ta definicija točke nije bila operativna u geometriji, nego u metafizici, a jedine studije u kojima se pojavljuje *situs* bile su one iz projektivne geometrije, primjerice Pascalova proučavanja perspektive koja je Leibniz imao priliku čitati u rukopisu sredinom 1670-ih, odnosno pred kraj svoga boravka u Parizu (usp. De Risi 2018: 248–249, nap. 7). To znači da su i Leibniz i Veronese bili nadahnuti Pascalovim rezultatima iz područja projektivne geometrije (usp. Odjeljak [1.2]). Pojednostavljeno rečeno, *situs* se može promatrati kao *udaljenost* (*situs sive distantia* – usp. GM V, 144–145), a Leibniz ga najčešće definira pomoću *podudarnosti*: točke A i B imaju isti recipročni *situs* kao i točke C i D (odnosno:

točke A i B nalaze se na istoj međusobnoj udaljenosti kao i točke C i D) AKKO $(AB) \cong (CD)$ (v. spis *Characteristica geometrica* iz 1679. u GM V, 141ff.).[435]

Međutim, Leibnizova najznačajnija inovacija u okviru situacijske analize odnosila se na uvođenje pojma *geometrijskoga prostora* – geometrija je, tako, tek od Leibniza nadalje postala matematička znanost o prostoru[436] (u klasičnoj geometriji, primjerice u *Elementima*, nigdje se ne govori o samome prostoru kao objektu istraživanja). Leibniz prvi govori o geometrijskom prostoru kao o *apstraktnoj strukturi* koja posjeduje određena intrinzična geometrijska svojstva što se mogu opisati, ispitati i objasniti čisto matematičkim sredstvima i metodama, pri čemu su ta svojstva kodificirana odgovarajućim aksiomima na kojima se potom temelje i dokazi koji se izravno odnose na svojstva prostora i svojstva konfiguracija u njemu. Drugim riječima, Leibniz prostor shvaća kao *poredak položaja* (*ordre des situations*), odnosno kao *apstraktni relacijski sustav svih mogućih udaljenosti između geometrijskih objekata* (*spatium est locus cui omnes alii loci insunt* – v. spis *Calculi situs fundamenta* u De Risi 2007, Appendix, № 13, str. 616) ili, suvremenim rječnikom rečeno, kao *metrički prostor* (usp. De Risi 2018: 253). Za razliku od točaka, koje karakterizira njihov *situs*, odnosno (relativni) položaj, bitno obilježje geometrijskoga prostora jest *protežnost* (*extensio*; v. skicu LH XXXV, I, 5, Bl. 49 iz oko 1685. u De Risi 2007, Appendix, № 17, str. 624), pri čemu Leibniz protežnost shvaća kao „kontinuum čiji dijelovi postoje istodobno", odnosno koegzistiraju: *spatium ipsum seu extensum* (*id est continuum cujus partes simul existunt*) (usp. GM V, 147–148). Kada je riječ o strukturi toga prostornog kontinuuma, Leibniz je, kao i Veronese, aristotelovac. Iako točke u određenom smislu *konstituiraju* prostor jer sama protežnost počiva na situacijskim relacijama, odnosno udaljenostima između točaka[437], Leibniz naglašava da to ne znači kako je prostor zbog toga izgrađen od točaka

---

[435] U predgovoru *Fondamenti* nalazimo sljedeću zanimljivu Veroneseovu opasku o pojmu udaljenosti: „Prema toj [sc. analitičkoj] metodi udaljenost između dviju točaka jest broj; ali ako se udaljenost *može predstaviti* nekim brojem, *analitička metoda ne govori nam što je udaljenost jer, geometrijski promatrano, ona nije broj*. Isto tako ni pravac, ravnina ili prostori od tri i više dimenzija geometrijski nisu jednadžbe ni pomoćni analitički oblici kojima su predstavljeni." (str. xxi, moj kurziv). Slična opaska o tome koja je metoda prikladna za geometriju može se pronaći u jednoj Leibnizovoj skici iz travnja 1713. godine (LH XXXV, XI, Bl. 16):

> „Hinc patet in mathematicis utilem esse μετάβασιν εἰς ἄλλο γένος quam alioqui Aristoteles improbat non rectè. Nam saepe ejus ope deteguntur quae aliter non facilè patuissent aut in mentem venissent. Sic etiam Archimedes ponderum consideratione usus est ad dimensionem parabolae. Interim id verum est, nos non debere contentos esse demonstratione quae fit per metabasin in aliud genus, sed debere quaerere demonstrationem propriam, οἰκείαν. Quia ea inventa possumus aliquando demonstrare hypothesin in scientia alterius generis ex verisimilibus rationibus vel experimentis assumtam, ut hoc loco demonstrato theorema geometrico, demonstrare possumus theorema mechanicum de reciproca ponderum ab axe aequilibrij distantia. Quod aliunde sed tantum argumentis probabilibus vel experimentis assenti eramus. Quod est magis naturale ut nempe scientia subordinata, qualis est mechanica demonstretur ex Geometria quam contra. Interim saepe contrarium inserit ad inveniendum, ut hoc loco. Et ita videmus divortium, sed utile, non rarò locum habere inter artem inveniendi et demonstrandi. Quia saepe argumenta probabilia vel tentamina empirica principium praebent inveniendi necessarias veritates." (navedeno prema De Risi 2007, Appendix, № 21, str. 629)

[436] Pa tako i kod Veronesea: „La scienza dello spazio generale (e quindi delle figure in esso contenute) si chiama *geometria*." (Veronese 1891: 211)

[437] U jednom od pisama des Bossesu (od 24.4.1709.; v. GP II, 170) Leibniz kaže da protežnost nastaje iz položajâ, ali im pridodaje neprekidnost (*extensio quidem exsurgit ex situ, sed addidit situi continuitatem*), te naglašava da točke imaju samo položaj, ali nemaju niti mogu tvoriti neprekidnost, kao što ne mogu ni postojati samostalno

(*constitui, dico, non componi* – usp. GM VI, 370). Drugim riječima, i Leibniz prihvaća Zenonov aksiom.[438] No to ne znači da se prostor ne može shvatiti kao *locus amplissimus* ili *locus omnium punctorum*, odnosno kao *geometrijsko mjesto svih točaka* i, u biti, kao skup relacija ekvidistancije među tim točkama, „totalni sustav svih položaja" (sec. De Risi 2007: 175): *nam locus omnium punctorum inter se congruentium est locus omnium punctorum in universum* […] *seu extensam absolutum, sive Spatium* (prema *Characteristica geometrica* u GM V, 166).[439]

Podsjetimo, Veroneseov *spazio generale*, opći geometrijski prostor, također je definiran pomoću sustava (skupa) točaka i relacija koje se nad tim skupom mogu definirati, pri čemu, kao što smo vidjeli u Odjeljku [2.7], Veronese – kao i Leibniz prije njega – uzima podudarnost za primitivnu relaciju u svojoj aksiomatizaciji geometrije (usp. i Odjeljak [2.3]). I doista, kao što je na jednome mjestu primijetio De Risi, Leibnizova definicija prostora kao „sustava svih točaka pojavljuje se takoreći *ad litteram* u Veroneseovim *Fondamenti di geometria*" (De Risi 2007: 175, nap. 45). Polazeći od tako shvaćenoga prostora, Leibniz zatim izdvaja niz svojstava koja jedan takav apstraktni situacijski poredak može posjedovati. Povijesno je zanimljivo da je upravo Leibniz prvi izričito uveo i pokušao rigorozno definirati svojstva poput *uniformnosti* (ili *izotropije*), *homogenosti* (*usporedivosti*, odnosno *arhimedičnosti*[440]), *dimenzionalnosti* i *neprekidnosti* (shvaćene u terminima *povezanosti* ili *kohezivnosti* – v. odjeljke [2.4.1] i [2.6]), a u pojedinim nacrtima i bilješkama mogu se pronaći i njegova razmatranja o *metričkim* i *projektivnim svojstvima* prostora (usp. De Risi 2018: 254).

Posljednji aspekt Leibnizovih istraživanja povezanih s *analysis situs* koji treba spomenuti odnosi se na proučavanje geometrijskih aksioma i njihovih uzajamnih odnosa. Naime, Leibniz se već u ranoj fazi svoje karijere zanimao za klasičnu geometriju (Euklida,

---

(*puncta situm habent, continuitatem non habent nec componunt, nec per se stare possunt*). Kao što smo vidjeli u Odjeljku [2.4], i Veronese je zastupao praktički istovjetno stajalište o ontološkom statusu točaka.

438 Leibnizova razmatranja o problemu neprekidnosti vrlo su složena. Za pregled v. De Risi 2019, kao i znameniti zbornik *The Labyrinth of the Continuum: Writings on the Continuum Problem, 1672–1686* iz edicije *The Yale Leibniz* (Arthur 2001).

439 V. i spis *Spatium absolutum* iz kolovoza/rujna 1714. (LH XXXV, I, 12, Bl. 6 i 19) u De Risi 2007, Appendix, № 11, str. 608–611. Primjerice, Leibniz ondje govori o općem, odnosno apsolutnom geometrijskom prostoru (koji nipošto ne treba brkati s Newtonovim apsolutnim prostorom iz *Principia*) koji je uniforman ili „posvuda samosličan" (*uniforme est seu ubique sibi simile*), neograničen (*interminatum*) i neprekidan (*continuum*). Evo i cijele definicije:

> „Spatium absolutum interminatum est quod in situ amplissimum est. Ideo omnis locus est in eodem spatio absoluto. Spatium absolutum est continuum, alioqui locus aliquis interponi posset qui in ipso non esset. Spatium absolutum uniforme est, varietas enim orietur à determinationibus, quae cum amplissimo non consistunt. Quotcunque loca sunt in loco communi terminato, nempe qui in spatio absoluto sumi potest." (str. 609)

Zanimljivo je da je u tom spisu Leibniz objašnjavao neprekidnost pomoću onoga što je Newton u *Tractatus de Quadratura Curvarum* (iz 1690-ih godina) nazivao *fluksijom*, odnosno neprekidnim gibanjem točke. Tako liniju definira kao *putanju točke* (*puncti via*) ili kao *locus continuus successivus* (str. 609), pri čemu je putanju prethodno definirao kao *locus omnium mobilis locorum* (str. 608).

440 U *Spatium absolutum* (v. prethodnu napomenu) Leibniz definira homogenost posredstvom Arhimedova aksioma na sljedeći način: „Duae magnitudines homogeneae sunt, si aliquoties ubique ab una adimendo quod alteri aequale sit aliquoties, restet tandem aliquid altera minus." (v. De Risi 2007: 608)

Apolonija i Arhimeda[441]), a osobito je temeljito proučavao sva dostupna izdanja Euklidovih *Elemenata*, ponajprije Claviusova (iz 1574., 1589. i 1612. godine). S tim je povezana i njegova zamisao da je jedna od glavnih zadaća *analysis situs* uvođenje reda te visokih kriterija strogosti i egzaktnosti u klasičnu geometriju posredstvom kritičkog preispitivanja definicija i aksioma, kao i popunjavanje praznina i premošćivanje skokova u izvođenjima i dokazima mnogih tvrdnji u *Elementima* (koji su počivali na neeksplicitanim, odnosno prešutnim premisama, najčešće povezanima s neprekidnošću, ili pak na dijagramskom rasuđivanju), te svođenje na apsolutni minimum broja pretpostavki potrebnih za strogo deduktivno izvođenje dokaza. Idealni cilj *analysis situs* bio je, međutim, još ambiciozniji od toga: *dokazati sve aksiome geometrije* i učiniti je tako čisto logičkom i nehipotetičkom znanošću (De Risi 2016: 3–4). Iako takav „radikalni logicizam" možda zvuči neobično, Leibnizova zamisao o dokazivanju aksioma u 17. i ranom 18. stoljeću uopće nije bila neuobičajena – niz filozofa i matematičara smatrao je da se aksiomi zapravo mogu dokazivati pomoću definicija, odnosno da iz njih analitički slijede čim se na odgovarajući i precizan način odrede značenja osnovnih pojmova koji u njima figuriraju.[442] Središnje mjesto u tim Leibnizovim razmatranjima zauzimalo je pitanje statusa Euklidova petoga postulata, premda je povremeno razmatrao i pitanje nezavisnosti Arhimedova aksioma (za relevantna mjesta u Leibnizovu opusu v. De Risi 2016, Ch. 6, str. 124–179.) Za naše je potrebe dovoljno ustvrditi da se Leibniz, kao i Veronese nakon njega, bavio *metageometrijom* (u smislu Odjeljka [2.5]).

Za kraj ovoga dijela skrenut ću pozornost na jednu vrlo zanimljivu okolnost. Naime, tijekom 19. stoljeća matematičari su se praktički natjecali u tome da svoje teorije prikažu kao nasljednice Leibnizove *analysis situs*, i to u najrazličitijim, a često i dijametralno suprotnim kontekstima, od projektivne geometrije preko vektorskoga računa do diferencijalne geometrije i topologije. Primjerice, Lazare Carnot (1753–1823) smatrao je svoju *Géométrie de position* (1803), jedan od pionirskih radova iz projektivne geometrije, analognom Leibnizovoj geometrijskoj analizi, a sebe nasljednikom Leibnizovih ideja (Carnot 1803, *Dissertation préliminaire*, str. i–ii). Zatim je Hermann Graßmann i svoju čistu teoriju ekstenzije (*die lineale Ausdehnungslehre*), odnosno, suvremenim rječnikom, apstraktnu algebru i vektorski račun, također smatrao ostvarenjem Leibnizova projekta *characteristica situs* ili *characteristica geometrica*. O tome osobito svjedoči njegov nagrađeni spis *Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik* (1847.), napisan za natječaj koji je 1846. organiziralo Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften na Möbiusov prijedlog, pri čemu je zadatak bio formulirati geometrijski račun neovisan o koordinatnoj i metričkoj

[441] „Denique qui Archimedem & Apollonium intelliget, recentiorum summorum virorum inventa parcius mirabitur." (pismo Huetu iz 1679, u G. G. Leibnitii opera omnia (ed. L. Dutens), Vol. V, str. 460)

[442] U prepisci s Hermannom Conringom iz 1678. Leibniz je skrenuo pozornost na činjenicu da je većina skolastičara također smatrala kako se aksiomi mogu dokazivati posredstvom pojmovne analize (*idque Scholastici omnes confirmant, qui axiomatum veritatem patere ajunt intellectis terminis* – usp. A II, 1, № 168, str. 599), dok je Conring bio iznenađen jer je smatrao da prije njega nitko nije pokušao nešto slično (*demonstrationem nihil aliud esse quam catenam definitionum, nemo quod sciam alius asseruit* – usp. A II, 1, № 167, str. 595). V. De Risi 2016, §3.1, str. 21ff. (osobito nap. 1). U razdoblju *fin de siècle* slično će stajalište zastupati Frege, osobito u sporu s Hilbertom (v. korespondenciju u Gabriel *et al.* 1980), dok će u 20. stoljeću Gödel inzistirati na „opravdavanju" (zapravo dokazivanju) aksioma. V. osobito Gödel 1947. i predavanje „The Present Situation in the Foundations of Mathematics" iz 1933. (*Collected Works*, sv. III, rad *1933o, Feferman *et al.* 1995, str. 45–53).

geometriji. Zanimljivo je da je Graßmann u tom radu zapravo dao jedan od najranijih doprinosa teoriji uređenih sustava veličina kojima će se kasnije baviti Stolz, Veronese, Hölder i drugi (v. osobito §§1–4 u Graßmann 1847).[443] Međutim, kao što je napomenuo De Risi, „istinski nasljednici Leibnizove znanosti [sc. *analysis situs*] doista jesu veliki radovi Pascha, Veronesea i Peana te njegove škole posvećeni zasnivanju euklidske geometrije" (De Risi 2007: 134–135, nap. 7), pri čemu je

> „**Veroneseovo stajalište u *Fondamenti di geometria* manje-više je identično Leibnizovu**. […] U mnogim različitim pogledima, lajbnicovska ideja o karakteristici [sc. formalizmu] prilagođenoj sintetičkoj geometriji, koja bi je mogla udaljiti od algebre i ponovno uspostaviti stari način izlaganja [geometrije], istodobno je oslobađajući i od imaginacije i od nužnosti [izvođenja] konstrukcija pomoću ravnala i šestara, može se pronaći u **knjizi koja na najbolji način predstavlja modernu razradu Leibnizove *analysis situs*, naime u *Fondamenti di geometria* G. Veronesea**." (De Risi 2007: 12–13, nap. 12; v. i str. 281–282; moja emfaza dodana podebljanim slovima)[444]

[443] Ni monumentalni *Ausdehnungslehre* (prvo izdanje 1844) ni Graßmannova *Geometrische Charakteristik* nisu naišli na odgovarajuću recepciju. Neovisno o tome, *Fondamenti* otkrivaju da je Veronese vrlo temeljito poznavao Graßmannove pionirske ideje i rezultate. Općenito uzevši, Graßmann je najbolje prihvaćen u Italiji, osobito u okviru Peanove škole, o čemu, primjerice, svjedoče Peanov *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Graßmann* iz 1888. te Burali-Fortijev *Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Graßmann* iz 1897. godine.

[444] Treba doduše napomenuti da De Risi, za razliku od mene, nije pojasnio *zbog čega tačno* smatra su Veroneseov projekat zasnivanja geometrije iz *Fondamenti* i Leibnizova *analysis situs* zapravo *u tolikoj meri slični i srodni poduhvati* (izuzev jednog usputnog komentara koji se tiče mogućnosti i legitimnosti korišćenja kretanja u geometriji u pogledu čega su i Leibniz i Veronese imali isto mišljenje). U razgovorima i prepisci koju smo vodili tim povodom, nije mi pružio nikakav konkretniji dodatni razlog već je potvrdio moju analizu prema kojoj postoji nekoliko suštinskih sličnosti između Leibnizove geometrijske analize i Veroneseovog pristupa filozofiji i zasnivanju geometrije.

U ovom odjeljku nije bilo moguće rekonstruirati sve aspekte Leibnizove geometrijske analize. Čitatelja upućujem na De Risi 2007 radi detaljnoga i sustavnoga pokušaja pružanja koliko-toliko definitivnog prikaza *analysis situs*, naravno u onoj mjeri u kojoj to dopušta dosad obrađena neobjavljena tekstualna građa iz Leibnizova arhiva u Hannoveru.

TREĆI DIO

[3] Pregled ključnih aspekata inicijalne faze recepcije Veroneseovih rezultata

U ovom dijelu disertacije usredotočit ćemo se na povijest recepcije Veroneseove teorije i putove transmisije Veroneseovih ideja i rezultata. U matematičkim je krugovima već tijekom 1890-ih godina najveće zanimanje izazvala Veroneseova inovativna analiza odnosa između aksioma neprekidnosti, osobito njegov novi aksiom, odnosno uvjet apsolutne neprekidnosti, te s njime povezana koncepcija Veroneseova reza, formulirana, kao što je pokazano u Odjeljku [2.6], kao poopćenje Dedekindova aksioma i Dedekindova reza. Međutim, kao što je istaknuo Ehrlich, Veroneseov uvjet neprekidnosti „nije dobio priznanje koje zaslužuje" u literaturi (Ehrlich 2006: 69), unatoč činjenici da je upravo pod tim nazivom – „Veroneseov uvjet (aksiom) neprekidnosti" – bio „vrlo dobro poznat i naširoko raspravljan tijekom prvoga desetljeća 20. stoljeća" (Ehrlich 1994a: xxi). Doista, u inicijalnoj fazi recepcije o Veroneseovu aksiomu raspravljali su Stolz (1891a, 1891b; v. i Stolz & Gmeiner 1902 i 1915), Levi-Civita (1892./93., 1898.), Killing (1895./96., 1897.), Schönflies (1897a, 1897b, 1898, 1900, 1906, 1908), Hölder (1901, 1924), Bindoni (1902), Huntington (1902, 1913), Veblen (1904), Hahn (1907), Brouwer (1907), Vahlen (1907), Enriques (1907./1911., 1911a), Petronijević (1907, 1917[445]), Klein (1908) i Vitali (1912).

U tom su se razdoblju pojavile i prve ozbiljnije kritike Veroneseove teorije: Cantor i Peano gotovo su sinkronizirano pokrenuli kampanju protiv Veronesea početkom 1890-ih godina u Njemačkoj i Italiji (v. odjeljke [3.1], [3.1.1] i [3.1.2]). Neovisno o tim kritičkim rezervama, Stolz je otvoreno priznavao da su upravo pojedini Veroneseovi uvidi i napomene usmjerili njegova vlastita istraživanja uređenih sustava veličina (1891a: 107ff.; Stolz & Gmeiner 1902: 114, nap. 2), Killing je pak isticao da su Veronese i Cantor proširili domenu uobičajenih brojeva u transfinitno (*das Gebiet der gewöhnlichen Zahlen ins Transfinite zu erweitern*) (Killing 1897: 425), zbog čega je Schönflies, po svoj prilici, Veroneseove *Fondamenti*, zajedno s Cantorovim *Grundlagen* i tek nekolicinom drugih radova[446], uvrstio među relevantnu literaturu iz područja teorije skupova (!) u natuknici „Mengenlehre" koju je pripremio za Kleinovu *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (Schönflies 1898: 184–185). Kao što sam pokazao, Hölder je svoju aksiomatizaciju teorije grupa, kao i analizu odnosa između Dedekindova aksioma neprekidnosti i Arhimedova aksioma, u cijelosti zasnovao na Veroneseovim idejama. Stanje istraživanja nearhimedovskih sustava veličina Hahn je 1907. sažeo sljedećim riječima:

> „Proučavanje nearhimedovskih sustava veličina seže do P. du Bois-Reymonda i O. Stolza. Pojedina pitanja povezana s tom temom detaljno su obrađena i u raspravi R. Bettazzija *Teoria delle grandezze*. […] U svojim matematički i filozofski značajnim

[445] Za proširenu inačicu v. Petronijević 1929a.

[446] Pored Veronesea i Cantora, tu su još samo Bolzanove *Paradoxien des Unendlichen*, du Bois-Reymondova *Die Allgemeine Functionentheorie*, Bettazzijeva *Teoria delle grandezze* i Borelove *Leçons sur la théorie des fonctions*. Zanimljivo je da polovicu popisa čine autori pioniri *fin-de-siècle* nearhimedovske matematike.

> (*mathematisch und philosophisch bedeutungsvollen*) *Fondamenti di geometria* G. Veronese zatim je konstruirao geometriju bez korištenja Arhimedova aksioma, a poslije se, unatoč raznim primjedbama, vratio toj temi [u radovima „Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti o infinitesimi attuali" (1896), „Sul postulato della continuità" (1897) i „Segmenti e numeri transfiniti" (1898)]. Daljnja istraživanja nearhimedovskih sustava veličina vodila su T. Levi-Civitu, koji je sebi postavio za cilj aritmetičku reprezentaciju Veroneseova kontinuuma (*eine arithmetische Darstellung des Veronese'schen Kontinuums*) te pritom došao do rezultata velike općenitosti (*und dabei zu Resultaten von größer Allgemeinheit geführt wurde*). […] Nadam se da ću se uskoro moći vratiti proučavanju nekih posebnih nearhimedovskih sustava veličina, osobito onih koji bi se mogli iskoristiti za aritmetičku reprezentaciju Veroneseova kontinuuma." (Hahn 1907: 601, 605)

Dakle, kao što možemo vidjeti, konceptualno-matematički okvir Hahnove analize u cijelosti je oblikovan Veroneseovim rezultatima.[447] Ako se pritom uzme u obzir da se upravo taj Hahnov rad smatra „monumentalnom analizom totalno uređenih grupa" (sec. Alling 1976: 56), „najutjecajnijim člankom u teoriji uređenih grupa i prstenova" (v. nap. 329 u Odjeljku [2.6.2]), „najiscrpnijim istraživanjem infinitezimala i beskonačnih brojeva" (sec. Temple 1981: 22) te, općenito uzevši, „izvorom [suvremene] teorije uređenih algebarskih struktura" (sec. Laugwitz 1986: 222), tada se može zaključiti da su upravo Veroneseova temeljna istraživanja aksioma neprekidnosti i nearhimedovske geometrije, zajedno s njegovom konstrukcijom prvoga nearhimedovskog uređenog polja, pružila ključni poticaj te bitno usmjerili buduća istraživanja uređenih algebarskih struktura u 20. stoljeću. Paradoksalno, promatrano iz povijesne perspektive, upravo je izniman uspjeh Hahnovih istraživanja imao nepovoljne posljedice za autore poput Veronesea na čije se rezultate sâm Hahn očito oslanjao.

Naime, kada je nakon kraćega razdoblja stagnacije potkraj 1920-ih i početkom 1930-ih obnovljen interes za nearhimedovske strukture, ponajprije zahvaljujući radovima Artina i Schreiera (1926), Baera (1927) i Wolfganga Krulla (1899–1971), „*previdjela se veza s Veroneseom*" (Ehrlich 2006: 69, moj kurziv). Posljedično, premda se i dalje raspravljalo o *de facto* Veroneseovu aksiomu, odnosno uvjetu apsolutne neprekidnosti, te o Veroneseovim rezovima, Veroneseovo se ime više nije spominjalo: sama je koncepcija postala sastavnim dijelom matematičkoga „žargona", ali po cijenu toga da se, kao što je utvrdio Ehrlich, u literaturi druge polovice 20. stoljeća počela pojavljivati pod nazivima *Dedekind-potpunost* (osobito među algebristima) ili *Scott-potpunost* (osobito među logičarima), dok su Veroneseovi rezovi postali *Hölderovi rezovi*, *regularni Dedekindovi rezovi* ili *pravi Dedekindovi rezovi* (usp. Ehrlich 1994a: xxi). Veroneseovi uvidi, dakle, i dalje žive te su „dobro su poznati suvremenim logičarima i algebristima, premda pod raznim drugim imenima" (Ehrlich 2006: 69).[448]

---

[447] U radu Hahn pripisuje Veroneseu i Levi-Civiti uvođenje pojma arhimedovske klase (usp. Odjeljak [2.6.1]) te detaljno analizira Veroneseov aksiom odnosno uvjet neprekidnosti (*Veronese'scher Stetigkeit*), uspoređujući ga, između ostaloga, s Hilbertovim.

[448] V. primjerice Aguiló Fuster 1963, Hauschild 1966, Scott 1969, Baer 1970, Massaza 1970./71., Prieß-Crampe 1983 i Ehrlich 1997. Sredinom 20. stoljeća još je uvijek bilo moguće ponegdje naići na naziv *Veronese-neprekidnost* ili *Veronese-potpunost*, usp. Neumann 1949: 215, nap. 28. Međutim, već su u van der Waerdenovoj *Moderne Algebra* (prvo izdanje, 1930.), koja je imala presudan utjecaj na potonje generacije algebrista, u bibliografiji o

Zapravo, jedini suvremeni autori koji su eksplicitno odali priznanje Veroneseu jesu Laugwitz (usp. 1975: 308)[449] i Ehrlich. To ponajprije valja pripisati činjenici da su se obojica, osim što su dali iznimne doprinose razvoju nearhimedovske matematike – Laugwitz u teoriji uređenih algebarskih struktura i formuliranjem Ω-računa, koji predstavlja anticipaciju nestandardne analize, a Ehrlich razradom Conwayeve teorije nadrealnih brojeva – sustavno, minuciozno i predano bavili proučavanjem i rekonstrukcijom povijesnoga razvoja nearhimedovske matematike.

Kao što je istaknuo Enriques, „Veronese se nije ograničio samo na utvrđivanje mogućnosti nearhimedovskoga jednodimenzionalnog [linearnog] kontinuuma, nego je nastojao pružiti opću konstrukciju nearhimedovske n-dimenzionalne geometrije“ (*die allgemeine Konstruktion einer mehrdimensionalen nicht-Archimedischen Geometrie*) (Enriques 1907, §41, str. 121; za francuski prijevod v. Enriques 1911, §49, str. 139). I doista, Veronese je u *Fondamenti* konstruirao upravo takvu apsolutno opću geometriju, neovisnu ne samo o Arhimedovu aksiomu nego i o Euklidovu postulatu o paralelama, povezavši tako nearhimedovsku i neeuklidsku (Riemannovu) geometriju (v. odjeljke [2.3] i [2.7]).[450] Kao što je i sâm Veronese istaknuo, u sustavu koji je konstruirao u *Fondamenti* i u kojemu je za osnovu odabrao rimanovski oblik (*per la quale nei miei Fondamenti ho scelto la forma Riemanniana*), „*slijedi da u infinitezimalnom polju* [sc. *okolini*] *oko točke* (*in un campo infinitesimo intorno ad un punto*), *promatraju li se samo dužine koje su konačne jedna u odnosu na drugu, odnosno koje zadovoljavaju Arhimedov aksiom, vrijedi euklidska geometrija*.“ (Veronese 1909: 200, Veroneseov izvorni kurziv; v. i Odjeljak [2.7]). Štoviše, „tu je teoremu potom dokazao Levi-Civita također i za nearhimedovsku euklidsku geometriju, kao i za nearhimedovsku geometriju Bolyaija i Lobačevskog.“ (*ibid.*)[451] I doista, već je u svojem pionirskom radu iz 1892/93. godine Levi-Civita u odjeljku „Applicazione geometrica“ pokazao da za nearhimedovske trokute, odnosno trokute čije su stranice infinitezimalne, „vrijedi euklidska hipoteza o zbroju unutarnjih kutova“, odnosno da je zbroj unutarnjih kutova trokuta jednak dvama pravim kutovima, odnosno $180°$ (Levi-Civita 1892/93, §§26–27, str. 33–39). Kao što je istaknuo Hilbert u kasnijim izdanjima *Grundlagen*,

---

nearhimedovskim uređenim poljima navedeni samo radovi „Algebraische Konstruktion reeller Körper“ (Artin & Schreier 1926) i „Über nicht-Archimedisch geordnete Körper“ (Baer 1927), a bibliografija nije dopunjavana u kasnijim izdanjima. Tako priređivač Cantorove korespondencije Herbert Meschkowski (1909–1990) u jednom radu ističe da se, kada je riječ o nearhimedovskim brojevnim sustavima i njihovoj matematičkoj egzistenciji, „sve što je potrebno može pročitati kod van der Waerdena.“ (Meschkowski 1965: 504)

[449] V. i Schmieden & Laugwitz 1958: 3, te Laugwitzovu knjigu *Kontinuum und Zahlen* (Laugwitz 1986), čiji je gotovo svaki odjeljak popraćen vrlo zanimljivim povijesnim napomenama.

[450] Koliko je moguće zaključiti na temelju dostupne povijesne građe i matematičke literature koju sam konzultirao, Veronese je i u tom pogledu bio pionir u povijesti geometrije. Ako pogledamo Enriquesov pregled relevantnih rezultata i publikacija u odjeljku „Développements non-archimédiens sur la théorie des parallèles“ njegova priloga Kleinovoj *Encyklopädie* (Enriques 1911, § 52, str. 145 i dalje), može se zaključiti da su ostali relevantni autori koji su se bavili tom problematikom i koje Enriques spominje – Dehn, Schur i Hilbert – svoje prve radove objavili gotovo deset godina nakon pojave Veroneseovih *Fondamenti*, odnosno tek od 1899. godine (kada se pojavjuju Hilbertove *Grundlagen*).

[451] V. prethodnu napomenu. Može se reći da je Levi-Civita anticipirao Dehnova kasnija istraživanja takozvane nelegendreovske geometrije i odnosa između Saccheri-Legendreova teorema i Arhimedova aksioma.

> „nearhimedovske geometrije koje su istodobno i neeuklidske od načelnog su značaja (*von prinzipieller Bedeutung*), a osobito mi se čini da je od velikoga interesa pitanje o zbroju kutova u trokutima i ovisnost tih teorema o Arhimedovu aksiomu (*der Abhängigkeit dieser Sätze vom Archimedischen Axiom*)." (Hilbert 1903, §12, str. 23)

Međutim, Hilbert *ad loc.* nije spomenuo ni Veronesea ni Levi-Civitu, nego je ustvrdio da se tim istraživanjem (prvi) bavio njegov student Max Dehn, i to pod njegovim utjecajem.[452] Međutim, prvi Dehnov rad o toj temi bila je njegova doktorska disertacija *Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck*, koja se pojavila tek 1900. godine[453], dakle godinu dana nakon Hilbertovih *Grundlagen* (zbog čega ni sâm Hilbert nije mogao referirati na Dehna u prvom izdanju *Grundlagen*) i gotovo cijelo desetljeće nakon Veroneseovih *Fondamenti*, odnosno sedam do osam godina nakon Levi-Civitina rada „Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici". U svojoj disertaciji Dehn nije upućivao ni na Veronesea ni na Levi-Civitu, nego samo na Hilberta: „istraživanja koja slijede zasnovana su na radu gospodina profesora Hilberta o zasnivanju geometrije" (*die Grundlage der folgenden Untersuchungen bildet die Abhandlung von Herrn Professor Hilbert über die Grundlagen der Geometrie*) (Dehn 1900: 4). Štoviše, *Grundlagen* su jedina referenca u cijeloj Dehnovoj disertaciji, a čini se da Dehn na str. 31 polazi od pretpostavke da je nearhimedovsku geometriju moguće izgraditi *jedino* pomoću Hilbertova polja $\Omega(t)$, što je, naravno, pogrešno (usp. Odjeljak [2.6.2]). Ni u povijesnom dodatku „Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung", objavljenom uz drugo izdanje Paschovih *Vorlesungen*, Dehn nije pokazao veću povijesnu preciznost. I ondje formuliranje prvih „nearhimedovskih brojevnih sustava" (*nichtarchimedisches Zahlensysteme*) povezuje s Hilbertovim *Grundlagen*, doduše usputno spominje Veronesea i kaže da je on „prethodno u *Fundamenti* [sic!] *di geometria* istraživao pojedine aspekte opće nearhimedovske geometrije" (*die Erscheinungen in der allgemeinen nichtarchimedischen Geometrie*) (Dehn 1926./1976.: 242–243, nap. 2).

Čak je i inače vrlo akribičnom Enriquesu promaknulo istaknuti prioritet Veroneseovih i Levi-Civitinih istraživanja i rezultata u odnosu na Hilbertove i Dehnove, pa tako u natuknici „Prinzipien der Geometrie" u Kleinovoj *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (III.1) ističe Dehna, Schura (usp. Odjeljak [2.5]) i Hilberta (tim redom) kao pionire primjene nearhimedovskih metoda u proučavanju teorije paralelnih pravaca (Enriques 1907, §44, str. 126).[454] Stoga ne bi trebalo čuditi što i pojedini suvremeni

---

[452] „Die Untersuchung, die M. Dehn auf meine Anregung hin über diesen Gegenstand unternommen hat, führte zu einer vollen Aufklärung dieser Frage."

[453] V. osobito Cap. III („Beziehungen zwischen den Hypothesen über die Winkelsumme im Dreieck und den Hypothesen über Parallelen"), §8 u Dehn 1900: 30–31.

[454] Doduše, u jednoj fusnoti (*op. cit.*, str. 147) Enriques ipak dodaje bi različite mješovite sustave neeuklidskih i nearhimedovskih geometrija ponajprije trebalo proučavati „en connexion avec la seconde forme veronésienne", za koju prethodno kaže:

> „En ce qui concerne le second système [sc. un système dans lequel, comme dans la géométrie de B. Riemann, la droite est une ligne fermée], il s'est surtout attaché à envisager les faits géométriques, concernant les diverses unités, avec ce qu'on pourrait appeler une approximation infiniment grande. Il remarque que, dans ce second système, aux environs d'un point quelconque la géométrie peut être envisagée comme euclidienne avec une approximation infinie (au sens de l'infini actuel)." (1911: 140)

povjesničari matematike, poput J. Graya, ističu Dehnov „opsežan rad o posljedicama koje za geometriju ima negiranje Arhimedova postulata“ (Gray 2008: 188)[455], dodajući da se Dehn „majstorski bavio“ tim pitanjem nakon Hilberta[456], „povezujući ga s neeuklidskom geometrijom“ (Gray 2009b: 677). U svjetlu argumenata iznesenih u ovom poglavlju i u Odjeljku [2.5], takva bi tumačenja i ocjene trebalo *revidirati* već zbog toga što odstupaju od utvrđene kronologije. Naime, raspoloživa povijesna građa pokazuje da se Veronese, zajedno s Levi-Civitom, i u ovom pogledu može smatrati ne samo anticipatorom nego i prethodnikom Hilberta i Dehna.[457]

Kada je riječ o recepciji Veroneseovih rezultata koji se odnose na nearhimedovsku geometriju i, općenito uzevši, na zasnivanje geometrije, oni su već početkom 20. stoljeća bili uvršteni u najvažnije natuknice najuglednijih matematičkih leksikona i enciklopedija, a prethodno su bili indeksirani u vodećim referativnim časopisima (*Referatezeitschriften*) poput znamenitoga *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, prethodnika današnjega *Zentralblatt MATH* (odnosno *zbMATH Open*). O Veroneseovu utjecaju i percepciji važnosti njegovih rezultata možda najbolje govori činjenica da je prikaz *Fondamenti* koji je za *Jahrbuch* (Bd. XXIV za 1892. godinu) napisao Ernst Kötter (1859–1922) imao čak trinaest stranica ili približno 4000 riječi. Usporedbe radi, Engelov prikaz Hilbertovih *Grundlagen* bio je pet puta kraći, Stahlov prikaz Paschovih *Vorlesungen* čak petnaest puta kraći, dok je prikaz koji je Loria napisao o Peanovim *I principii di Geometria logicamente esposti* čak dvadeset puta kraći.[458] Ni Cantorovi pionirski radovi iz teorije skupova, primjerice, u pravilu nisu dobivali više od pola do jedne stranice prikaza, premda ih je najčešće pisao Giulio Vivanti (1859–1949), jedan od najoduševljenijih promicatelja teorije skupova u Italiji (v. Odjeljak [3.1.1]). Poincaréov „Analysis situs“, rad kojim je utemeljena suvremena topologija (v. Dodatak C), dobio je prikaz od svega dvanaest redaka, odnosno nešto kraći od četvrtine stranice. Na temelju pregleda više svezaka *Jahrbucha* smatram da se može uvjerljivo ustvrditi kako Kötterov prikaz *Fondamenti* predstavlja svojevrstan *presedan* u dugoj povijesti toga časopisa (osnovan je 1868. i redovito je izlazio otprilike do sredine Drugoga svjetskog rata).[459]

---

[455] *Ad loc.* Gray dodaje da je riječ o rezultatima koje je „čak i Hilbert smatrao iznenađujućima“. U predavanjima koja je držao 1902. godine (iz kojih će proizaći drugo izdanje *Grundlagen*), Hilbert je Dehnovu geometriju okarakterizirao kao *merkwürdige Geometrie* (usp. Hallett & Majer 2004: 566).

[456] Koji je, prema Grayu (*op. cit.*, *ad loc.*), „jedini ozbiljno shvatio pitanje kako bi geometrija funkcionirala u prisutnosti ili odsutnosti Arhimedova aksioma.“

[457] Još jedna potvrda moje teze može se pronaći i u poznatom udžbeniku *The Foundations of Geometry*: „Veroneseove nearhimedovske geometrije pružaju primjere *nelegendreovskih geometrija* u kojima vrijedi [Saccherijeva] hipoteza o tupom kutu, prema kojoj se kroz točku izvan zadanoga pravca može povući beskonačno mnogo pravaca usporednih s njime, kao i primjere semieuklidske geometrije u kojoj vrijedi hipoteza o pravom kutu, iako se kroz točku izvan zadanoga pravca također može povući beskonačno mnogo pravaca usporednih s njime.“ (Martin 1982: 313)

[458] Za Engelov prikaz v. JFM 30.0424.01 (https://zbmath.org/30.0424.01), za Stahlov v. JFM 14.0498.01 (https://zbmath.org/14.0498.01), a za Lorijin v. JFM 21.0524.01 (https://zbmath.org/21.0524.01).

[459] Grattan-Guinness istaknuo je da je Kötterov prikaz *Fondamenti* zanimljiv i zato što „pokazuje kako je matematičar iz jednoga drugog područja (u ovom slučaju ponajprije geometrije) [sc. Veronese] proučavao *Mengenlehre* [to jest teoriju skupova – prim. S. P.].“ (Grattan-Guinness 2000: 122, nap. 32). Usp. Odjeljak [2.5].

Posebno je zanimljivo da je Scheppov njemački prijevod *Fondamenti*, *Grundzüge der Geometrie* iz 1894., prikazan u časopisu *Nature* (No. 1299, Vol. 50). Autor prikaza bio je engleski matematičar Augustus H. E. Love (1863–1940), a sam je prikaz ponovno bio vrlo opsežan, četiri gusta stupca teksta, i, što je još važnije, izrazito pohvalan. Već u uvodnom odlomku Love ističe da je knjiga „toliko važna, toliko originalna i, može se dodati, toliko kontroverzna" da bi za njen primjeren prikaz bilo potrebno napisati monografiju. Stoga se ograničio na uvodne dijelove *Fondamenti*, koji su osobito važni „za logičko zasnivanje matematike", dok specifično geometrijske dijelove knjige ostavio za neki budući prikaz (Love 1894: 493).[460] Love osobito ističe Veroneseovu temeljitost, apstraktnost izlaganja i rigoroznost njegove metode, a prikaz zaključuje sljedećom opaskom o Veroneseovu stilu:

> „[K]njiga profesora Veronesea obrađuje mnogo više od samih osnova geometrije – njegov bi uvod, zapravo, prije mogao nositi naslov 'Osnove matematike'. […] Možemo mu biti zahvalni na strpljenju i trudu koji je uložio u razjašnjavanje logike operacija koje većina nas, ne razmišljajući mnogo o temeljnim poteškoćama, izvodi sa samopouzdanjem i uspjehom. *Njegov stil ne posjeduje ni trunka šarma* koji se može pronaći u spisima Clifforda ili Kroneckera. *Rigorozan je, izrazito racionalan, toliko pažljiv i pedantan da gotovo postaje zamoran i krajnje razvučen. Za razjašnjenje iznimno složenoga područja koje je odabrao te su osobine možda njegove najveće vrline; ipak, bojim se da njegova djela zbog toga neće biti prihvatljiva onim čitateljima koji nisu spremni na znatnu žrtvu vremena.*" (Love 1894: 494, moj kurziv)

Ovaj ulomak potvrđuje da je već u najranijoj fazi recepcije, tijekom 1890-ih godina, Veroneseov stil izlaganja i neuobičajen način predstavljanja rezultata bio istican kao glavni otežavajući čimbenik za uspješniju diseminaciju Veroneseove teorije (usp. odjeljke [2.1] i [2.5]). Istodobno pokazuje da se Veronese čitao i u Velikoj Britaniji, osobito u Cambridgeu. Osim Lovea, Veroneseov su opus poznavali i proučavali Arthur Cayley (još tijekom ranih 1880-ih, usp. Barrow-Green & Gray 2006), H. W. Richmond (1863–1948)[461], H. F. Baker (1866–1956) (usp. Baker 1913)[462], E. W. Hobson, Alfred North Whitehead (1861–1947)[463], Duncan M. Y. Sommerville (1879–1934) i, naravno, Bertrand Russell.[464] Prethodno sam već

---

[460] Pregledom kasnijih brojeva časopisa *Nature* nisam uspio utvrditi je li Love doista napisao još koji prikaz *Fondamenti*.

[461] Richmondov rad „The Figure Formed from Six Points in Space of Four Dimensions", objavljen u *Mathematische Annalen*, praktično predstavlja detaljan prikaz rezultata sadržanih u Veronese 1876/77 (o Pascalovu teoremu), s tom razlikom što ih Richmond, poput Cremone, reinterpretira analitički. Štoviše, u tom je radu Richmond uveo i pojam „Veroneseovih svojstava Pascalova šesterokuta" (*Veronese's properties of Pascal's Hexagram*). V. Richmond 1900.

[462] U ovoj svojoj predsjedničkoj besjedi Londonskomu matematičkom društvu Baker je istaknuo važnost novih metoda, rezultata i doprinosa Talijanske škole proučavanju teorije algebarskih (hiper)ploha. V. i Bakerove *Principles of Geometry*, u kojima na više mjesta upućuje na Veronesea (Baker 1922).

[463] O tome svjedoči veći broj referenci na Veronesea u Whiteheadovoj *Universal Algebra* (1898; usp. Whitehead 2010), kao i jedno Russellovo pismo Pieriju (od 16. 3. 1912.), u kojem mu izričito kaže da su njegovi i Whiteheadovi radovi „zasnovani na radovima Talijanske škole" (navedeno prema Marchisotto & Smith 2007: 2), čiji je, kao što sam već pokazao (usp. Odjeljak [1.2]), Veronese bio jedan od najistaknutijih i najutjecajnijih članova.

[464] Pored već spomenute disertacije *An Essay on the Foundations of Geometry*, Russell je upućivao na Veronesea i na radove Talijanske škole i u drugim spisima, primjerice u neobjavljenom rukopisu „Recent Italian Work on the Foundations of Mathematics" iz 1901. (RA 220.010840; v. *The Collected Papers of Bertrand Russell*, Vol. III,

navodio pojedine reference na Veronesea iz Hobsonovih knjiga *The Theory of Functions of a Real Variable* (1907) i *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series* (1921/1927). Zanimljivo je da je Hobson referirao na Veronesea i u svom predsjedničkom obraćanju članovima Londonskoga matematičkog društva (LMS) iz 1902. godine, naslovljenom „On the Infinite and the Infinitesimal in Mathematical Analysis". Govoreći o Cantor-Dedekindovu aritmetičkom kontinuumu $\mathbb{R}$ realnih brojeva, Hobson spominje i alternativne teorije kontinuuma te ističe sljedeće:

> „Kao primjer suparničke sheme mogu se ukratko osvrnuti na onu koju je predložio Veronese [u *Fondamenti*]. On razvija pojam apstraktnoga linearnog kontinuuma s intuitivnoga stajališta […] odbacujući princip poznat pod nazivom Arhimedov aksiom. […] *Što se tiče valjanosti Veroneseove sheme, odnosno njezine konzistentnosti u odnosu na logičku teoriju veličina, ne namjeravam iznositi mišljenje; to je pitanje bilo predmetom znatne kontroverze*. Međutim, pod pretpostavkom da je valjana kao moguća shema, ona ne utječe na valjanost Cantor-Dedekindove sheme; usporedna jednostavnost ove potonje predstavlja pokazatelj da upravo ona čini prirodnu osnovu za analizu, kao i za primjene u području mjerenja veličina. Promatrano sa spekulativnog stajališta znanosti, jedan od najzanimljivijih rezultata ostvarenih u devetnaestom stoljeću jest mogućnost uspostave dvaju ili više pojmovnih sustava, od kojih je svaki intrinzično neproturječan, ali koji su međusobno proturječni, pri čemu je svaki od njih zasebno dostatan za reprezentaciju opažajnih činjenica; najupečatljiviji primjer takve vrste imali smo u geometriji." (Hobson 1902: 130–131, moj kurziv)

Dakle, kao i Love, i Hobson je bio svjestan kontroverzi koje su nastale u sporu oko Veroneseove i Cantor-Dedekindove teorije kontinuuma, u okviru kojega se, očito, središnje pitanje odnosilo na *neproturječnost nearhimedovske koncepcije*, odnosno na logički status infinitezimala (v. sljedeći odjeljak). Ugledni britanski matematičar, fizičar te povjesničar i filozof znanosti Edmund T. Whittaker (1873–1956) obradio je Veroneseovu nearhimedovsku geometriju i teoriju kontinuuma u poglavlju „Space, Time, and Movement" svojega povijesno-filozofskog djela *From Euclid to Eddington: A Study of the Conceptions of the External World* (1949), nastaloga na temelju Tarner Lectures koje je održao u Cambridgeu 1947. godine. Naposlijetku, u drugoj polovici 20. stoljeća još će jedan matematičar iz Cambridgea, John Horton Conway (1937–2020), tvorac jedne od najznačajnijih suvremenih nearhimedovskih teorija – teorije nadrealnih brojeva (v. Odjeljak [4.2]) – također otkriti Veroneseov opus.[465]

Pored Njemačke i Velike Britanije, Veroneseovi su radovi ubrzo „prešli" i Atlantik te postali, kao što sam već istaknuo (usp. nap. 379 uz Odjeljak [2.7]), vrlo utjecajni i u Sjedinjenim Američkim Državama, osobito u okviru takozvane Američke postulacijske

Toward the „Principles of Mathematics", 1900–1902; v. Moore 1993: 350–362) ili u natuknici „Geometry, non-Euclidean", napisanoj za *Encyclopaedia Britannica* (v. Moore 1993: 470–504).

[465] U prethodno već spominjanim radovima o Pascalovu šesterokutu (v. Odjeljak [1.2]), Conway i Riba otkrili su da je većina rezultata do kojih su oni neovisno došli „već sadržana u radu Christine Ladd iz 1879., koja ih je pak pripisala Veroneseu", dodajući da se nadaju kako će i njihov rad „ohrabriti druge istraživače" da prouče Veroneseov opus (Conway & Riba 2013: 45).

škole.[466] Osim toga, ostvarili su i veliki utjecaj na C. S. Peircea. Naime, Peirce je potkraj 19. stoljeća također artikulirao jednu inačicu nearhimedovske teorije kontinuuma za koju se s velikim stupnjem pouzdanosti može zaključiti da je bila nadahnuta Veroneseovom teorijom.[467] Čini se, naime, da je u razdoblju do 1896. proučavao pojedine aspekte nearhimedovske geometrije iz *Fondamenti*. Tako u jednom nepotpunom pismu matematičaru Williamu E. Storyju (1850–1930) od 22.3.1896., govoreći o svojem tada još neobjavljenom spisu *New Elements of Mathematics*, Peirce piše: „*Nalikuje Veroneseovoj geometriji*, ali je (barem ja tako mislim) logički mnogo dublji i sasvim sigurno mnogo jednostavniji. Niti ja izravno zalazim u neeuklidsku geometriju." (citirano prema Ehrlich 2010, nap. 30)[468] Još jedan američki filozof, idealist Josiah Royce (1855–1916), osvrnuo se na Veronesea na dvama mjestima u svojim Gifford Lectures, iz kojih je proizašla knjiga *The World and the Individual* (Vol. I, 1900; Vol. II, 1901), pri čemu ga na jednome od njih eksplicitno dovodi u vezu s Peirceom:

> „Gospodin Charles Peirce, onako kako ja razumijem njegova stajališta iz [časopisa] *The Monist*, čini se da gotovo posve usamljen među novijim matematičkim logičarima izvan Italije smatra da se *calculus* u pravom smislu zasniva na koncepciji aktualne beskonačnosti i infinitezimala. U Italiji je Veronese u svojoj geometriji upotrebljavao pojam aktualnih infinitezimala." (Supplementary Essay „*The One, the Many, and the Infinite*" u Royce 1900: 562, nap. 2)[469]

Dakle, kao što možemo vidjeti, i Royce je smatrao da je Peirce bio pod Veroneseovim utjecajem.

Kada je pak riječ o američkim postulacionistima, valja reći da su potkraj 19. i početkom 20. stoljeća „američki matematičari općenito također bili prijemčivi za ideju aksiomatizacije ne samo geometrije nego i drugih grana matematike" (Gray 2008: 246). U tom se pogledu osobito isticala skupina okupljena oko seminara koji je na Sveučilištu u Chicagu vodio E. H. Moore[470], a koja je njegovala bliske veze s Hilbertovom školom u Göttingenu (sec. Gray, *op. cit.*). Moglo bi se reći da je Veroneseov utjecaj na tu skupinu isprva bio neizravan i posredovan proučavanjem Hilbertovih *Grundlagen*; naime, Moore je već

---

[466] Ovaj je naziv, po svoj prilici, skovao John Corcoran 1980. godine. Usp. Scanlan 1991.

[467] Za rekonstrukciju Peirceove teorije, v. Vargas & Moore 2021, kao i Ehrlich 2010.

[468] Imajući na umu prethodnu raspravu o vezi između nearhimedovske i neeuklidske geometrije, vrlo je zanimljivo primijetiti da je Peirce još prije objavljivanja Hilbertovih *Grundlagen* bio svjestan da je Veronese već uspostavio tu povezanost.

[469] Peirce je odgovorio na te Royceove navode u otvorenom pismu „Infinitesimals", objavljenom u časopisu *Science* (Peirce 1900). Ono također svjedoči o Peirceovoj upućenosti u istraživanja iz područja nearhimedovske matematike u Italiji potkraj 19. stoljeća. Na jednom mjestu u tekstu nalazimo sljedeću rečenicu:

> „As a logician, I am more comforted by corroboration in the clear mental atmosphere of Italy than I could be by any seconding from a tobacco-clouded and bemused land (if any such there be) where no philosophical eccentricity misses its champion, but where sane logic has not found favor." (citirano prema Peirce 2010: 203)

[470] Na Moorea, kao i na američku matematiku razdoblja *fin de siècle* općenito, presudno je utjecao F. Klein, Veroneseov nekadašnji profesor i netko tko je, kao što smo vidjeli (usp. odjeljke [1], [1.2] i [2.5]), pomno pratio Veroneseov rad. Za više pojedinosti o oblikovanju matematičkog odsjeka u Chicagu po uzoru na Göttingen v. Parshall & Rowe 1994 i Ciesielska & Tobies 2023, *Oberwolfach Report* 47/2023.

1901/02. organizirao seminar posvećen toj knjizi.[471] Tako, primjerice, u prvom Mooreovu prilogu aksiomatskom zasnivanju geometrije, „On the Projective Axioms of Geometry", ne možemo pronaći nijednu referencu na Veronesea i cijela se Mooreova analiza odvija u potpuno hilbertovskom aksiomatskom okviru (usp. Moore 1902).[472] Međutim, već Mooreov najpoznatiji student Oswald Veblen u svojoj disertaciji *A System of Axioms for Geometry* iz 1903. referira na Veronesea, svrstava ga uz Lobačevskoga među utemeljitelje nestandardnih geometrija i ističe njegov prioritet u raspravama o nezavisnosti aksioma neprekidnosti, a osobito Arhimedova aksioma, od preostalih aksioma geometrije (usp. Veblen 1904: 348). I ne samo to, Veblen i u osvrtu o recepciji Hilbertovih *Grundlagen* u Americi, objavljenom u časopisu *The Monist*, pokazuje poznavanje radova Talijanske škole, Peana, Veronesea („koji je detaljno proučavao neprekidnost prostora"), pa čak i Levi-Civite, ističući da njegov rad „Sui numeri transfiniti" iz 1898. predstavlja „koristan popratni komentar" Veroneseovih *Fondamenti*, koji su „u određenoj mjeri nejasni" (Veblen 1903: 304). Veblen – koji 1905. prelazi na Princeton – posvećuje raspravi o Talijanskoj školi i popularni rad „The Foundations of Geometry. An Historical Sketch and a Simple Example", u kojem ponovno naglašava Veroneseovu važnost zbog „pionirskog rada koji je poduzeo u vezi s aksiomima neprekidnosti" (Veblen 1906: 25–26).[473]

Pored Chicaga, drugo važno središte Američke postulacijske škole bio je Harvard, ponajprije zahvaljujući utjecaju Edwarda V. Huntingtona (1874–1952). Iako je Huntington „sustavan razvoj postulacijske tehnike", odnosno aksiomatske metode, povezivao ponajprije s radovima Peanove škole i Hilbertovim *Grundlagen* (Huntington 1934: 84), u jednom od svojih najznačajnijih radova, „A Complete Set of Postulates for the Theory of Absolute Continuous Magnitude", slijedeći Hölderovu aksiomatizaciju teorije veličina (koja, kao što sam pokazao u Odjeljku [2.6], u cijelosti počiva na Veroneseovoj i s njome je ekvivalentna), i sâm je morao posegnuti za Veroneseovim radovima o aksiomima neprekidnosti (v. Huntington 1902: 265, *Bibliographical Note*).[474] U radu „A Set of Postulates for Abstract Geometry", u kojem je izložio vlastitu aksiomatizaciju elementarne trodimenzionalne euklidske geometrije, Huntington ponovno referira na Veronesea, ističući da je njegova aksiomatizacija iz *Fondamenti* „dobro poznata" (*well known*), jednako kao i aksiomatizacije koje

---

[471] Pored Hilbertovih *Grundlagen*, na Mooreovu su se seminaru čitale Paschove *Vorlesungen* (1882), Peanov rad „Sui fondamenti della Geometria" (1894), Schurov rad „Ueber die Grundlagen der Geometrie" (1901) i Ingramijev udžbenik *Elementi di geometria per le scuole secondarie superiori* (1899) (usp. Haffner *et al.* 2022).

[472] I u Mooreovoj predsjedničkoj besjedi članovima Američkoga matematičkog društva od 29. 12. 1902. godine Hilbert također ima glavnu ulogu: „Opće zanimanje za apstraktnu matematiku potaknuto je Hilbertovim […] *Grundlagen der Geometrie*, djelom bogatim rezultatima i sugestivnim u pogledu metoda." (Moore 1903: 402)

[473] U ovom radu Veblen također spominje i Segreove doprinose proučavanju n-dimenzionalne geometrije, za koje sam u Odjeljku [2.3] pokazao da su bili potaknuti Veroneseovim pionirskim istraživanjima u tom području (što je, naravno, isticao i sâm Segre). V. i Veblen-Youngovu *Projective Geometry*, koja svjedoči da je Veblen poznavao i Veroneseove rane radove iz područja projektivne geometrije (Veblen & Young 1910 i 1918).

[474] Ovaj rad pokazuje koliko je Huntington detaljno i pažljivo proučavao relevantnu literaturu budući da u bibliografiji, pored Veronesea i Höldera, navodi i radove Stolza, Bettazzija, Hilberta, Burali-Fortija i mnogih drugih. V. Scanlan 1991: 989–990 za komparativni prikaz i analizu Hölderova i Huntingtonova sustava aksioma. Huntington je već 1905. godine formulirao i aksiomatizaciju realnih brojeva, kao i jedno od najranijih, vrlo elegantnih izlaganja Cantorove teorije skupova i teorije transfinitnih brojeva (usp. Huntington 1917).

su predložili Pasch, Peano, Pieri, Hilbert, Veblen i drugi. Drugim riječima, Veroneseov sustav aksioma, s kojim smo se susreli u Odjeljku [2.7], prema Huntingtonu stoji *en par* s dugim nizom *fin de siècle* aksiomatizacija i ni u kojem pogledu nije inferioran u usporedbi s njima (usp. Huntington 1913, Prefatory Note, str. 522–523; v. i nap. *). Slično je stajalište, kao što smo već vidjeli u Odjeljku [2.5], zastupao i matematičar sa Sveučilišta Yale James P. Pierpont, koji je kao općeprihvaćenu i neupitnu činjenicu istaknuo da je Veronese bio jedan od vodećih predstavnika moderne aksiomatike geometrije i ključna figura takozvanoga kritičkog sintetičkog pravca u zasnivanju geometrije (Pierpont 1904).

Još jedan harvardski matematičar i povjesničar matematike, Julian Coolidge (1873–1954), također je poznavao Veroneseov opus. Tako u knjizi *The Elements of Non-Euclidean Geometry* ističe Veronesea kao pionira aksiomatskog zasnivanja geometrije i, štoviše, zajedno s Hilbertom i Vahlenom, kao jednoga od najznačajnijih autora koji su vrlo detaljno pisali o „neproturječnosti i značaju logičke nezavisnosti pretpostavki", odnosno aksioma na kojima počiva geometrija (Coolidge 1909: 3–4). Još jedan američki povjesničar matematike, Florian Cajori (1859–1930), također je pisao o Veroneseu, kako u svojoj *A History of Mathematics* (Cajori 1894), jednome od prvih pregleda povijesti matematike objavljenih SAD, tako i u znamenitoj dvotomnoj *A History of Mathematical Notations* (Vol. I, 1928; Vol. II, 1929; v. Cajori 1993), ali i u nizu drugih radova i studija. Među njima se osobito ističe serija članaka „History of Zeno's Arguments on Motion: Phases in the Development of the Theory of Limits", koju je Cajori objavio tijekom 1915. u *The American Mathematical Monthly*. U jednom od njih Cajori piše sljedeće:

> „Nemogućnosti jednoga naraštaja često postaju mogućnosti sljedećega. Weierstraßovo protjerivanje beskonačno malih naišlo je na mnoštvo sljedbenika; starinski infinitezimali više nisu potrebni za objašnjenje kontinuuma. Matematički filozofi i logičari poput Russella i Whiteheada gledaju na odbacivanje infinitezimala kao na korak prema većoj strogosti u matematici. Međutim, valja istaknuti činjenicu da Weierstraßova škola nije općeprihvaćena i da postoje suvremeni zagovornici nearhimedovske matematike i beskonačno malih [veličina], a vodeći među njima jest talijanski matematičar Giuseppe Veronese. On ustraje na tome da Cantorov kontinuum nije jedini mogući neproturječni kontinuum te pruža konstrukciju višega i obuhvatnijega nearhimedovskog kontinuuma. Ovo nije mjesto za detaljno izlaganje *kontroverze između tih dviju škola*; uzgred budi rečeno, ta kontroverza nema nacionalni karakter. Veronese je imao sljedbenike u Njemačkoj (primjerice Stolza i Maxa Simona), kao što su Weierstraß i G. Cantor imali sljedbenike u Italiji (primjerice Peana). […] U Americi C. S. Peirce prihvaća ideju infinitezimala." (Pt. VIII, *AMM*, Vol. XXII, No. 7; Cajori 1915: 219–220, moj kurziv)

(Primijetimo da se, slično prethodno navedenim ulomcima iz Lovea i Hobsona, i u Cajorijevu tumačenju kao središnja tema ponovno pojavljuje kontroverza između Cantora i Veronesea.)

Ono što, međutim, dosad nije bilo poznato u sekundarnoj literaturi o Veroneseu jest da su njegovi radovi bili poznati i proučavani i u Carskoj Rusiji, a potom i u Sovjetskom Savezu. Čini se da je znameniti matematičar i povjesničar matematike, kasnije i priređivač sabranih spisa Lobačevskoga, Veniamin Fjodorovič Kagan (Вениами́н Фёдорович Ка́ган, 1869–1953), prvi sustavno proučavao Veroneseov opus u Rusiji. Kagan je studirao

matematiku u Odesi i Kijevu, a od 1894. u Sankt-Peterburgu, gdje mu je profesor bio Andrej Andrejevič Markov (Андре́й Андре́евич Ма́рков, 1856–1922). Od 1922/23. godine predavao je u Moskvi, gdje je kasnije bio i predstojnik Katedre za zasnivanje geometrije te algebru tenzora i vektora Moskovskoga državnog sveučilišta. Njegovi rani radovi, poput „Этюды по основаниям геометрии“ (*В.О.Ф.Э.М*, 1901), već pokazuju da je čitao Veronesea i Hilberta te da je dobro poznavao nearhimedovsku geometriju (usp. Kagan 1901). Veronese će se poslije pojavljivati i u drugim Kaganovim spisima: primjerice u seriji historiografskih studija „Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии“ (Kagan 1904) ili pak u dvotomnim *Основания геометрии* (Kagan 1905 i, osobito, Kagan 1907a). I, što je najzanimljivije, u radu „Учение о непрерывности“ također detaljno analizira Veroneseov aksiom neprekidnosti, konstrukciju Veroneseovih brojeva, Levi-Civitin model Veroneseova kontinuuma, a čak raspravlja i o recepciji Veroneseove teorije iz *Fondamenti* (usp. Kagan 1907b: 173–186)!

Ruski matematičari imali su priliku upoznati Veronesea i osobno, ne samo na Međunarodnim kongresima matematičara nego i na skupovima Međunarodne komisije za nastavu matematike (izvorno: *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* ili *Internationale Mathematische Unterrichtskommission*; danas: *International Commission on Mathematical Instruction*, ICMI)[475], na kojima je talijanska potkomisija često imala vodeću ulogu. Veronese je, naravno, bio član talijanske potkomisije ICMI od njezina osnutka u Padovi 1909. godine (usp. Giacardi 2019, §2, str. 123). Iste je godine osnovana i ruska potkomisija, a Kagan je sudjelovao u njezinu radu. Na skupu ICMI u Milanu (18.–21.9.1911.) Veroneseov učenik Guido Castelnuovo (1865–1952) održao je plenarno predavanje o egzaktnosti u matematici i njezinoj važnosti u metodičko-didaktičkom kontekstu, u kojem su Veroneseova metodološka razmatranja zauzimala središnje mjesto (usp. Furinghetti 2019: 16–17). Štoviše, uvid u stenografski zapis konferencije pokazuje da je Veronese, *le savant géomètre de Padoue*, bio jedan od glavnih sudionika rasprave, uz Kleina, Hobsona i Enriquesa, te da su svi njegovi prijedlozi prihvaćani aklamacijom. To nedvojbeno svjedoči o njegovu iznimnom ugledu u međunarodnoj matematičkoj zajednici (v. Fehr 1911).[476] Članovi ruske potkomisije, osobito

[475] ICMI je osnovan 1908. godine, a od 1952. djeluje kao stalno povjerenstvo Međunarodne matematičke unije (IMU). Prvi predsjednik Komisije bio je Felix Klein (od 1908. do 1920. godine).

[476] Evo Fehrova sažetog prikaza dijela Veroneseovih prijedloga:

> „Le savant géomètre de Padoue signale ensuite quelques questions qu'il serait intéressant d'étudier. Par exemple, examiner les idées directrices de la réforme de l'enseignement des géométries en Italie et leur influence sur l'évolution de l'enseignement mathématique dans les écoles moyennes. Les recherches sur les principes de la science, en particulier de la géométrie, n'ont-elles pas eu et ne doivent-elles pas avoir une influence sur le même enseignement; par exemple l'enseignement propédeutique de la Géométrie intuitive ou expérimentale n'est-il pas une conséquence de l'origine expérimentale de la Géométrie reconnue par les mathématiciens. D'autre part, on pourrait examiner, dans chaque pays, dans quelle mesure l'enseignement mathématique dans les écoles moyennes de culture générale contribue à la formation de l'esprit et satisfait aux besoins mêmes du pays. Il n'est guère possible, dans ce compte rendu sommaire, de signaler en détail les intéressants problèmes soulevés par M. Veronese. Nous sommes certains d'être l'interprète des congressistes en exprimant le vœu que l'éminent géomètre veuille transmettre dans l'un des fascicules que la

Boris Kojalovič (Борис Михайлович Коялович, 1867–1941) i Dmitrij Sincov (Дмитрий Матвеевич Синцов, 1867–1946), podržali su Veroneseove prijedloge u vezi s reformom ICMI te smatrali da bi njegove metodološke preporuke trebalo usvojiti i slijediti (usp. Karp 2019, §5, str. 164–165).[477]

Ovdje valja napomenuti da je znatan dio Veroneseova utjecaja, osobito u Italiji, ostvaren upravo posredstvom njegovih udžbenika. Obrazovni programi u Italiji tijekom Veroneseova života mijenjali su se u više navrata, a sadržaj školskih programa iz geometrije dugo vremena nije bio precizno utvrđen.[478] Veronese je nastojao pridonijeti njihovu unapređenju dodavanjem opsežnih metodoloških, odnosno metodičko-didaktičkih napomena svojim radovima, osobito knjigama. O tome svjedoče *Fondamenti* (1891), *Elementi* (1895, 1897; v. i *Appendice agli Elementi* iz 1898. godine), kao i *Nozioni elementari di geometria intuitiva* (inačica za niže razrede gimnazije (*ad uso dei ginnasi inferiori*) pojavila se 1901., a 1909. godine objavljeno je i izdanje za tehničke škole).[479] Međutim, upravo je usmjerenost na pedagoška pitanja istodobno predstavljala i otežavajući, odnosno ograničavajući čimbenik, koji je neminovno utjecao na Veroneseov stil i način izlaganja rezultata – da parafraziram

---

Sous-commission italienne compte consacrer à des vues générales sur l'enseignement mathématique." (Fehr 1911: 11–12, odjeljak „Remarques de M. Veronese")

[477] Za više pojedinosti o povijesti i radu ICMI v. zbornik *National Subcommissions of ICMI and their Role in the Reform of Mathematics Education* (ur. A. Karp), objavljen u ediciji International Studies in the History of Mathematics and its Teaching (ur. A. Karp i G. Schubring), Springer, 2019.

Veroneseove su knjige iz geometrije, osobito *Fondamenti* i *Elementi*, bile uvrštene i u nastavne programe izvan Italije. Najzanimljiviji primjer predstavlja prije svega recepcija u Njemačkoj i drugim zemljama njemačkoga govornog područja, gdje je Hermann Thieme (1852–1926), danas slabo poznat matematičar, ali svojedobno vrlo utjecajan po svojim prijedlozima kurikularne reforme u području matematike, osobito na srednjoškolskoj i gimnazijskoj razini, u dokumentu *Die Umgestaltung der Elementar-Geometrie* (1900) istaknuo važnost uvrštavanja Paschovih, Veroneseovih i Hilbertovih radova iz područja zasnivanja geometrije (*Vorlesungen*, *Fondamenti* i *Elementi* te *Grundlagen*) u školske programe te naglasio nužnost primjene njihovih rezultata u nastavi matematike (Thieme 1900; usp. i Volkert 2015: 216–217). Također v. i publikaciju Hilbertova učenika Walthera Lietzmanna (1880.–1959.) *Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher*, objavljenu u Kleinovoj ediciji priređenoj za ICMI, *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission* (Bd. I, Heft I), u kojoj je analiziran niz udžbenika tada u uporabi u Njemačkoj, uključujući i *Schulbuch von Veronese*, odnosno *Elementi* (v. Lietzmann 1909, osobito poglavlje „Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht", str. 15ff.). Propedeutičko i metodičko-didaktičko značenje Veroneseovih knjiga prepoznato je i u Weberovoj *Encyklopädie der Elementar-Mathematik*; v. Bd. II, *Elemente der Geometrie* (Weber *et al.* 1905).

[478] „Zakonom iz 1859. godine, dvije godine prije ujedinjenja Italije, srednje obrazovanje u Italiji podijeljeno je na nižu i višu razinu. Za potrebe klasičnog srednjeg obrazovanja zakonom je uvedena podjela na gimnaziju i licej. Za potrebe tehničkog srednjeg obrazovanja osnovani su takozvani *Scuola Tecnica* i *Istituto Tecnico*. Gimnaziji i tehničkoj školi prethodile su četiri godine osnovne škole. Tehnička škola tako je obuhvaćala isti uzrast kao današnja niža srednja škola (11–14 godina), dok je gimnazija trajala pet godina te je obuhvaćala prve dvije godine srednje škole i potom tri godine liceja. Godine 1896. uveden je takozvani dopunski tečaj (usporedno s nižom gimnazijom i tehničkom školom), a zatim i *Scuola Normale*, posebno namijenjena za *Istruzione Magistrale*, odnosno obrazovanju budućih učitelja u osnovnim školama. […] Godine 1881. intuitivna geometrija prvi se put počela predavati u prva tri razreda gimnazije. Geometrija prije toga uopće nije bila dio nastavnih programa za srednjoškolce." (Menghini 2009: 139). Za više pojedinosti o mjestu geometrije u nastavnim programima u Italiji potkraj 19. i početkom 20. stoljeća v. Menghini 2009, odjeljak „School programmes".

[479] V. i Veronese 1882b, Veronese 1902 te Veronese 1914 za više pojedinosti o Veroneseovu razmatranju geometrijskih metoda. V. i Odjeljak [1.2] za genezu Veroneseova zanimanja za probleme nastave matematike.

prethodno navedene Loveove riječi, njegov je stil bio „toliko pažljiv i pedantan da gotovo postaje zamoran i krajnje razvučen“.

Dodatni problem povezan s Veroneseovim nastavničkim angažmanom bio je taj što, za razliku od Kleina ili Hilberta (koji je imao više od pedeset doktoranada), nije stvorio vlastitu matematičku školu. Imao je tek nekolicinu studenata, među kojima su najpoznatiji bili Levi-Civita i Castelnuovo.[480] Međutim, i Levi-Civita je objavio svega dva rada posvećena nearhimedovskoj matematici (oba na talijanskom jeziku) koji, unatoč tome što su bili pionirskoga karaktera i od temeljne važnosti, dugo vremena nisu naišli na odgovarajuću recepciju (premda su ostvarili utjecaj na Hahna). Kao što sam već istaknuo u Odjeljku [2.6.2], Levi-Civita je tijekom 20. stoljeća, kao i danas, poznat ponajprije po svojim doprinosima tenzorskome računu i matematičkim metodama mehanike, a ne po doprinosima *fin-de-siècle* teoriji nearhimedovskih uređenih struktura. Sljedeća dva izvatka dobro ilustriraju glavni problem:

> „Sasvim je tipično za talijansku situaciju to da su, dok su početkom dvadesetoga stoljeća nearhimedovske geometrije izbile u prvi plan istraživanja Hilbertove škole (ponajprije zahvaljujući M. Dehnu), Veroneseove pionirske radove nastavili školski nastavnici bez ikakvih akademskih uspjeha i postignuća (izuzev Levi-Civite, koji je, međutim, odigrao važnu ulogu u posve drugim područjima istraživanja).“ (Avellone *et al.* 2002: 383–384)

> „Previđen je kreativni aspekt aksiomatske metode […] zbog pedagoške misije Talijana. Njihova je namjera bila jednom zauvijek odrediti što je elementarna geometrija u svrhu obrazovanja budućih školskih nastavnika. Nove geometrije i istraživanja u tom području nisu bili na dnevnom redu.“ (Gray 2009b: 676)[481]

Uzroke koji su doveli do takva, neočekivanog i naizgled paradoksalnog stanja valja tražiti u okolnostima koju sam već skrenuo pozornost u Odjeljku [2.7]. Naime, Veronese se već potkraj 1890-ih godina, najvjerojatnije pod dojmom negativne recepcije *Fondamenti* u prethodnom razdoblju, osobito u Italiji, postupno sve više okreće problemima vezanima uz metodiku nastave geometrije. Time se mijenja i ciljana publika kojoj se obraća, pa su to početkom 20. stoljeća prije svega nastavnici talijanskih srednjih i viših škola. Štoviše, u tom razdoblju objavljuje gotovo isključivo u Italiji i na talijanskom jeziku, što je nedvojbeno dodatno otežalo recepciju njegovih ideja u inozemstvu.[482] No, neovisno o tome, u razdoblju

[480] Treba još spomenuti i A. Bindonija, P. Predellu (1863–1939) i F. Palatinija (1865–1940). V. Palatini 1904.

[481] Kada već govorimo o „pedagoškoj misiji“ talijanskih matematičara, treba istaknuti da je u Italiji 1891. godine osnovano udruženje *Mathesis*, čiji je prvi predsjednik bio Bettazzi. Zahvaljujući matematičarima okupljenima u *Mathesisu*, potkraj 19. stoljeća „metodologija i filozofija elementarne geometrije u Italiji bile su na svom vrhuncu“ (sec. Simon 1906: 13). Max Simon *ad loc.* u tom je pogledu osobito istaknuo zasluge Veronesea, Bettazzija, Peana, Lorije i Enriquesa. Udruženje je izdavalo i važan časopis *Bollettino della "Mathesis" Società Italiana di Matematica*. Za više pojedinosti v. Giacardi 2005.

[482] Veronese je sasvim sigurno bio svjestan važnosti jezika na kojem objavljuje. Naime, u zborniku s konferencije ICMI u Milanu, unatoč činjenici da su službeni radni jezici skupa bili njemački, engleski, francuski i talijanski, sâm je Veronese predložio da se izlagači, kad god je to moguće, u svojim izlaganjima služe francuskim jezikom „jer ga svi razumiju“ (Fehr 1911: 11), odnosno zato što je francuski tada bio *lingua franca* međunarodnoga znanstvenog diskursa.

prije Prvoga svjetskog rata Veroneseovi su rezultati bili poznati i proučavani u svim najrelevantnijim matematičkim središtima u svijetu (v. *Sl. 28*).



Sl. 28. Geografski prikaz transmisije Veroneseovih radova i rezultata do Prvoga svjetskog rata

Još jedna ilustrativna epizoda koja potvrđuje vrlo pozitivnu percepciju Veronesea početkom 20. stoljeća i dobru početnu recepciju njegovih rezultata može se pronaći u Brouwerovoj prepisci s njegovim mentorom Diederikom Kortewegom (1848–1941). Ta nam prepiska otkriva da je mladi Brouwer smatrao Kleina i Veronesea najvećim autoritetima u geometriji razdoblja *fin-de-siècle* te da je razmatrao mogućnost da im pošalje skice svojih još neobjavljenih radova kako bi dobio njihovo mišljenje i komentare.[483] I ne samo to, Veroneseovi *Fondamenti* bili su ključni i za Brouwerovu disertaciju *Over de grondslagen der wiskunde* iz 1907. godine. Sljedeća Van Dalenova ocjena zaslužuje biti navedena u cijelosti:

> „**U vrijeme kada je Brouwer pisao svoju disertaciju, Hilbertov *Festschrift*** (*Grundlagen der Geometrie*) **još uvijek nije dominirao geometrijom u tolikoj mjeri da bi sjećanje na Hilbertove prethodnike već bilo izbrisano**. […] Utjecaj Hilbertovih *Grundlagen* bio je toliko snažan da su kasniji naraštaji stekli dojam kako je aksiomatski pristup geometriji bio isključivo Hilbertovo postignuće. Početkom stoljeća **ta optička distorzija još nije bila uobičajena**. Značajan dio popularnosti Hilbertovih *Grundlagen* očito je proizlazio iz vrlo dojmljiva načina izlaganja koji je odgovarao duhu vremena, a ne toliko iz novina [koje je Hilbert predstavio].“ (van Dalen 2013: 82, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Ovaj ulomak potvrđuje i moju zaključnu ocjenu s kraja Odjeljka [2.5][484], a ubrzo ćemo vidjeti i kako je točno došlo do te „optičke distorzije“ te tko je za nju ponajprije bio

[483] „Bih li mogao poslati primjerke [radova] ljudima poput Kleina ili Veronesea? Ili bi to ipak bilo previše pretenciozno bez prethodnoga poznanstva?“ (pismo Kortewegu od 14. 5. 1904., navedeno prema znamenitoj biografiji Brouwera *L. E. J. Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher*, van Dalen 2013: 48)

[484] Nešto slično istaknuo je i Veblen još 1903. godine: „[Hilbertov] rad o aksiomima doista se teško može nazvati originalnijim ili elegantnijim od, primjerice, radova Peanove škole u Italiji. No, *zahvaljujući privlačnom načinu prezentacije* [*rezultata*], *privukao je pozornost čitavoga matematičkog svijeta* na jedno od najplodnijih područja istraživanja, kako za matematičara-tehničara, tako i za filozofa.“ (Veblen 1903: 308, moj kurziv)

odgovoran (usp. Odjeljak [3.2]). Kada je riječ o drugim autorima radova iz područja zasnivanja geometrije, počevši od Hilberta, većina se u svojim publikacijama oslanjala na Veroneseove rezultate:

> „[**V**]**eliko i temeljno otkriće koje je proizašlo iz Veroneseovih *Fondamenti di geometria*** […] **dominiralo je kasnijim geometrijskim istraživanjima** Hilberta, Hessenberga, Hjelmsleva, Schura, Dehna, Vahlena i **većine drugih progresivno usmjerenih geometara** Hahnova vremena. Naime, radilo se o otkriću da se veliki dijelovi temeljnih teorema klasične euklidske i neeuklidskih geometrija mogu modelirati pomoću analitičkih geometrija [definiranih] nad određenim vrstama uređenih polja, od kojih su samo neka bila arhimedovska; u slučajevima u kojima su uređena polja o kojima je riječ bila nearhimedovska, odgovarajuće nearhimedovske geometrije sadržavale su veličine (dužine, dijelove ploha itd.) koje su beskonačne i druge koje su infinitezimalne u odnosu na neku zadanu jediničnu veličinu određene vrste. Budući da je time filozofsko i temeljno značenje uređenih Abelovih grupa i polja došlo u prvi plan, matematičari su usmjerili pozornost na istraživanje strukture i varijanata tih sustava, na konstrukciju brojevnih sustava potrebnih za njihovu aritmetičku reprezentaciju, kao i na razvoj teorema o uranjanju (*embedding theorems*), kako bi na taj način rasvijetlili sam proces reprezentacije.“ (Ehrlich 1995: 168–169, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

I zaista, već pogled na Schurove radove s kraja 1890-ih (usp. Schur 1898) ili na njegove *Grundlagen der Geometrie* pokazuje da je smatrao Veroneseovo istraživanje Arhimedova aksioma fundamentalnim (*einer gründlichen Untersuchung*), dodajući da je ono „vodilo novom rezultatu, naime, da je velik broj geometrijskih teorema zapravo nezavisan od tog postulata [sc. aksioma] (*sie führte zu dem neuen Ergebnisse, daß ein großer Teil der geometrischen Lehrsätze auch von diesem Postulate unabhängig sei*)“ (Schur 1909: iv–v). I ne samo to, Schur je smatrao da je, unatoč činjenici da Veroneseov rezultat isprva nije bio bezuvjetno prihvaćen[485], njegov rad ipak „potaknuo niz važnih istraživanja o odnosu aksioma i ovisnosti geometrijskih teorema o njima (*gab den Anstoß zu einer Reihe wichtiger Untersuchungen über den Zusammenhang der Axiome und die Abhängigkeit der geometrischen Sätze von ihnen*)“ (*ibid.*). Sami Schurovi *Grundlagen* obiluju referencama na *Fondamenti*, ali i na *Elementi*. Štoviše, Schurova korespondencija s Engelom iz razdoblja 1898–99. otkriva da je tada detaljno proučavao *Elementi*, smatrao ih vrlo zanimljivima te držao da je Veronese, unatoč određenim teškoćama, dao velik i nemjerljiv doprinos području zasnivanja geometrije (pismo od 14.2.1899., navedeno prema Voelke 2010, v. osobito str. 237, nap. 24). Slične pohvale Veroneseu mogu se pronaći i u Schurovu radu „Über die Grundlagen der Geometrie“, u kojem ne samo da ističe Veroneseov prioritet u odnosu na vlastita i Hilbertova istraživanja nego dodaje da je „autor

[485] Zbog toga što je sustav veličina na kojem je temeljio svoj dokaz Veronese „izložio u tako općenitom i teško razumljivom obliku da su se lako mogli javiti nesporazumi (*von ihm in so allgemeiner und schwer verständlicher Form dargelegt wurde, daß sich Mißverständnisse leicht einstellen konnten*)“ (Schur 1909, *ad loc. cit.*). Međutim, Schur je na istome mjestu odmah dodao da nakon Hilbertovih *Grundlagen* više nitko ne može sumnjati u ispravnost Veroneseova rezultata (*Richtigkeit des Veroneseschen Resultats*).

Elementi po prvi put uspio stvoriti knjigu posvećenu elementarnoj geometriji koja u svakom pogledu nadmašuje Euklida po strogosti“ (Schur 1901: 266, nap. ††).[486]

Slična je situacija i s Killingovom knjigom *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*: u sedmom poglavlju („Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie“) čitav je jedan odjeljak posvećen rekonstrukciji Veroneseovih aksiomatizacija geometrije iz *Fondamenti* i *Elementi* te raspravi o nearhimedovskoj geometriji (usp. Killing 1898, Siebenter Abschnitt, §9. „Veroneses Aufbau der Geometrie“, str. 214ff.).[487] Povrh toga, u petom dijelu *Einführung* („Kongruenz und Messung“) Killing također posvećuje čitav jedan odjeljak izlaganju i objašnjenju Veroneseovih brojeva (Killing 1898, Fünfter Abschnitt, §12. „Veroneses transfinite Zahlen“, str. 59ff.). Veronese je, nimalo neočekivano i posve opravdano, zauzeo središnje mjesto i u izvještaju *Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im 19. Jahrhundert*, koji je Max Simon podnio Njemačkom matematičkom društvu 1906. godine (Simon 1906), kao i u prethodno već spomenutoj natuknici „Prinzipien der Geometrie“, koju je Enriques izradio za Kleinovu *Enzyklopädie* (Enriques 1907).

Karl Theodor Vahlen (1869–1945), danas ponajprije poznat po svojoj kasnijoj neslavnoj ulozi u nacionalsocijalističkom programu *Deutsche Mathematik* (i istoimenom časopisu koji je pokrenuo s Ludwigom Bieberbachom, 1886–1982), već u uvodu svoje *Abstrakte Geometrie* ističe da se njegovo stajalište o zasnivanju i fundamentalnim principima geometrije „može pronaći kod Graßmanna (*Die lineale Ausdehnungslehre*, 1894) i Veronesea

---

[486] Ovaj je rad zanimljiv i u svjetlu onoga na što sam već upozorio kako u ovom, tako i u Odjeljku [2.5], jer Schur ističe da su talijanski geometri još prije Hilberta već razvili aksiomatske sustave o čijim metamatematičkim svojstvima Hilbert raspravlja u *Grundlagen*. Schur pomalo ironično dodaje i da se nada kako će njegov rad „pružiti geometrima dobrodošao dodatak pomalo oskudnim bibliografskim referencama u Hilbertovu spisu“ (*eine den Geometern willkommene Ergänzung der etwas knappen Litteraturangaben in der Hilbertschen Schrift zu geben*) (Schur 1901: 266). Naime, sâm se Schur i inače u više navrata žalio drugim matematičarima da ga Hilbert nije podrobnije citirao u *Grundlagen*, smatrajući – po mojemu sudu s pravom (v. Odjeljak [2.5]) – da je njegov utjecaj na Hilbertovo bavljenje zasnivanjem geometrije bio *formativan*. I, kao što je pokazao Voelke, Schur je u pismima Hilbertu u više navrata otvoreno prigovarao zbog toga što Hilbert nije pridavao veću važnost talijanskim geometrima (v. Cod. Ms. D. Hilbert 360 u Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, usp. Voelke 2010: 237–238, nap. 26). Sljedeći ulomak iz Schurova pisma Engelu od 27.10.1900. (kao i izgubljena fusnota iz §12. *Grundlagen*) dobro ilustrira poantu da Hilbert, nalik Cantoru (v. nap. 237 uz Odjeljak [2.4.1]), *nije bio nesklon neakademskoj praksi nenavođenja svojih prethodnika*:

> „Upravo privodim kraju članak o zasnivanju neeuklidske geometrije, ponajprije kako bih istaknuo činjenicu da je zanemaren moj prioritet (*fertig zu machen hauptsächlich, um eine Verdunkelung meiner Prioritätsansprüche*) u pogledu dokaza neovisnosti pojedinih teorema o Arhimedovu postulatu. **Zbog načina na koji citira, Hilbert nije sasvim nedužan kada je riječ o toj nejasnoći**, premda to možda nije učinio namjerno (*an dieser Verdunkelung ist Hilbert durch seine Art des Zitierens, vielleicht ohne es zu wollen, nicht ganz unschuldig*).“ (navedeno prema Voelke 2010: 238, nap. 28; moja emfaza dodana podebljanim slovima)

I zaista, Schur je svojim radom iz 1898. godine Hilbertu praktički stavio na raspolaganje sav potreban materijal za §3 *Grundlagen*. Problematičan odnos između Schura i Hilberta nastavio se i početkom 20. stoljeća, kada Hilbert objavljuje rad o osnovama neeuklidskih geometrija, na što Schur odgovara radom „Zur Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie“ (*Math. Annalen*, 1904), u kojem ponovno ironično napominje: „Ovim pomažem svijetu da malo bolje razumije Hilbertovu motivaciju u radu ‘Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie’ (*Ich helfe darin der Welt, Hilbert in Bezug auf seine Abhandlung ‘Neue Begründung usw.’ etwas in die Karten zu gucken*).“ (citirano prema Voelke 2010: 239, nap. 30)

[487] V. također i §3, „Über die Ebene und die Gerade als Raumgebilde“, ¶5., u kojem Killing izlaže Veroneseovo shvaćanje pravca i ravnine.

(*Grundzüge der Geometrie*, 1894) (*bei Graßmann und Veronese findet sich meine Ansicht, soweit sie sich auf die Grundsätze bezieht*)" (Vahlen 1905: 1). Osim toga, na Veronesea referira i u metodološkim i metamatematičkim dijelovima knjige, osobito u odjeljku o aksiomima neprekidnosti, gdje prihvaća Veroneseovu inačicu toga aksioma.[488] Kao što smo već vidjeli, čak su i članovi Peanove škole, poput Pierija, uvelike bili Veroneseovi dužnici (usp. nap. 379 uz Odjeljak [2.7]). Pieri je toga, naravno, bio svjestan te je uredno upućivao na Veronesea, osobito na *Elementi* (v. Pierijeve studije sabrane u Marchisotto *et al.* 2021).

Međutim, kao i u prethodno razmatranom slučaju sudbine Veroneseova aksioma i Veroneseova reza u algebri, i u geometriji se dogodilo nešto slično. Hilbertovi *Grundlagen* uspjeli su tijekom nekoliko godina potisnuti gotovo sve druge važne knjige iz područja zasnivanja geometrije, uključujući i *Fondamenti*, a rezultati drugih matematičara na koje se – neovisno o tome je li ih izrijekom navodio ili nije - oslanjao sâm Hilbert, počeli su se pripisivati Hilbertu (ili članovima njegove škole), ponajprije kada je riječ o Veroneseovim rezultatima. Tako već u radovima Gerharda Hessenberga (1874–1958) s početka 20. stoljeća ne možemo pronaći nijednu referencu na Veronesea, iako je iz sadržaja radova jasno da problematika koja se u njima obrađuje – formuliranje novih aritmetika dužina (*Streckenrechnungen*) i ispitivanje metamatematičkih svojstava određenih geometrijskih sustava konstruiranih nad (nearhimedovskim) uređenim grupama i/ili poljima – proizlazi izravno iz Veroneseovih istraživanja u *Fondamenti*, te kasnijih Levi-Civitinih rezultata o odnosu nearhimedovske i neeuklidskih geometrija (usp. Hessenberg 1905a, 1905b i 1905c). Hjelmslev (1907), svega dvije godine poslije, upućuje *samo* na Hilberta i Hessenberga, pa je očito da se veza s Veroneseom *već tada* u potpunosti izgubila. Čak i Weyl, kojemu je Veroneseov utjecaj na Hilberta bio dobro poznat, napominje da je Mooreova škola u Chicagu nastavila Hilbertova istraživanja (Weyl 1944: 637).[489]

Da stvar za recepciju Veroneseove nearhimedovske geometrije bude još nepovoljnija, Poincaré je u izvješćima koja je podnio povjerenstvima za dodjelu nagrada Prix Lobatschefsky (za 1903. godinu) i Prix Bolyai (za razdoblje 1905–1910) istaknuo sljedeće:

> „**Najoriginalnija koncepcija gospodina Hilberta jest nearhimedovska geometrija** (*la conception la plus originale de M. Hilbert, c'est celle de la Géométrie non archimédienne*), u kojoj svi [drugi] aksiomi ostaju istiniti osim Arhimedova. […]

[488] „Diese Stetigkeit ist verschieden von derjenigen Dedekinds (vgl. R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1892. Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1903), welche die Meßbarkeit mit umfaßt (vgl. 0. Holder, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß, *Leipz. Ber. Math. phys. Kl.* 1901 p. 10), aber nicht, wie Schönflies meint (vgl. A. Schönflies, Transfinite Zahlen, das Axiom des Archimedes und die projektive Geometrie. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* Bd. V (1897) p. 76 oben), mit ihr äquivalent ist. *Dagegen stimmt die obige Definition der Stetigkeit sachlich mit der von Veronese gegebenen überein* (vgl. G. Veronese, *Atti d. R. Acc. d. Lincei*, ser. 4, memoire d cl. d. sc. f. vol. 6, 1889, p. 612 Princ. IV.), ist aber in der Form einfacher, was für ihre Ausdehnung auf planare und überplanare Mengen (s. u.) wesentlich ist." (Vahlen 1905: 9, nap. ***, moj kurziv)

[489] Hans Freudenthal u dobro poznatom radu „Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. Zugleich eine Besprechung der 8. Aufl. von Hilberts Grundlagen der Geometrie" (Freudenthal 1957), iako spominje Hilbertove prethodnike, od Pascha, preko Kleina do Veronesea (i drugih članova Talijanske škole), ipak ne ističe u dovoljnoj mjeri koliko je Hilbert zapravo ovisio o „minulom radu" barem dviju generacija geometara koje su radile na aksiomatskom zasnivanju geometrije prije pojave *Grundlagen*. Usp. i Freudenthal 1960, kao i Bos 1993.

> Možemo vidjeti kolike su razmjere i implikacije ovog [Hilbertova] otkrića te da ono u razvoju naših ideja predstavlja korak gotovo jednako smion kao onaj na koji nas je naveo Lobačevski. […] U toj je tako smionoj koncepciji Hilbert imao prethodnika. U svojim *Fondamenti* Veronese je imao analognu ideju (*Veronese avait eu une idée analogue*). […] Međutim, **elegancijom i jednostavnošću svoga izlaganja, dubinom svojih filozofskih uvida i načinom na koji je iskoristio** [**tu**] **temeljnu ideju, Hilbert je doista učinio** [**tu**] **novu geometriju svojom** (*Hilbert a bien fait sa chose de la nouvelle géométrie*)." (Poincaré 1904: 23, 25; moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Nažalost, ni drugo Poincaréovo izvješće nije bilo ništa povoljnije za Veronesea (usp. Poincaré 1911a; v. i Odjeljak [3.2]). I u njemu se Veronese spominje tek *en passant*, dok se njegova uloga i doprinos umanjuju ili, bolje rečeno, u potpunosti marginaliziraju opaskama poput one o „analognoj ideji". Zahvaljujući Poincaréovu autoritetu, upravo je Hilbert, a ne Veronese, postao dobitnikom i nagrade Prix Lobatschefsky i nagrade Prix Bolyai. No, to nije bilo jedino Poincaréovo ogrješenje o Veronesea. Međutim, relevantan kontekst za ispravno razumijevanje onoga što sam nazvao Poincaréovom dvostrukom pogreškom ili dvostrukim ogrješenjem o Veronesea (usp. Popović 2017, §4) tiče se već nekoliko puta spomenute kontroverze između Veronesea i Cantora (te matematičara koji su Cantorova stajališta prihvatili bez zadrške). Ta je kontroverza izbila ubrzo nakon objavljivanja Veroneseova rada „Il continuo rettilineo" i, naravno, *Fondamenti*, a upravo je ona presudno oblikovala kasniju recepciju Veroneseove nearhimedovske geometrije. Vratimo se stoga nekoliko godina unatrag.

[3.1] Cantorov antiinfinitezimalizam i „dokaz" protiv mogućnosti infinitezimala

U znamenitoj Cantorovoj biografiji Joseph Dauben istaknuo je da je

> „beskonačno malo, kao stvarno postojeća, apsolutna veličina, bilo nešto potpuno neprihvatljivo Cantoru s obzirom na njegov način razmišljanja. Čitavo je to pitanje postalo predmet žestoke rasprave […] kada je ušao u polemičku razmjenu pisama i članaka s talijanskim matematičarom Veroneseom." (Dauben 1990: 87)

Sličnu „dijagnozu" postavio je i John L. Bell:

> „Cantorova analiza beskonačnih skupova točaka dovela ga je do uvođenja transfinitnih brojeva, čije je objektivno postojanje smatrao nedvojbenim i neupitnim. No tijekom čitave svoje matematičke karijere [Cantor] je ustrajavao u nepokolebljivom, čak dogmatskom, protivljenju infinitezimalama, napadajući nastojanja matematičara poput du Bois-Reymonda i Veronesea da formuliraju rigorozne teorije aktualnih infinitezimala. […] *Njegovo gnušanje prema infinitezimalama bilo je toliko duboko* [*ukorijenjeno*] *da ga je vodilo u posve otvoreno ocrnjivanje i omalovažavanje* [sc. pionira *fin-de-siècle* nearhimedovske matematike – prim. S. P.]." (Bell 2019: 128, moj kurziv)[490]

[490] V. Dodatak D za više pojedinosti o Cantorovu odnosu prema du Bois-Reymondu.

Ono što ovi citati pokazuju jest da je Cantor bio i „ostao protivnik infinitezimala ove ili one vrste tijekom čitava svoga života“ (Ehrlich 2006: 26). Uistinu, kada bismo pokušali trasirati genezu Cantorova antiinfinitezimalizma, njegov prvi eksplicitan iskaz te vrste najvjerojatnije nalazimo već potkraj 1870-ih, i to u pismu Dedekindu od 29.12.1878. Govoreći o jednoj „skandaloznoj pogrešci“ (*uebrigens ist dieser Missgriff, von einer andern Seite wirklich gemacht worden, so unerhört dies auch klingen mag*), Cantor piše i sljedeće:

> „Ne znam jeste li upoznati sa [spisom] *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen* Thomaea; naime, u drugom izdanju, na stranici 9, pojavljuju se brojevi koji su, *horribile dictu*, manji od bilo kojega zamislivog realnog broja, a ipak različiti od nule.“ (prema Meschkowski & Nilson 1991, № 14, str. 50)

Petnaest godina poslije, u pismu Vivantiju od 13.12.1893., Cantor je podrobnije obrazložio svoja stajališta o „patološko-mikrobiološkim entitetima kojima je talijanska matematika tako opasno zaražena“ (*die pathologisch-mikrobiologischen Wesen, mit welchen Italiens Mathematik so gefährlich infiziert ist*) (navedeno prema Meschkowski 1965: 504). Jasno je da se „zaraza“ od koje, prema Cantoru, pati talijanska matematika odnosi na Veroneseova istraživanja objavljena nekoliko godina ranije, 1889. i 1891. godine. Evo kako započinje njegovo pismo:

> „Onaj koji se može podičiti upitnom i posve dubioznom čašću da je prvi uveo infinitarni *Cholera-Bacillus* u matematiku jest, koliko mi je poznato, državni savjetnik iz Jene, Johannes Thomae. Njega je slijedio Paul du Bois-Reymond, koji je u sustavnom razvijanju Thomaeovih ideja otkrio izvrstan način da zadovolji svoju goruću osobnu ambiciju i taštinu (*seines brennenden persönlichen Ehrgeizes und seiner Eitelkeit*). Ovoj dvojici potom se pridružio dobri insbruški profesor Otto Stolz, koji je popularizirao njihova znamenita otkrića u svojim *Vorlesungen über die allgemeine Arithmetik*. Naposljetku, gospodin profesor Veronese (koji je, ako se ne varam, potekao iz poznate škole profesora Felixa Kleina, kojega također štuje kao velikoga matematičkog heroja) na plećima je svojih njemačkih prethodnika i u sprezi s površnim i nejasnim idejama svojega već spomenutog učitelja [sc. Kleina] (*in Verbindung mit den oberflächlichen und unklaren Ideen seines eben erwähnten Lehrers*) izgradio svoju novu teoriju aktualno beskonačno malih dužina te tvrdio da je njome stvorio nove osnove za geometriju (*neue Grundlagen für die Geometrie geschaffen zu haben*).“ (navedeno prema Meschkowski 1965: 505; Cantorov izvorni kurziv)

Dijelovi ovoga pisma objavljeni su u Peanovoj *Rivista di matematica* (Vol. V, 1895) kako bi Cantorov obračun s, kako ih je sâm nazvao u jednom pismu Peanu, „konzorcijem (*das Consortium*) Thomae–du Bois-Reymond–Stolz–Veronese“ dobio širu platformu i potporu (14.9.1895., navedeno prema Meschkowski & Nilson 1991, № 145, str. 364). Međutim, što je zapravo bilo povod Cantorovu sukobu s infinitezimalistima?

Kada je riječ o Thomaeu, Cantorovu kolegi iz Hallea, on se, za razliku od du Bois-Reymonda, Stolza i, osobito, Veronesea, nije čak ni sustavno niti detaljno bavio nearhimedovskim sustavima veličina (usp. Ehrlich 2006: 55). Umjesto toga, tek je u jednoj fusnoti prvoga izdanja svoje knjige o kompleksnimi θ-funkcijama napomenuo da „mjere neprekidnosti (*die Maasse der Stetigkeit*) ili, što je isto, redovi iščezavanja neke funkcije (*die Ordnungen des Verschwindens*) tvore jednodimenzionalni neprekidni sustav veličina (*ein stetiges*

Grössengebiet einer Ausdehnung) […] koji je beskonačno mnogo gušći (*unendlich viel dichter ist*) od […] uobičajenih realnih brojeva", dodajući da u takvu sustavu postoje brojevi „različiti od nule, a ipak manji od svakoga broja koji možemo specificirati odnosno [brojevi manji] od svakoga broja iz uobičajenoga brojevnog područja." (Thomae 1870: 40, nap. *). U drugom, proširenom izdanju knjige iz 1873. također nalazimo tu fusnotu u neznatno izmijenjenu obliku (usp. Thomae 1873: 9, nap. *), ali je u trećem izdanju iz 1890. godine više nema (usp. Thomae 1890), što upućuje na zaključak da samome Thomaeu nije bilo osobito stalo do daljnjega razvijanja tih ideja.

Doduše, Thomae se toj fusnoti ponovno vratio u jednom radu iz 1872. godine, dodavši da, iako „brojevi koje sam predložio možda neće igrati nikakvu ulogu u primijenjenoj matematici", ipak nije suvišno skrenuti pozornost matematičarima na takve oblike jer „mogu rasvijetliti prirodu uobičajenih brojeva" (Thomae 1872: 125). Štoviše, Thomae je u istome radu napomenuo kako vjeruje da „matematičari ne mogu eliminirati beskonačno male veličine različite od nule iz analitičkih razmatranja, iako su teorija uobičajenih [sc. realnih] brojeva i na njoj zasnovana analiza u biti zasnovani na tome da takvi brojevi ne postoje." (*op. cit.*, str. 126)[491] Drugim riječima, još prije objavljivanja Weierstraß-Dedekind-Cantor-Heineove moderne teorije realnih brojeva – koja će potom poslužiti za eliminiranje infinitezimala iz standardne realne analize (usp. Odjeljak [1.3]) – Thomae je sugerirao da je infinitezimale zapravo moguće uvesti na neproturječan način te da ih nije moguće eliminirati pukim pozivanjem na skup, odnosno uređeno polje realnih brojeva koji, kao što je poznato, tvore arhimedovsku strukturu (usp. Odjeljak [2.6.3]).[492] Kao što je to dobro formulirao Ehrlich, s Thomaeovom fusnotom infinitezimali zapravo ulaze u matematički mainstream te potkraj 19. stoljeća postaju središtem velikoga interesovanja te matematički dubokoga i filozofski iznimno značajnoga istraživačkog programa, zahvaljujući pionirskim radovima du Bois-Reymonda, Stolza i, prije svega, Veronesea (Ehrlich 2021: 504). Dakle, Thomae je u kontekstu povijesnoga razvoja nearhimedovske matematike prije svega značajan zbog poticaja koji je dao du Bois-Reymondu, koji je potom potaknuo Stolza, a Stolz je, kao što smo vidjeli u Odjeljku [2.6], naposljetku potaknuo Veroneseova matematičko-filozofska istraživanja nearhimedovskih kontinuuma.

Prije nego što prijeđem na epitete kojima je Cantor u pismu Vivantiju počastio članove „konzorcija", radi povijesne preciznosti valja istaknuti da je Cantor barem tijekom jednoga kraćeg razdoblja početkom 1880-ih ipak zastupao nešto permisivnije stajalište o mogućnosti neproturječnog operiranja infinitezimalama. Tako se u trećem radu iz serije *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* iz 1882. godine u završnoj fusnoti osvrće na ono što naziva od geometrijske intuicije potpuno neovisnom odnosno „općom, čisto aritmetičkom teorijom veličina" (*eine allgemeine, rein arithmetische Größenlehre*), pod čime zapravo misli na

[491] „Peut-être que les nombres que nous avons proposés ne joueront jamais un rôle important dans les mathématiques appliquées; néanmoins il me semble qu'il ne soit pas superflu de rendre attentifs les mathématiciens à ces formes, parce qu'elles peuvent mettre dans son jour la nature des nombres communs. […] Les mathématiciens, je crois, ne pourront éloigner de la sphère des discussions analytiques les quantités infiniment petites, différentes néanmoins de zéro, bien que la théorie des nombres communs et les calculs y fondés soient appuyés essentiellement sur cela, que de telles nombres n'existent pas."

[492] Za više pojedinosti o Thomaeu v. Ehrlich 2006, §10, str. 55–61.

teoriju realnih brojeva.[493] Pritom ističe da se jedna od načelnih teškoća s kojima se susrećemo u matematici tiče „pogreške onih autora koji beskonačno malo [sc. infinitezimale] shvaćaju kao veličinu, a ne kao *modus varijabilnosti veličina* (*als einen Modus der Veränderlichkeit von Größen*)", te zaključuje da „sa stajališta čiste aritmetičke analize (*vom Standpunkte der reinen arithmetischen Analyse*) *ne postoje beskonačno male veličine, nego samo varijabilne veličine koje postaju beskonačno male* (*gibt es keine unendlichen kleinen Größen, wohl aber unendlich klein werdende, veränderliche Größen*)" (navedeno prema *Gesammelte Abhandlungen*, Cantor 1932: 156, nap. 1; moj kurziv). Na prvi pogled čini se da Cantor i ovdje tvrdi da ne postoje beskonačno male veličine, odnosno infinitezimali. Međutim, njegova je tvrdnja ipak suptilnija. On, naime, ne poriče postojanje infinitezimala *tout court*, već tvrdi da u standardnoj realnoj analizi ne postoji ono što možemo nazvati *statički shvaćenim infinitezimalima*. Istodobno i dalje otvorenom mogućnost govora o *dinamički shvaćenim infinitezimalama*, odnosno o varijabilnim veličinama koje teže, ali ipak nisu jednake nuli. Arsenijević te pojmove definira na sljedeći način:

> „*Statičkim* infinitezimalama nazivat ćemo sve određene veličine – aritmetičke, geometrijske ili kinematičke – koje su, po definiciji, manje od svih uobičajenih veličina. […] *Dinamički* infinitezimal možda je najprikladnije definirati kao *veličinu*, bilo koje vrste, koja *se smanjuje* tako da *postaje manja od bilo koje zadane* veličine odgovarajuće vrste." (Arsenijević 2007, §84, str. 410–411, izvorni kurziv)

Ključna poanta u vezi s razlikom između tih dviju vrsta infinitezimala bila je jasna već samom Leibnizu, a tiče se njihova odnosa prema Arhimedovu aksiomu. Naime, shvatimo li ako infinitezimale eksplicitno statički, primjerice kao brojeve oblika $\frac{1}{\infty}$ koji se razlikuju od nule i koji su manji od svakoga konačnog realnog broja (kako su to smatrali Wallis, Bernoulli ili Fontenelle), tada to nužno podrazumijeva negaciju, odnosno odbacivanje Arhimedova aksioma. Nasuprot tome, shvatimo li infinitezimale dinamički, tada govorimo tek o varijabilnim veličinama čije su uzastopne vrijednosti sve manje, sve dok naposljetku ne postanu jednake nuli. Drugim riječima, dinamički shvaćeni infinitezimali zapravo i nisu infinitezimali u strogom smislu riječi, nego je to jedan svojevrsni *façon de parler*,[494] nešto što nam omogućuje da se infinitarnim terminima služimo *als ob*, odnosno kao da njima referiramo na entitete neusporedivo manje od svih konačnih entiteta, iako ti termini *de facto* referiraju samo na varijabilne entitete koji se mogu uzeti proizvoljno malima (ili velikima), ovisno o potrebi. Upravo se na tome, kao što je poznato, temeljilo Leibnizovo konačno *sinkategorematsko shvaćanje infinitezimala* te s njime povezano tumačenje načina funkcioniranja infinitezimalnoga računa (usp. Arsenijević 2007, §85, Arthur 2013, Popović 2016, §2.3 i Probst 2018).[495]

---

[493] Na to upućuje i Cantorova popratna referenca na „već citirane i, srećom, vrlo kratke Dedekindove i moje radove" (*auf die zitierten, freulich nur sehr kurz gehaltenen Aufsätze von Dedekind und mich*).

[494] Citirajući Gaußovo stajalište o infinitezimalama, Cantor na jednom mjestu kaže da je „das Unendliche nur eine *façon de parler* sei" (Cantor 1884: 276).

[495] Hidé Ishiguro u knjizi *Leibniz's Philosophy of Logic and Language* po svoj je prilici prva ukazala na to da se Leibnizovo zrelo shvaćanje infinitezimala svodi na stajalište prema kojem je moguće služiti se „rigoroznim jezikom beskonačnosti i infinitezimala, a istodobno te izraze smatrati sinkategorematskima (u skolastičkom smislu), odnosno tretirati [te] riječi ne kao da označuju [realno postojeće] entitete, nego kao dobro definirane u okviru iskaza u kojima se pojavljuju." (Ishiguro 1991: 82). Prema Ishiguro, riječ „infinitezimal" ne referira ni na

Daljnju razradu Cantorovih nedoumica u pogledu (ontološkoga) statusa infinitezimala možemo pronaći već u *Grundlagen* iz 1883. godine. U §4 Cantor problem formulira na sljedeći način:

> „Prošireni niz cijelih brojeva (*die erweiterte ganze Zahlenreihe*) može se, ako se to želi, bez daljnjega upotpuniti do neprekidnoga skupa brojeva (*zu einer kontinuierlichen Zahlenmenge vervollständigt werden*) tako da se svakom cijelom broju α pridruže svi realni brojevi x veći od nule i manji od jedan.
>
> Možda će se sada postaviti pitanje može li se, nakon što je na taj način postignuto određeno proširenje domene realnih brojeva (doslovno: realnoga brojevnog područja, *eine bestimmte Erweiterung des reellen Zahlengebietes*) u [smjeru] beskonačno velikoga (*in das Unendlichgroße erreicht ist*), s jednakim uspjehom [isto tako] definirati i određeni beskonačno mali brojevi (*mit gleichem Erfolge bestimmte unendlich kleine Zahlen*) ili, što se svodi na isto, [**mogu li se**] **definirati konačni brojevi koji se ne podudaraju s racionalnim i iracionalnim brojevima** […] **nego bi se mogli umetnuti u pretpostavljene praznine među realnim brojevima** (*sondern sich an mutmaßlichen Zwischenstellen inmitten der reellen Zahlen ebenso einfügen möchten*), baš kao što se iracionalni brojevi umeću u niz racionalnih brojeva, ili transcendentni brojevi u strukturu algebarskih brojeva.
>
> **Na pitanje mogućnosti uspostavljanja takvih interpolacija** […] **može se**, **po mojem mišljenju, jasno i precizno** (*klar und deutlich*) **odgovoriti jedino uz pomoć mojih novih brojeva** (*mit Hilfe unsrer neuen Zahlen*) i, osobito, na temelju općega pojma kardinalnog broja dobro uređenih skupova (*auf Grund des allgemeinen Anzahlbegriffes wohlgeordneter Mengen*). Čini mi se da svi prethodni pokušaji dijelom počivaju na pogrešnom poistovjećivanju nepravo-beskonačnoga s pravo-beskonačnim (*auf einer irrtümlichen Verwechslung des Uneigentlich-unendlichen mit dem Eigentlich-unendlichen beruhen*) [sc. potencijalne i aktualne beskonačnosti – prim. S. P.], a dijelom su izgrađeni na posve nesigurnim i nestabilnim temeljima (*auf einer durchaus unsicheren, schwankenden Basis ausgeführt worden sind*).
>
> Filozofi su u novije vrijeme nepravo-beskonačno nazivali 'rđavo' beskonačnim (*'schlechtes' Unendliche*), po mojem mišljenju neopravdano, jer se ono pokazalo kao vrlo dobar i iznimno koristan instrument (*als ein sehr gutes, höchst brauchbares Instrument*) u matematici i prirodnim znanostima. **Koliko mi je poznato**, **beskonačno male veličine dosad su se gotovo uvijek uvodile *isključivo* u obliku nepravo-**

kakvu veličinu – ona naprosto uopće ne referira. Drugim riječima, kada Leibniz u nekom dokazu zapiše diferencijal, odnosno derivaciju dx, time ne referira na aktualni infinitezimal, odnosno na neku nearhimedovsku veličinu, nego se jednostavno služi određenim izrazom *ad calculum aptis*, definiranim tako da poštuje određena pravila (računa) te olakšava i skraćuje dokaze i izračunavanja. Za dosad najcjelovitije tumačenje Leibnizova računa v. nedavno objavljenu monografiju *Leibniz on the Foundations of the Differential Calculus* (Arthur & Rabouin 2025), utemeljenu na dosad neobjavljenim Leibnizovim spisima iz Arhiva u Hannoveru. Također usp. i uvodno poglavlje „What are Infinitesimals?" u Stroyan & Luxemburg 1976: 3–6. Zanimljivo je da je i Cantor u radu „Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche" (1885./86.) Leibniza tumačio na isti način. Istaknuo je da Leibniz derivacije nije shvaćao kao fiksne ili konstantne veličine (*sich feste, konstante Größen*), odnosno kao točno određene beskonačno male veličine (*als wären sie bestimmte unendlich kleine Größen*), nego kao „promjenjive, proizvoljno male pomoćne veličine koje potpuno nestaju iz konačnih rezultata izračunavanja (*während sie doch nur veränderliche, beliebig klein anzunehmende Hilfsgrößen sind, die aus den Endresultaten der Rechnungen gänzlich verschwinden*)", zbog čega ih je i okarakterizirao kao *puke fikcije* (*als bloße Fiktionen*) (prema Cantor 1932: 374).

> **beskonačnoga**. […] **Međutim**, **svaki pokušaj da se takvo beskonačno malo pretvori u *pravo* beskonačno malo** [sc. u aktualne odnosno statički shvaćene infinitezimale – prim. S. P.] **mora se odbaciti kao potpuno uzaludan i besmislen**. Ako pravo-beskonačno male veličine uopće postoje, odnosno ako ih je moguće definirati (*wenn anders überhaupt eigentlich-unendlichkleine Größen existieren, d.h. definierbar sind*), onda one sasvim sigurno nemaju nikakve neposredne veze s poznatim veličinama koje samo postaju beskonačno male [sc. s dinamički shvaćenim infinitezimalima – prim. S. P.] (*so stehen sie sicherlich in keinem unmittelbaren Zusammenhange mit den gewöhnlichen, unendlich klein werdenden Größen*)." (Cantor 1883, §4, navedeno prema *Gesammelte Abhandlungen*, Cantor 1932: 171–172, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Ovaj je ulomak višestruko zanimljiv. S jedne strane, čini se da Cantor ostaje pri stajalištu da se beskonačnost koja se javlja u vezi s infinitezimalima može legitimno shvatiti jedino dinamički, odnosno u terminima potencijalne beskonačnosti. U tom slučaju infinitezimali nisu ništa drugo nego obične varijabilne konačne veličine (*ein veränderliches Endliche* – usp. Cantor 1884: 268). S druge strane, čini se da ipak ostavlja otvorenom mogućnost eventualnih nearhimedovskih proširenja $\mathbb{R}$, kojima bi bilo moguće uvesti odnosno definirati nove, statički shvaćene aktualne infinitezimale, odnosno konkretne i fiksne infinitezimalne brojeve, ali isključivo pod uvjetom da se to pokuša učiniti posredstvom Cantorove vlastite teorije transfinitnih brojeva. Međutim, ono što je Cantor očito već 1883. smatrao nedopustivim bio je svaki pokušaj pretvaranja dinamičkih infinitezimala u statičke, jer bi to predstavljalo μετάβασις εἰς ἄλλο γένος i neminovno rezultiralo nelegitimnim aktualnim beskonačnostima (*illegitime aktuale Unendlichkeiten*) (usp. pismo Eneströmu od 4.11.1885. u Cantor 1932: 374), odnosno „beskonačno malim brojevima ili diferencijalima (derivacijama) koji ne pripadaju sferi Bitka, nego, naprotiv, ne predstavljaju ništa drugo doli moduse Nebitka (*so gehören sie nicht zu der Sphäre des Seienden, sondern sie sind nichts als Modi des Nichtseienden*)" (iz prikaza knjige *Das Princip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte* H. Cohena, Cantor 1884: 267).[496]

Definitivno zaoštravanje Cantorova stajališta prema infinitezimalama uslijedilo je sredinom 1880-ih, a neposredan povod bio je prikaz *Grundlagen* koji je 1885. godine objavio austrijski filozof Benno (Bertram Kohn) Kerry (1858–1889), pripadnik škole Franza Brentana (1838–1917) u Beču, a potom asistent neokantovca Wilhelma Windelbanda u Strasbourgu.[497] U radu „Über G. Cantor's Mannigfaltigkeitsuntersuchungen" Kerry je vrlo

---

[496] Za Cantorovo koketiranje s neokantovcima v. nap. 226 uz Odjeljak [2.4.1]. Iste godine kada je objavio prikaz Cohenove knjige, Cantor u jednom pismu Cohenovu sljedbeniku Laßwitzu (27.12.1884.) napisao da ne vjeruje kako se njegova stajališta o statusu derivacija mogu pomiriti s Cohenovima jer se „derivacija ne smije ubrajati u klasu pojmova koji izražavaju, označuju ili predstavljaju nešto nepromjenljivo, konstantno i postojeće" (*Gleichbleibendes, Constantes, Seiendes*). Ipak, pomirljivim tonom i više u skladu s prethodno citiranim §4 *Grundlagen*, dodaje da ne isključuje „mogućnost da se u nekoj kasnijoj fazi [razvoja] analize pronađu sredstva za definiranje *drukčije* (*verschiedene*) [vrste] veličina koje će s pravom moći biti nazvane [aktualno] beskonačno malima jer će biti manje od svake od dosad korištenih veličina (*als jede der bisher gebrauchten Grössen*)." „Međutim", dodaje Cantor, „te pravo-beskonačno male veličine [sc. statički infinitezimali – prim. S. P.] sigurno neće imati nikakve veze s našim derivacijama." (navedeno prema Meschkowski & Nilson 1991, № 91, str. 235–236)

[497] Filozofima je Kerry ponajprije poznat po svojoj raspravi s Fregeom u seriji radova „Ueber Anschauung und ihre psychische Verarbeitung" (*Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 1884.–1891.), u vezi s takozvanim

detaljno, na četrdesetak stranica, izložio glavne elemente Cantorove teorije skupova, popraćujući ih povijesnim i filozofskim napomenama koje čitatelju znatno olakšavaju praćenje njezina sadržaja. Time je pružio jedan od najranijih vrlo pristupačnih pregleda Cantorovih glavnih ideja i rezultata (usp. Meschkowski & Nilson 1991: 277).[498] Međutim, u jednom dijelu prikaza Kerry se osvrće na prethodno citirani §4 *Grundlagen* i razmatra pitanje statusa infinitezimala. Ispravno primjećuje da „Cantor emfatično inzistira na razlici između vlastitih beskonačnih brojeva [sc. transfinitnih ordinala] i nepravo-beskonačnih veličina […], osobito onih na kojima počiva infinitezimalni račun (*insbesondere der Infinitesimalrechnung unterscheidet*)", a odmah zatim dodaje da Cantor postavlja, ali ne daje konačan odgovor na „pitanje mogu li se također definirati točno određene beskonačno male veličine [sc. statički infinitezimali] (*die Frage: ob auch bestimmte unendlich kleine Grössen definirt werden könnten? wird aufgeworfen, aber unbeantwortet gelassen*)" (Kerry 1885a: 212). No toj je rečenici Kerry dodao i sljedeću fusnotu:

> „Po mojem mišljenju, formalna definicija točno određenih beskonačno malih veličina (*bestimmt-unendlichkleiner Grössen*) [sc. statičkih infinitezimala – prim. S. P.] već je dana određivanjem najveće od tih veličina kao one koja, kada se sama sebi pribroji ω puta, daje u zbroju 1 (*die* ω*-mal zu sich selbst addirt als Summe*: 1 *ergibt*),
>
> $$\underbrace{\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega}+\cdots+\frac{1}{\omega}}_{\omega \text{ puta}}=1.$$
>
> sljedeća najmanja tada je ona koja, kada se sama sebi pribroji $\omega + 1$ put, daje u zbroju 1, itd. Slijedom toga, točno određene beskonačno male veličine tada se mogu označiti kao:
>
> $$\frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega+1}, \ldots, \frac{1}{2\omega}, \ldots, \frac{1}{\omega^2}, \ldots.$$
>
> Međutim, nije jasno postoji li ikakvo područje empirijske primjene za tako definirane veličine." (Kerry 1885a: 212, nap. 2)[499]

Nešto dalje u tekstu Kerry dodaje kako mu se čini

> „i više nego plauzibilnim (*mehr als plausibel*) da će s vremenom biti otkriveni neki novi brojevi koji se mogu urediti od manjih prema većima poput [uobičajenih] racionalnih i iracionalnih brojeva […], tako da će se, primjerice, i svaki od tih točno određenih beskonačno malih brojeva (*jene bestimmt unendlich-kleinen Zahlen*), poput $\frac{1}{\omega}$,

paradoksom pojma „konj". Kerry je također napisao prikaz du Bois-Reymondove *Allgemeine Functionentheorie* (usp. Kerry 1885b). Za više pojedinosti o Kerryju v. Peckhaus 1994.

[498] Cantor je mogao biti zadovoljan jer je Kerry već u uvodu istaknuo da je teorija skupova dotad naišla na vrlo oskudnu recepciju u filozofskim krugovima te da je bila predmet brojnih pogrešnih tumačenja i nesporazuma (*vielfache Missverständnisse*), iako zaslužuje pozornost zbog „iznimnoga teorijskog značenja" (*ungemeinen theoretischen Bedeutung*) (Kerry 1885a: 191). Štoviše, Kerry je, kao što su istaknuli Meschkowski i Nilson (1991: 277), čak nastojao predstaviti teoriju skupova kao filozofsku, odnosno iz filozofskih razmatranja novoutemeljenu disciplinu (*die Philosophie* […] *scheint in den Mannigfaltigkeitsuntersuchungen wieder eine neue Disciplin aus sich herausgeboren zu haben* – usp. Kerry 1885a: 231–232). To se svakako moralo svidjeti Cantoru koji je, kao što smo već vidjeli (usp. nap. 226), i sâm inzistirao na apsolutnoj nerazdvojivosti matematike i filozofije.

[499] U Ehrlich 2006: 28–29 donesen je engleski prijevod ove Kerryjeve napomene. Međutim, Ehrlich nije ostao vjeran Kerryjevu izvorniku pa, primjerice, *bestimmt-unendlichkleiner Grössen* prevodi kao *definite*, *infinitely small numbers*, premda Kerry u izvorniku dosljedno govori o „veličinama", a ne o „brojevima".

$\frac{1}{\omega+1}$, itd., također moći i morati smatrati kao da se nalazi na dužini [sc. na realnom brojevnom pravcu – prim. S. P.]. Drugim riječima, točka koja se kreće (*ein beweglicher Punkt*) i prelazi interval $[0,1]$ također će proći preko brojeva $\frac{1}{\omega}$, $\frac{1}{\omega+1}$, itd." (Kerry 1885a: 220)

Dakle, kao što možemo vidjeti, Kerry je ni manje ni više nego predložio da se – *horribile dictu* – infinitezimali definiraju pomoću Cantorovih transfinitnih brojeva, a da se njima zatim na neki način dopune ili prošire realni brojevi. Doduše, valja imati na umu da je upravo sâm Cantor u §4 *Grundlagen* sugerirao kako bi pitanje statusa infinitezimala trebalo razriješiti upravo oslanjanjem na njegovu vlastitu teoriju. Moglo bi se stoga reći da ga je Kerry jednostavno shvatio doslovno te, držeći ga za riječ, ustvrdio da aktualni, odnosno statički shvaćeni infinitezimali (*bestimmt-unendlichkleiner Grössen*) matematički postoje utoliko što se jednostavno mogu definirati pomoću Cantorovih transfinitnih brojeva, i to kao njihovi recipročne vrijednosti: ako postoji ω, tada bi morao postojati i $\frac{1}{\omega}$ – ili je barem Kerry tako smatrao.

Kerry se tijekom pripreme svojega prikaza *Grundlagen* konzultirao s Cantorom, o čemu svjedoči nekoliko nacrta pisama sačuvanih u Cantorovu *Nachlassu*[500] (usp. Peckhaus 1994: 4). Osim toga, prilikom posjeta Halleu 20. 12. 1886. dao je Cantoru na uvid i svojevrsnu predrecenziju te dio radova iz serije „Ueber Anschauung und ihre psychische Verarbeitung", u kojima se također osvrće na teoriju skupova. Međutim, u korespondenciji s početka 1887. godine Cantor ne komentira te radove, nego se vraća Kerryjevu prikazu *Grundlagen*, za koji kaže da prethodno nije želio iznositi „svoje rezerve koje bi mogle omesti proces tiskanja" niti je ikakvim kritičkim primjedbama htio znatnije intervenirati u one dijelove rada u kojima Kerry iznosi vlastita stajališta (pismo od 4.2.1887., navedeno prema Meschkowski & Nilson 1991, № 108, str. 275). Cantor potom bez okolišanja prelazi na stvar i kaže:

„Morao sam zadržati pravo da Vam nekom kasnijom prilikom objasnim zbog čega smatram da Vaše stajalište o neproturječnoj mogućnosti brojeva oblika $\frac{1}{\omega}$ nije ispravno (*ihre Ansichten über die widerspruchsfreie Möglichkeit der Zahlen der Art* $\frac{1}{\omega}$ *nicht für richtig halte*). […] [B]it će potrebno temeljito opovrgnuti (*gründlich zu widerlegen*) sve nedoumice (*die Bedenken*) kojih se, po mojem mišljenju, i dalje pogrešno držite." (*ad loc. cit.*)

Drugim riječima, već u ovome pismu nailazimo na prvu formulaciju, odnosno osnovnu ideju Cantorova dokaza protiv mogućnosti infinitezimala:

„Dokaz da su numeričke veličine oblika $\frac{1}{\omega}$ samoproturječne proizlazi iz najminimalnijih uvjeta koje moraju zadovoljavati pojmovi linearne veličine (*lineare*

[500] Usp. Cod. Ms. Cantor 16, № 39, 43, 45–6, 48 i 52–4, Briefbuch I za razdoblje 1884–1888 (Niederrsächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung). Nažalost, nije sačuvano nijedno Kerryjevo pismo, a po svoj prilici ni Cantorova pisma, odnosno njihove skice, nisu sačuvani *in extenso*. Usp. Proietti 2008: 344, nap. 5.

Grössenbegriffe) i pokazuje da se [ti uvjeti] ne mogu uskladiti s onim zahtjevima (*Deziderata*) koje podrazumijeva simbol $\frac{1}{\omega}$." (*ibid.*)[501]

Ključna stvar koju pritom valja imati na umu jest da se svi Cantorovi pokušaji da „dokaže" proturječnost infinitezimala svode na inzistiranje da su aktualno beskonačno male veličine, odnosno brojevi, inkompatibilne s pojmom „linearne veličine" (*lineare Grössenbegriff*), koji, međutim, Cantor nigdje eksplicitno ne definira – ni u pismima Kerryju, ni u službenoj odnosno konačnoj verziji dokaza koju je u svibnju 1887. najprije iznio u pismima Goldscheideru i Weierstraßu, a potom i objavio u cjelovitom obliku u §VI. spisa *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, tiskanoga iste godine (v. Dodatak D). Srećom, jedna Cantorova usputna napomena iz pisma švedskom matematičaru i povjesničaru matematike Gustafu Eneströmu (1852–1923) od 6.3.1887. donekle rasvjetljuje na što je (barem okvirno) mogao misliti pod pojmom „linearna veličina":

> „Sjetit ćete se da sam na str. 8 mojih *Grundlagen* ostavio otvorenim pitanje postoje li aktualno beskonačno mali brojevi (*eigentlich-unendlich kleine*) i, još općenitije, postoje li još neke konačne *linearne* numeričke veličine (*noch andere lineare endliche Zahlgrössen*) osim racionalnih i iracionalnih brojeva; **pod *linearnom* numeričkom veličinom** (*unter einer linearen Zahlgrösse*) **podrazumijevam onu** [**veličinu ili onaj broj**] **za koji se usporedbom može utvrditi da je veći od, jednak ili manji od neke realne veličine** [sc. **od nekoga realnog broja**] (*reellen Grössen*). […] Oduvijek sam zastupao stajalište da je područje linearnih veličina u potpunosti zaokruženo i zatvoreno poznatim realnim brojevima (*dass das Gebiet der linearen Grössen mit den bekannten reellen Zahlgrössen durchaus abgeschlossen sei*), te da stoga uz njih ne postoje nikakve druge linearne numeričke veličine [to jest brojevi], a osobito nikakvi *točno određeni beskonačno mali brojevi* (*und im Besonderen keine bestimmt unendlich kleinen Zahlen gibt*). To sada mogu i dokazati pomoću [mojih] transfinitnih brojeva." (navedeno prema Meschkowski & Nilson 1991, № 113, str. 278; Cantorov izvorni kurziv, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Mislim da se nekolicina tumača koji su prije mene pokušali rekonstruirati Cantorov dokaz (ili dokaze), ponajprije Laugwitz i Ehrlich[502], bez osobite potrebe odveć mučila pokušavajući odgonetnuti na što se zapravo odnosi Cantorov *lineare Grössenbegriff*, ne bi li tako

---

[501] „Der Beweis, daß Zahlgrössen von der Art $\frac{1}{\omega}$ sich selbst widersprechen, geht von den minimalsten Bedingungen aus, welchen lineare Grössenbegriffe zu genügen haben und zeigt, dass sie nicht in Einklang mit der in dem Symbol $\frac{1}{\omega}$ ausgedrückten Forderung zu bringen sind."

[502] Pored Laugwitza (2002 – riječ je o radu pronađenom u Laugwitzovoj ostavštini, koji se temelji na predavanju održanom na IV. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik 1995. godine) i Ehrlicha (2006), koliko je meni poznato, Cantorovim dokazom bavili su se još samo Matthew E. Moore (usp. Moore 2002) i Carlo Proietti (2008). Međutim, Proietti slijedi Ehrlicha takoreći *à la lettre*, dok je Moore jasno istaknuo da njegov cilj nije bio pružiti preciznu, povijesno i tekstualno utemeljenu ekspoziciju Cantorova dokaza, nego jednu moguću, *prima facie* plauzibilnu rekonstrukciju: „Ja nisam nikakav proučavatelj Cantora (*no Cantor scholar*). […] Stoga me ne zanima toliko što je sam Cantor točno htio reći koliko što bismo mi, slijedeći Cantora, mogli reći o beskonačno malom. U skladu s tim, neću se ispričavati zbog anahronizama u svojoj rekonstrukciji i bit ću dogmatičan u pogledu mnogih interpretativnih pitanja koja bi zahtijevala dulju raspravu kada bi egzegeza bila moj glavni zadatak." (Moore 2002: 305). V. i Ehrlichovu napomenu o Mooreovu „alternativnom prijevodu" Cantorova dokaza u Ehrlich 2006: 51–52, nap. 80. Kraći prikaz Cantorova donosi i Freguglia (2021, §2, str. 147–148), no i taj se prikaz u bitnome oslanja na Ehrlich 2006.

njegovo kriptično izlaganje učinila koliko-toliko razumljivim. Podsjetimo, kao što smo vidjeli u Odjeljku [2.6], pojam „linearna veličina“ uveo je du Bois-Reymond u *Allgemeine Functionentheorie*, odredivši linearne veličine kao one koje su „poput dužina, uzajamno usporedive i mjerljive“, što znači da se mogu „urediti po veličini“. To se u biti svodi upravo na ono što je i Cantor rekao Eneströmu, definirajući linearne veličine kao „veličine za koje se usporedbom može utvrditi da su veće od, jednake ili manje od neke realne veličine“.[503] A kao što su istaknuli i Stolz i Bettazzi, *linearne su veličine po definiciji arhimedovske*, odnosno one koje zadovoljavaju Arhimedov aksiom (usp. Stolz 1883: 506 i Bettazzi 1890: 42).[504] No, i to je ključna poanta, ako Cantor već na početku prešutno ili implicitno pretpostavlja Arhimedov aksiom, tada njegov „dokaz“ nemogućnosti infinitezimala neminovno postaje *cirkularan*, budući da Arhimedov aksiom, kako je istaknuo Veronese, „*a priori* isključuje infinitezimalne veličine“ (*la grandezza infinitesima è esclusa a priori*) (Veronese 1891: 105, nap. 1). Drugim riječima, Bettazzi je s pravom primijetio da „s Arhimedovim postulatom izravno slijedi da infinitezimali ne postoje, a Cantorov dokaz postaje izlišan“ (*con il postulato d'Archimede, si ha immediatamente che con essa l'infinitesimo non esiste, e la dimostrazione di Cantor diviene inutile*) (Bettazzi 1891: 179). Međutim, budući da je još Bettazzi ostavio otvorenom mogućnost da Cantor u *Mitteilungen* nije imao, ili barem nije morao imati, na umu du Bois-Reymondov (a time ni Stolzovo, Veroneseovo ili Bettazzijevo) shvaćanje pojma „linearna veličina“, nego neko vlastito shvaćanje *sui generis*, pogledajmo što nam u tom pogledu otkrivaju Cantorove napomene iz prepiske s Kerryjem i hoće li nas analiza tih napomena dovesti do istoga zaključka o Cantorovu navodnom „dokazu“.

Za potrebe argumenta Cantor pretpostavlja da su zadani:

(i) „područje svih takozvanih pozitivnih realnih veličina“ (*das Gebiet der aller sogen. pos. reellen Grössen*), odnosno svi racionalni i iracionalni brojevi;

(ii) (ii) „područje transfinitnih brojeva druge klase α“, odnosno svi beskonačni ordinali manji od najmanjega neprebrojivog ordinala ω_1;

(iii) (iii) područje brojeva oblika $\alpha + x$ izvedenih iz (i) i (ii), pri čemu „možemo fiksirati da je $x < 1$“; i, naposljetku,

---

[503] Usp. i §16 du Bois-Reymondove *Allgemeine Functionentheorie*, naslovljen „Schärfere Definition des lineares Grössenbegriffs“ (du Bois-Reymond 1882: 43–48). Ondje du Bois-Reymond specificira nekoliko uvjeta koje bi linearne veličine trebale zadovoljavati, a u formulaciji petoga uvjeta jasno se može prepoznati varijanta Arhimedova aksioma: „Uvijek se mogu zbrajati (*zusammenfügen, additioner*) jednake ili nejednake veličine, od kojih najmanja ne smije biti manja od neke proizvoljno male zadane veličine, u dovoljnom broju (*in genügender Anzahl, en nombre suffisant*), kako bi se dobila veličina koja nije manja od bilo koje unaprijed zadane veličine iste vrste (*die nicht kleiner ist, als irgend eine vorgelegte derselben Art*).“ (*op. cit.*, str. 46; za francuski prijevod v. du Bois-Reymond 1887: 54). Povrh toga, i dio du Bois-Reymondova šestoga uvjeta može se promatrati kao svojevrsni analogon formulacije Arhimedova aksioma iz desete knjige *Elemenata* (LIB. X, PROP. 1): „Svaka zadana veličina može se podijeliti na manje dijelove na bezbroj [različitih] načina, pri čemu među tim podjelama razlikujemo one na dvije, tri ili više međusobno jednakih veličina (*in zwei, drei oder mehr untereinander gleiche Grössen*). Dijeljenje veličine može se nastaviti sve dok svi dijelovi ne postanu manji od neke proizvoljno male veličine iste vrste (*bis die Theile sämmtlich kleiner werden als eine beliebig klein anzunehmende Grösse derselben Art*).“ (du Bois-Reymond 1882: 46). V. Appendix I u Ehrlich 2006: 102ff.

[504] „Es müssen somit die Grössen von den angegebenen Eigenschaften, die absolute Grössen heissen mögen, in zwei Classen getheilt werden, je nachdem das Axiom des Archimedes besteht oder nicht. Die Grössen der ersten Classe hat Hr. P. du Bois-Reymond treffend als lineare.“ (Stolz, *op. cit, ad loc.*)

(iv) (iv) neki „drugi pozitivni brojevi $\zeta, \zeta', \zeta'', \ldots$“ (*andere positive Zahlen*), koji bi trebali predstavljati infinitezimale (pismo Kerryju od 4.2.1887.).

U vezi s (iv), odnosno brojevima tipa ζ, Cantor postavlja pitanje „koje bi uvjete oni nužno morali zadovoljavati kako bi se i dalje s pravom mogli smatrati linearnima u istom smislu kao i poznate veličine koje među sobom stoje u fiksnom odnosu 'manje od' i 'veće od'“ (*unter einander in fester Beziehung des Grösser und Kleinerseins stehenden Grössen machen sollen*) (*op. cit.*, navedeno prema Meschkowski & Nilson 1991, № 108, str. 276). Cantor potom specificira tri uvjeta, odnosno tri aksioma, za koje će u pismima Kerryju od 8. i 18.3.1887. reći da se ne odnose samo na brojeve tipa ζ nego, općenito uzevši, na sve linearne veličine (v. napomene uz Meschkowski & Nilson 1991, № 110, str. 280).[505] Neka kolekcija $\mathfrak{L}$ linearnih veličina $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ mora zadovoljavati sljedeće aksiome:

(**C1**)	Zbrajanje konačnog broja takvih veličina [sc. tipa ζ] uvijek je moguće i zadovoljava zakon asocijativnosti. Posebice, konačni umnošci $\zeta \cdot \nu$ svake veličine ζ, gdje je $\zeta \neq 2^n$, mogući su kada je ν konačni cjelobrojni množitelj (odnosno kada $\nu \in \mathbb{N}$).
(**C2**)	Veličine u uobičajenom beskonačnom nizu $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ moraju imati određenu sumu s, gdje s ili izvornom ili proširenom području (*wo s entweder dem alten oder dem erweiterten Gebiete angehört*) odnosno $\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n + \cdots = s \in \mathfrak{L}$.
(**C3**)	Ako je s zbroj beskonačnog niza $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$, onda, ako je s' neka veličina za koju se zna da je manja od s, tada mora postojati cijeli broj n takav da vrijedi $\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n > s'$. (sve iz pisma Kerryju od 4.2.1887, navedeno prema Meschkowski & Nilson 1991, № 108, str. 276)

Polazeći od uvjeta (**C1**)–(**C3**), Cantorovo izvođenje nemogućnosti infinitezimala oblika $\frac{1}{\omega}$ odvija se na sljedeći način:

„Ako bi $\zeta = \frac{1}{\omega}$ bila [linearna] veličina, tada bi ζ morala imati svojstvo da

$$\zeta \cdot \omega = 1,$$

odnosno, ako bismo postavili da su $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ jednaki sa ζ to jest ako bi $\zeta_1 = \zeta_2 = \cdots = \zeta_n = \cdots = \zeta = \frac{1}{\omega}$, tada bi vrijedilo da

(A) $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \cdots$ *in inf.* $= 1$ [sc. $\underbrace{\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega} + \cdots + \frac{1}{\omega}}_{\omega \text{ puta}} = 1$].

Pretpostavimo sada da je s' neka veličina između $\frac{1}{2}$ i 1, primjerice, da je $s' = \frac{3}{4}$. Tada, [prema (**C3**),] mora postojati konačan cijeli broj n takav da

(B) $$\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n > \frac{3}{4}.$$

[505] „So muß ich denn zum siebenten Male wiederholen, dass zum Wesen der positiven mathematischen […] linearen Grössen nicht nur die von Ihnen richtig hervorgehobene Vergleichbarkeit gehört, sondern auch die in meinen beiden Axiomen [sc. aksiomi (**C1**)–(**C3**) iz pisma od 4.2. – prim. S. P.] ausgesprochene unbeschränkte Additions- u. Subtraktionsfähigkeit (letztere natürlich in dem Sinne, dass die kleinere Grösse von der grösseren abziehbar sein soll).“

Međutim, budući da su svi $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ jednaki i iznose ζ [odnosno $\frac{1}{\omega}$], iz (B) slijedi da:

$$\zeta_{n+1} + \zeta_{n+2} + \cdots + \zeta_{2n} > \frac{3}{4}$$

i, slijedom toga, da

(C) $$\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n + \zeta_{n+1} + \zeta_{n+2} + \cdots + \zeta_{2n} > \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}.$$

Međutim, rezultat (C) inkompatibilan je s (A) jer ima apsurdnu posljedicu da je [zbroj] prvih $2n$ termina (ili članova) na lijevoj strani jednakosti (A) veći od $\frac{3}{2}$, premda svi termini zajedno imaju zbroj jednak 1. Stoga pretpostavka [o postojanju] veličina oblika $\frac{1}{\omega}$ vodi u proturječje (*also führt die Forderung von Grössen der Art* $\frac{1}{\omega}$ *auf Widerspruch*)." (iz pisma Kerryju od 4.2.1887, Meschkowski & Nilson 1991, № 108, str. 276)

Što je sporno u vezi s ovim argumentom? Pogledajmo ponovno aksiom (**C3**):

$$(\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n = s) \Rightarrow [\forall s' < s \exists n \in \mathbb{N} : \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n > s'].$$

To je očito jedna od formulacija ili inačica Arhimedova aksioma.[506] Time ponovno dolazimo do moje prethodno iznesene poante, proizašle iz analize pojma linearne veličine: Cantorov „dokaz" postaje cirkularan jer pretpostavlja upravo ono što bi tek trebalo dokazati. Prema tome, zaključimo: pretpostavimo li Arhimedov aksiom, infinitezimali su već samim time isključeni. Do istoga je zaključka došao i Dauben:

> „*Njegovo* [sc. *Cantorovo*] *odbacivanje infinitezimala zasigurno je bilo pogrešno utoliko što je počivalo na petitio principii*. Pretpostavka da svi brojevi *moraju* biti linearni bila je ekvivalentna arhimedovskom svojstvu te stoga i nije čudo što je Cantor mogao 'dokazati' [Arhimedov] aksiom. Infinitezimali su bili isključeni već njegovim izvornim pretpostavkama [sc. aksiomom (**C3**)], a njegov dokaz njihove nemogućnosti bio je, slijedom toga, pogrešan jer je bio cirkularan." (Dauben 1990: 131, moj kurziv)

Iako Kerryjeva pisma nisu sačuvana, iz sadržaja i tona Cantorovih odgovora, osobito iz ožujskih pisama (od 8.3. i 18.3.1887.), možemo posredno zaključiti da Kerry očito nije bio uvjeren Cantorovim „dokazom", što je Cantora istodobno razočaralo i razbjesnilo:

> „*Dixi et salvavi animam meam.* Vjerujem da sam učinio sve što sam mogao kako bih Vas odvratio od Vaših žalosnih zabluda (*von Ihren traurigen Irrthümern abzubringen*). U tome nisam uspio i sada se mogu samo nadati da će Vas neko kasnije, zrelije razmišljanje vratiti na put razuma (*in vernünftmässige Bahnen*)." (pismo od 8.3.1887., Meschkowski & Nilson 1991, № 110, str. 280)

> „Pišem Vam ovo bez ikakve nade u uspjeh. […] Čini mi se da spas posredstvom ljudske pomoći u Vašem slučaju više nije moguć (*eine Rettung durch menschliche Hülfe erscheint mir bei Ihnen nicht mehr möglich zu sein*)." (pismo od 18.3.1887., Meschkowski & Nilson 1991, *ad loc.*)

[506] Još preciznije, riječ je o varijaciji na temu aksioma [$\mathbf{T_{sup}}$], odnosno teorema o supremumu koji je, kao što smo vidjeli u Odjeljku [2.6.3], ekvivalentan Arhimedovu aksiomu.

Proietti je uvidom u još uvijek neobjavljene Cantorove *Briefbücher* utvrdio da se iz Cantorova pisma od 3. 3. 1887. može zaključiti kako je Kerry s pravom doveo u pitanje status uvjeta (**C3**) (usp. Proietti 2008, §3.2, str. 355). Međutim, Cantor mu je u odgovoru rekao da je moguće kako se u početku (u pismu od 4.2.) neoprezno izrazio nazvavši (**C3**) „principom ili aksiomom" (*Grundsatz*), jer bi bilo bolje da ga je nazvao „teoremom" (*Hauptsatz*), budući da su samo prva dva uvjeta, (**C1**) i (**C2**), zapravo aksiomi u pravom smislu riječi. Slično će stajalište o statusu Arhimedova aksioma Cantor zauzeti i u konačnoj verziji „dokaza" protiv mogućnosti infinitezimala iz svibnja 1887., koju će potom objaviti u *Mitteilungen*. Naime, Cantor će ondje inzistirati na tome da „takozvani 'Arhimedov aksiom' *uopće nije nikakav aksiom, nego stav* [sc. *teorem*] *koji s logičkom nužnošću slijedi iz pojma linearne veličine* (*das sogenannte 'Archimedische Axiom' gar kein Axiom, sondern ein, aus dem linearen Größenbegriff mit logischem Zwang folgender Satz*)." (v. Dodatak D). Ta je Cantorova tvrdnja, premda posve irelevantna za pitanje ontološkoga statusa infinitezimala, trivijalno točna. Budući da su linearne veličine već definirane kao arhimedovske, razumljivo je da Arhimedov aksiom, odnosno arhimedovsko svojstvo, tada na neki način „slijedi" iz samoga pojma linearne veličine. Govoreći o Cantorovoj strategiji u prethodno rekonstruiranom „dokazu", Ehrlich je istaknuo da Cantor nije isključio mogućnost da je postojanje infinitezimala u potpunosti kompatibilno s nekom alternativnom, dakle nekantorovskom, ali ipak potpuno legitimnom koncepcijom veličine (Ehrlich 2006: 34). I zaista, kao što su na to već upozorili du Bois-Reymond, Stolz i Bettazzi, uz linearne postoje i *nelinearne veličine* koje se, kako su pokazali Veronese i Levi-Civita, a poslije i Hilbert i Hahn, mogu uvesti na neproturječan način (v. odjeljke [2.6], [2.6.1] i [2.6.2]). Pojednostavljeno rečeno, Cantor je cijelo vrijeme pokušavao dokazati nešto što uopće nije mogao dokazati.

Međutim, kao što sam već istaknuo u studiji objavljenoj povodom stote obljetnice Veroneseove smrti, premda je Cantorov dokaz – bilo prva verzija koju je poslao Kerryju, bilo općenitija verzija iz pisama Goldscheideru i Weierstraßu, koju je poslije objavio i u *Mitteilungen* – v. Dodatak D)

> „u najboljem slučaju nepotpun, ako ne i u cijelosti pogrešan, povijesno je značajan jer je poslužio ne samo kao osnova za kritiku, nego zapravo za potpunu diskvalifikaciju i diskreditaciju infinitezimalizma koju su poduzeli Peano i Russell. Zahvaljujući njihovu autoritetu, radovi Veronesea i Levi-Civite marginalizirani su te su uglavnom ostali nezapaženi kao svojevrsni ostaci predvajerštrasovske nerigorozne matematike, pa su time svedeni na efemerne i anomalne pojave u povijesti matematike devetnaestoga stoljeća." (Popović 2017: 93–94)[507]

Kao što ćemo vidjeti u Odjeljku [3.1.1], upravo se u Italiji početkom 1890-ih vodila najintenzivnija najintenzivnija rasprava o statusu Cantorova „dokaza".[508]

---

[507] Ogradu „u najboljem slučaju nepotpun" zadržao sam po uzoru na Veronesea koji je u *Fondamenti* govorio o „nepotpunom dokazu gospodina G. Cantora protiv aktualnih [sc. statički shvaćenih] infinitezimala" (*incompleta dimostrazione contro l'infinitesimo attuale del sig. G. Cantor*).

[508] Sadržaj ovog odjeljka u najvećoj se mjeri temelji na predavanju „Iz istorijata $\frac{1}{\omega}$", koje sam, na prijedlog i poziv prof. Miodraga Raškovića održao na Seminaru za vjerojatnosne logike Matematičkog instituta SANU 16.3.2023.

Dodatak D. Tekst Cantorova „dokaza“ protiv mogućnosti infinitezimala iz pisma Goldscheideru (13.5.1887.) / *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten* (1887) i iz pisma Weierstraßu (16.5.1887.)

U napomeni uz §VI. spisa *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten* iz 1887. godine, koji sadrži Cantorov zloglasni „dokaz“, Cantor dodaje sljedeću fusnotu:

> „Tekst koji slijedi nalazi se u gotovo istovjetnom obliku u dvama pismima; pismo od 13.5.1887. napisano je gospodinu F. Goldscheideru, nastavniku gimnazije u Bernu, a ono od 16.5.1887. gospodinu prof. dr. K. Weierstraßu.“ (navedeno prema *Gesammelte Abhandlungen*, Cantor 1932: 407, nap. 3)

U ovom dodatku čitateljima pružam uvid u svoj prijevod §VI. *Mitteilungen* i Cantorova pisma Weierstraßu.[509]

> „U svojem pismu spominjete pitanje aktualno *beskonačno malih* veličina. Na više mjesta u mojim radovima možete pronaći stajalište da su [infinitezimali] *nemogući*, to jest *u sebi proturječni* imaginarni objekti[510] (*unmögliche, d. h. in sich widersprechende Gedankendinge*). Već sam u svojoj knjižici *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, na str. 8, u § 4, premda tada još s određenom zadrškom, naslutio da bi se strogo utemeljenje toga stajališta moglo izvesti iz teorije transfinitnih brojeva (*daß die strenge Begründung dieser Position aus der Theorie der transfiniten Zahlen herzuleiten wäre*). Tek sam ove zime pronašao vremena da svoje ideje o toj temi oblikujem u formalni dokaz. Riječ je o sljedećem stavu:
>
> ‘*Linearne numeričke veličine* (*lineare Zahlgrößen*) ζ, *različite od nule* (*odnosno, kraće rečeno, one numeričke veličine koje se mogu predstaviti pomoću omeđenih pravocrtnih neprekidnih dužina* (*begrenzter geradliniger stetiger Strecken*)), *a ipak manje od svake, ma koliko male, konačne numeričke veličine, ne postoje, odnosno proturječe pojmu linearne numeričke veličine* (*gibt es nicht, d. h. sie widersprechen dem Begriff der linearen Zahlgröße*).’ Tijek mojega dokaza naprosto je sljedeći. Polazim od pretpostavke da postoji neka linearna veličina ζ koja je toliko mala da je njezin n-struki umnožak
>
> $$\zeta \cdot n$$
>
> manji od jedinice [sc. $\zeta \cdot n < 1$] za *svaki*, *ma koliko velik*, *konačan cijeli broj* n, a zatim dokazujem, polazeći od pojma linearne veličine i uz pomoć određenih teorema teorije transfinitnih brojeva (*aus dem Begriff der linearen Größe und mit Hilfe gewisser Sätze der transfiniten Zahlenlehre*), da je tada i
>
> $$\zeta \cdot \nu$$
>
> manje od *svake*, *ma koliko male*, *konačne veličine*, čak i kada je ν proizvoljno velik transfinitni ordinalni broj (odnosno broj ili tip (*Anzahl oder Typus*) nekoga dobro uređenog skupa) koji pripada proizvoljno visokoj klasi brojeva (*aus irgendeiner noch so hohen Zahlenklasse bedeutet*). To, međutim, znači da se ζ *ne može učiniti konačnim ni bilo*

[509] Ehrlich je u svom radu iz 2006. godine u Dodatku IV reproducirao izvorni njemački tekst Cantorova dokaza iz *Mitteilungen* (v. Ehrlich 2006: 108–109).

[510] S obzirom na kontekst, čini se da je za Cantorov izraz *Gedankendinge* ovdje najprimjereniji prijevod kantovski izraz *entia rationis*.

kakvim aktualno beskonačnim umnažanjem (*daß ζ auch durch keine noch so kräftige actual unendliche Vervielfachung endlich gemacht werden*), pa stoga ni u kojem slučaju ne može biti *element* konačnih veličina (*nicht Element endlicher Größen sein kann*). Prema tome, početna pretpostavka proturječi samome pojmu linearne veličine, prema kojemu se svaka linearna veličina mora shvatiti kao sastavni dio drugih [veličina] (*jede lineare Größe als integrierender Teil von anderen*), a to osobito vrijedi za konačne linearne veličine. Stoga nam ne preostaje ništa drugo nego odbaciti pretpostavku da postoji veličina ζ koja bi za svaki konačni cijeli broj n bila manja od $\frac{1}{n}$, čime je naš stav dokazan.

Čini mi se da je riječ o važnoj primjeni teorije transfinitnih brojeva, o rezultatu prikladnom za iskorjenjivanje starih, raširenih i duboko ukorijenjenih predrasuda (*alte, weit verbreitete und tiefwurzelnde Vorurteile*).

Činjenica da postoje aktualno beskonačno veliki brojevi nipošto ne predstavlja razlog ni temelj za postojanje aktualno beskonačno malih veličina; naprotiv, upravo se uz pomoć onih prvih dokazuje nemogućnost ovih drugih (*Die Tatsache der aktual-unendlich großen Zahlen ist also so wenig ein Grund für die Existenz aktual-unendlich kleiner Größen, daß vielmehr gerade mit Hilfe der ersteren die Unmöglichkeit der letzteren bewiesen wird*).

Ne vjerujem ni da se taj rezultat može potpuno i strogo (*voll und streng*) postići bilo kojim drugim putem.

Nužnost (*das Bedürfnis*) ovoga mojega stava [sc. Cantorova dokaza] postaje osobito jasna u svjetlu nedavnih pokušaja O. Stolza i P. du Bois-Reymonda da izvedu legitimnost beskonačno malih veličina iz takozvanoga 'Arhimedova aksioma'. (Usp. O. Stolz, *Math. Annalen*, Bd. 18, str. 269; nadalje, v. njegove članke u *Berichten des naturw. medizin. Vereines in Innsbruck* za 1881/82. i 1884. godinu, naslovljene 'Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes' i 'Die unendlich kleinen Größen'; naposljetku, v. i *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* istoga autora, Leipzig, 1885., prvi dio, str. 205.)

Izgleda da je Arhimed prvi uočio da tvrdnja iz Euklidovih *Elemenata*, prema kojoj se od bilo koje, ma koliko male, omeđene dužine dovoljno velikim, ali ipak konačnim umnažanjem može dobiti proizvoljno velika konačna dužina, zapravo zahtijeva dokaz te je stoga smatrao da tu tvrdnju treba nazvati 'pretpostavkom' (λαμβανόμενον). (Usp. Eukl. *Elem.*, LIB. V, DEF. 4: λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν; nadalje, v. osobito *Elem.*, LIB. X, PROP. I. Za Arhimeda: *De sphaera et cylindro* I, POST. 5, kao i predgovor spisu *De quadratura parabolae*.)

Misaoni tijek ovih autora (usp. O. Stolz, *loc. cit.*) jest sljedeći: kada bi se taj navodni 'aksiom' odbacio, iz toga bi slijedilo pravo na [postojanje] aktualno beskonačno malih veličina (*ein Recht auf aktual unendlich-kleine Größen*), koje oni nazivaju 'momentima'. Međutim, iz mojega prethodno navedenog stava, kada se primijeni na pravocrtne neprekidne dužine, neposredno slijedi *nužnost euklidske pretpostavke* (*die Notwendigkeit der Euklidischen Annahme*). Prema tome, takozvani 'Arhimedov aksiom' *uopće nije nikakav aksiom, nego stav* [sc. teorem – prim. S. P.] *koji s logičkom nužnošću slijedi iz pojma linearne veličine* (*das sogenannte 'Archimedische Axiom' gar kein Axiom, sondern ein, aus dem linearen Größenbegriff mit logischem Zwang folgender Satz*)." (Cantorov izvorni kurziv, prev. S. P.)

Cantorovo pismo Weierstraßu glasilo je ovako:[511]

> „Najpoštovaniji gospodine profesore,
>
> dopustite mi da jasnije objasnim ono što sam Vam tijekom svojega nedavnoga kratkog boravka u Berlinu ukratko i donekle nejasno spomenuo u vezi s takozvanim 'Arhimedovim aksiomom'.
>
> Dokazujem sljedeći stav [sc. teorem]: 'Ne postoje linearne numeričke veličine [tipa] ζ (kraće rečeno, veličine koje se mogu predstaviti ili vizualizirati kao omeđene dužine), ma koliko male i različite od nule, koje bi bile manje od svake konačne veličine; drugim riječima, one proturječe *pojmu* linearne numeričke veličine (*sie widersprechen dem Begriff der linearen Zahlgrösse*).'
>
> Dokaz se izvodi pomoću teorije transfinitnih brojeva, a njegov je misaoni tijek sljedeći:
>
> Polazimo od *pretpostavke* da je linearna veličina ζ toliko mala da je njezin n-struki umnožak
>
> $$\zeta \cdot n$$
>
> manji od *jedan* (*als Eins*) *za svaki konačni* cijeli broj n. Iz pojma linearne veličine i uz pomoć pojedinih teorema teorije transfinitnih brojeva (*aus dem Begriffe der linearen Grösse und mit Hülfe gewisser Sätze der transfiniten Zahlenlehre*) potom se *dokazuje* da je tada i
>
> $$\zeta \cdot \nu$$
>
> također manje od svake, ma kako male, konačne veličine, čak i kada je ν proizvoljno velik transfinitni ordinalni broj iz bilo koje, ma kako visoke, klase brojeva (*aus irgend einer noch so hohen Zahlenclasse bedeutet*).
>
> To znači da se ζ[512] ne može učiniti konačnim ni bilo kakvim aktualno beskonačnim umnažanjem te stoga ne može biti ni *element* konačnih veličina. Prema tome, navedena pretpostavka proturječi pojmu linearne veličine (*somit widerspricht die gemachte Voraussetzung dem Begriff linearer Grössen*). A [upravo] je to i trebalo dokazati.
>
> Prije tri godine, uvaženi gospodine profesore, ljubazno ste me zamolili da Vam pošaljem nešto za objavljivanje u časopisu *Mathem. u. naturwissenschaftliche Mitteilungen der Berliner Akademie der Wissenschaften*. Ako smatrate prikladnim da se gore navedeno pročita pred Kraljevskom [pruskom] akademijom [znanosti], bila bi mi osobita čast Akademiji naknadno podnijeti i detaljan prikaz dokaza (*die ausführliche Darstellung des Beweises*).
>
> S najljubaznijim pozdravima i uz najdublje poštovanje,
>
> Vaš G. C." (Cantorov izvorni kurziv, prev. S. P.)

Kao što su istaknuli Meschkowski i Nilson u popratnom komentaru uz ovo pismo, nije poznato kakva je bila Weierstraßova reakcija – štoviše, po svemu sudeći, Cantoru nikada nije ni odgovorio. Međutim, možda upravo u tom izostanku bilo kakve reakcije najbolje dolazi do izražaja što je Weierstraß doista mislio o Cantorovu navodnom „dokazu" protiv

[511] Za izvorni njemački tekst usp. Meschkowski & Nilson 1991, № 113, str. 288–289.

[512] *Ad loc.* u Meschkowski & Nilson 1991 umjesto ζ stoji ν što je, naravno, tiskarska pogreška.

mogućnosti infinitezimala. U usporedbi s tekstom pisma Goldscheideru, odnosno §VI. *Mitteilungen*, jedna je pojedinost u vezi s Cantorovim pismom Weierstraßu osobito indikativna: potpuno izostaje bilo kakav spomen infinitezimalista, Stolza i, naročito, du Bois-Reymonda. Cantor je, naravno, znao da je du Bois-Reymond bio vrlo blizak s Weierstraßom te je, sasvim nalik epizodi s neokantovcima (v. nap. 226 uz Odjeljak [2.4.1]), po svoj prilici smatrao probitačnijim ne spominjati, a kamoli izravno napadati ili kritizirati, Weierstraßova nekadašnjeg učenika i bliskog suradnika (usp. Dodatak B, *Tabl. 2*). Jasno je da je Cantor, neovisno o svojoj antipatiji prema infinitezimalima, gajio i određeni resentiman prema du Bois-Reymondu, ponajprije zato što je ovaj, za razliku od njega, dobio profesorsko mjesto u Berlinu, po svoj prilici zalaganjem velikoga berlinskog trija – Kummera, Kroneckera i samoga Weierstraßa (v. Cantorovo pismo Mittag-Leffleru od 9.10.1884. u Meschkowski & Nilson 1991, № 51, str. 206).[513] Sljedeća dva ulomka iz Cantorovih pisama najbolje ilustriraju kakvo je mišljenje imao o du Bois-Reymondu:

> „Što se tiče onoga drugoga [sc. du Bois-Reymonda], on je sebičan, škrt i strašno sujetan (*so ist er selbstsüchtig, geizig und fürchterlich eitel*). Potpuno ste u pravu kada je riječ o P. Duboisu [*sic!*]: on je budala (*il est un fou*). Jednako je hvalisav i pun ispraznih fraza (*so grosssprecherisch und phrasenhaft*) kao i njegov brat Emil.[514]“ (pismo Mittag-Leffleru od 5.10.1883., navedeno prema Meschkowski & Nilson 1991, № 51, str. 134)

> „Nažalost, Harnack[515] i mnogi drugi daroviti matematičari dopustili su da P. Dubois na njih izvrši prevelik utjecaj te su mu se odviše dali impresionirati. Duboisovi radovi najvećim dijelom ne vrijede ništa, a čak i kada je došao do ponekoga dobrog rezultata, njegove su metode ipak bile loše (*Dubois' Arbeiten sind zum grössten Theil nichts werth und wenn er einmal was Gutes gefunden hat, so sind doch seine Methoden schlecht*).“ (pismo Dedekindu od 16.2.1882., navedeno prema Meschkowski & Nilson 1991, № 19, str. 61)[516]

[513] „Sie wissen doch wohl schon, dass Paul Dubois am Polytechnicum in Berlin jetzt ist; Kronecker hat dazu beigetragen, ich machte nur die Bemerkung, es sei keine Gefahr vorhanden, dass Dubois Berlin wieder entrissen würde, er müsse hier verbraucht werden so wie er ist.“ V. i nap. 237 uz Odjeljak [2.4.1]. Cantoru to zasigurno nije bilo osobito ugodno jer je u međunarodnoj akademskoj zajednici bilo općepoznato da je prisvojio pojedine rezultate P. du Bois-Reymonda. O tome možda najbolje svjedoči Cantorovo pismo Mittag-Leffleru od 30.5.1888. (Meschkowski & Nilson 1991, № 124, str. 316–317; v. i popratni komentar Meschkowskog i Nilsona na str. 317–318).

[514] Emil du Bois-Reymond (1818–1896), fiziolog, pionir eksperimentalne elektrofiziologije te član i doživotni tajnik Berlinske, odnosno Kraljevske pruske akademije znanosti.

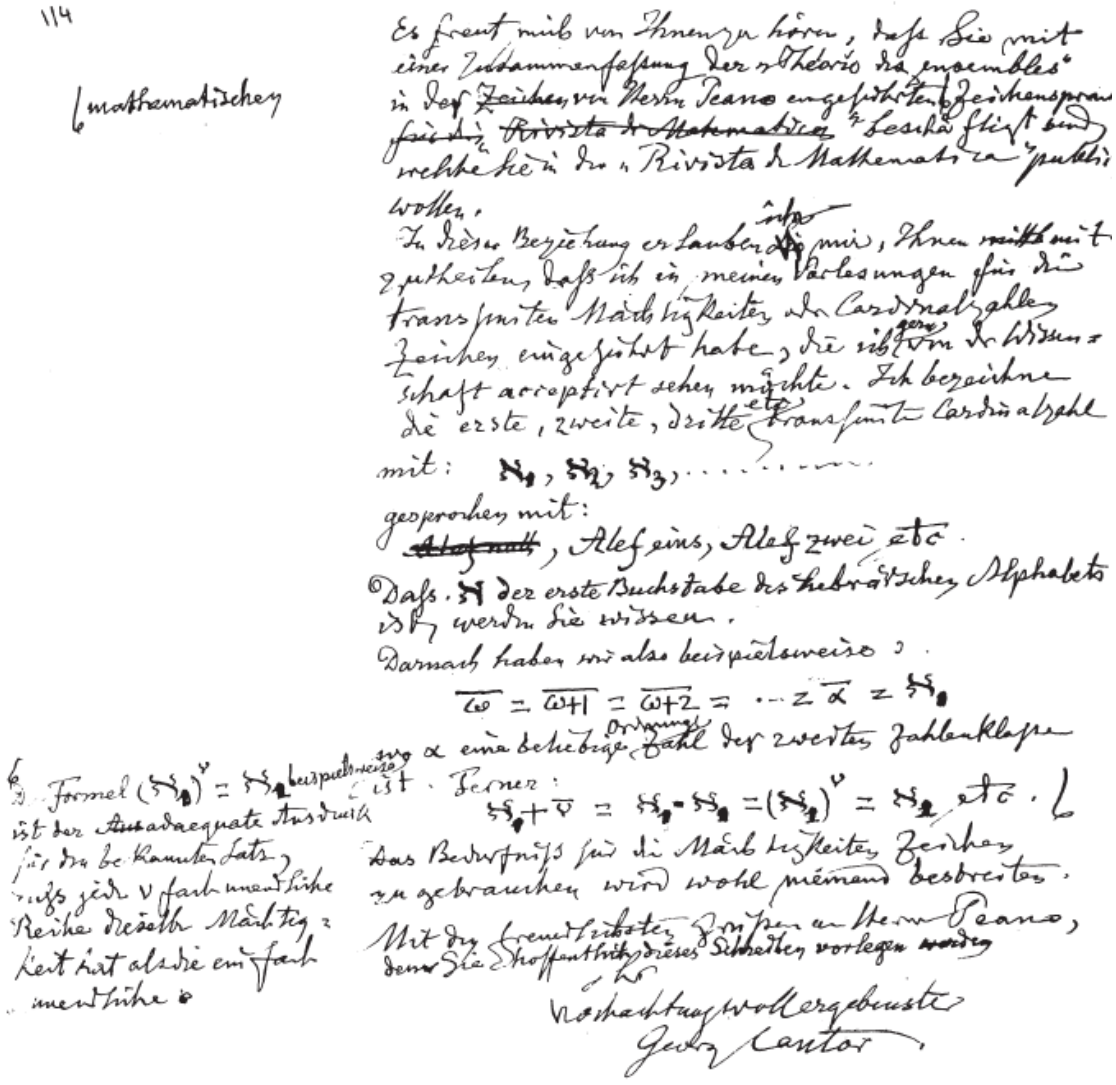
[515] Axel Harnack (1851–1888) bio je među prvim matematičarima koji su proučavali Cantorove pionirske radove iz teorije skupova te nastojali primijeniti skupovnoteorijske metode u vlastitim istraživanjima.

[516] Za više pojedinosti o Cantorovu odnosu prema du Bois-Reymondu upućujem čitatelja na Fisherovu studiju „The Infinite and Infinitesimal Quantities of du Bois-Reymond and their Reception“ (Fisher 1981, Sect. 2, str. 116–122).

[3.1.1] *Esiste l'infinitesimo attuale?* Spor o ontološkom statusu infinitezimala, recepcija Cantorova „dokaza" u Italiji i Peanov kantorovski dokaz protiv mogućnosti infinitezimalnih dužina

Prethodno sam u nekoliko navrata već spomenuo filozofsko-matematičku raspravu kojom je 1891. godine inauguriran Peanov časopis *Rivista di Matematica*, a koja se odnosila na pitanje ontološkoga statusa infinitezimala, odnosno na pitanje postoje li statički shvaćeni infinitezimali ili ne. U njoj su sudjelovali Giulio Vivanti (1891a, 1891b), Rodolfo Bettazzi (1891, 1892) i sâm Peano. Tijekom pripreme prvoga sveska *Rivista* Peano je također pozvao Veronesea da sudjeluje u raspravi, nakon što su njih dvojica prethodno razmijenili nekoliko pisama o Cantorovu dokazu (usp. Veronese 1891: 622). Međutim, Veronese se nije mogao odazvati Peanovu pozivu zbog dovršavanja rukopisa *Fondamenti* za tisak, ali je u same *Fondamenti* uvrstio odjeljak „Osservazioni su alcune dimostrazioni contro l'infinito e l'infinitesimo attuale" (str. 619–625). Već sljedeće, 1892. godine, neposredno nakon objavljivanja Peanova dokaza protiv mogućnosti infinitezimalnih dužina (Peano 1892a) i Peanove recenzije *Fondamenti* (Peano 1892b), Veronese je reagirao priopćenjem „Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale", objavljenim u *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (Veronese 1892b), koje se može smatrati odgovorom na Peanove, a posredno i na Cantorove primjedbe. Prije početka rasprave na stranicama *Rivista* Veronese se o tim pitanjima dopisivao s Cantorom (u drugoj polovici 1890.) i s Vivantijem (tijekom prosinca 1890.). Cantor se nešto kasnije također dopisivao s Vivantijem o infinitezimalima (tijekom 1893. godine)[517], a zatim i s Peanom (od srpnja do studenoga 1895. godine). U petom svesku *Rivista* Peano je čak objavio izvadak iz Cantorova pisma Vivantiju od 13.12.1893. (v. *Sl. 29*), kao i pismo koje mu je Cantor poslao 20.7.1895. godine. Uvid u preostala pisma koja su tijekom 1895. razmijenili Peano i Cantor otkriva da objavljivanje dijelova njihove privatne prepiske u *Rivista* ije bilo slučajno, nego je predstavljalo dio koordinirane kampanje usmjerene na diskreditaciju Veronesea i njegova projekta zasnivanja geometrije iz *Fondamenti* u znanstvenoj i stručnoj javnosti.

[517] Vivantijeva prepiska s Cantorom započela je već sredinom 1880-ih, kada je Vivanti bio vrlo mlad; imao je svega 25 godina. Međutim, zanimanje za Cantorovu teoriju skupova u široj matematičkoj zajednici u tada je još uvijek bilo vrlo slabo, a njezina je recepcija bila pretežno negativna (usp. Popović 2017, §3, str. 87ff.). Unatoč tomu, Vivanti je bio jedan od rijetkih matematičara koji su se već tijekom 1880-ih ozbiljno bavili proučavanjem teorije skupova i, kako ističu Meschkowski i Nilson, jedan od nekolicine matematičara s kojima je Cantor tada raspravljao o čisto tehničkim pitanjima teorije skupova (usp. Meschkowski & Nilson 1991: 251). V. Cantorova pisma Vivantiju u Meschkowski & Nilson 1991, №. 98 (3.12.1885.), 105 (6.11.1886.), 119 (30.1.1888.) i 120 (2.4.1888.). Štoviše, upravo je Vivantijev rad na teoriji skupova presudno pridonio popularizaciji Cantorove teorije u Italiji – v., primjerice, Vivantijeve radove „Fondamenti della teoria dei tipi ordinati" (*Annali di Matematica*, T. XVII, str. 1–35) i „Lista bibliografica della teoria degli aggregati" (*Rivista di Matematica*, Vol. 3, 1893, str. 189–192).



Sl. 29. Faksimil djela Cantorova pisma Vivantiju od 13.12.1893. (I b, XVII b), u kojemu se spominje Veronese (preuzeto iz Meschkowski & Nilson 1991: 520)

Veronese je možda i najzanimljiviji Cantorov *Briefpartner* (usp. Meschkowski & Nilson 1991: 328), iako su se dopisivali tijekom razmjerno kratkoga razdoblja od dva i pol mjeseca krajem 1890. godine, kada je Veronese pripremao rukopis *Fondamenti* za tisak. Po svoj prilici, Veronese je inicirao prepisku želeći čuti Cantorove dojmove i komentare o svojim idejama vezanima uz nearhimedovsku geometriju. Nažalost, Veroneseova pisma nisu sačuvana u Cantorovim *Briefbüchern*, pa, kao i u slučaju Kerryja (v. Odjeljak [3.1]), možemo rekonstruirati što samo posredno, temelju Cantorovih odgovora na ono što mu je Veronese pisao.[518] Veronese je Cantoru pisao na francuskome (usp. nap. 482 i v. Cantorovo pismo od 7. 9. 1890. u Meschkowski & Nilson 1991, № 127, str. 327), dok mu je Cantor odgovarao na njemačkome.

Sudeći prema prvom Cantorovu pismu od 7. rujna 1890., Veronese mu je prvi put pisao još sredinom godine, po svoj prilici u svibnju ili lipnju, no Cantor je zbog bolesti svoje supruge kasnio s odgovorom. Uvodni dio pisma pisan je kolegijalnim tonom, a iz njega se vidi da je Cantor čak predlagao Veroneseu da se iduće, 1891. godine sastanu na skupu njemačkih prirodoslovaca i liječnika (*Bremer Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte*). Međutim, nakon toga kurtoaznog uvoda ubrzo postaje jasno što je prava tema njihove prepiske: pitanje ontološkoga statusa beskonačnih brojeva i infinitezimala. U tom kontekstu Cantor naglašava da je ključno uočiti kako se transfinitni ordinalni brojevi ne ponašaju poput konačnih ordinala, koji inače imaju ista svojstva i podliježu istim zakonima kao i kardinalni brojevi. Tako, primjerice, „kardinalni brojevi poštuju sve komutativne zakone (čak i u transfinitnom području); ordinalni brojevi općenito poštuju te zakone samo ako su konačni (*die Ordnungszahlen gehorchen diesen Gesetzen im Allgemeinen nur, wenn sie endliche sind*)." (Meschkowski & Nilson 1991, № 127, str. 326). Drugim riječima, Cantor Veroneseu jasno daje do znanja da *odbacuje princip permanencije* kada je riječ o transfinitnim ordinalima (usp. Odjeljak [2.6.1]): „nasuprot tomu [sc. nasuprot slučaju konačnih ordinala poput 4 ili 9], $\omega^2 + \omega$, primjerice, nije jednako $\omega + \omega^2$, pri čemu se pokazuje da je $\omega + \omega^2$ jednako ω^2." (*op. cit.*, str. 327). U nastavku pisma Cantor govori o rukopisu koji mu je Veronese poslao početkom srpnja 1890. godine, a koji se očito odnosio na Cantorov dokaz (v. Appendix disertacije). Promjena tona pritom je nagla i vrlo uočljiva:

> „Naposljetku, što se tiče rukopisa koji ste mi ljubazno poslali u srpnju, već sam na njegovu početku naišao na nepremostive prepreke (*unübersteigliche Hindernisse*) za njegovo razumijevanje. Naime, Vi kažete:

[518] U korpusu Cantorove pisane ostavštine koja se čuva u Göttingenu sačuvan je samo dio Veroneseova rukopisa na francuskome jeziku od 5.7.1890., koji se odnosi na transfinitne brojeve (Cod. Ms. G. Cantor 29, № 1); v. Appendix ove disertacije. Međutim, nedavno je u dijelu Cantorove ostavštine (*Nachlass*) koji je u posjedu Cantorove praunuke dr. Angelike Vahlen (*1946), potomkinje Cantorove kćeri Gertrud (Cantor) Vahlen (1877–1956), otkriven veći broj pisama koja dosad nisu bila dostupna istraživačima i povjesničarima. Dr. Vahlen predala je 2009. godine ta pisma Matematičkom institutu Sveučilišta u Halleu (na kojem je nekoć predavao i sâm Cantor). Građa se trenutačno nalazi u posjedu prof. Karin Richter, koja u suradnji s Deutsche Mathematiker-Vereinigung priprema (kritičko) izdanje toga dijela Cantorove ostavštine (usp. Nahuel Goos 2025). Riječ je o nešto više od 400 pisama koja obuhvaćaju razdoblje od čak četiri desetljeća, od 1873. do 1913. godine. Što je za potrebe ovoga istraživanja osobito važno, ostavština sadrži i pisma drugih matematičara koja je Cantor sačuvao, uključujući, po svoj prilici, i dva Veroneseova pisma iz 1890. godine. Zahvaljujem dr. Demianu Nahuelu Goosu što mi je skrenuo pozornost na ovo iznimno važno otkriće.

'Gospodin Stolz dokazao je da Vaš teorem [sc. Cantorov dokaz protiv mogućnosti infinitezimala iz 1887.] ne vrijedi (*votre théorema* [*sic.*] *ne vaut pas*) za njegove beskonačno male veličine niti za one [koje je uveo] du Bois-Reymond, jer se njihov umnožak s brojem ω ne može definirati [sc. nisu množive sa ω].'

Gospodin Stolz nije mogao zadati *snažniji* udarac u srce (*keinen stärkeren Stoß in's Herz versetzen*) **svojim takozvanim '*beskonačno malim* veličinama' nego time što je naglasio da se one ne mogu množiti s ω. Apsolutno linearna veličina koja bi trebala biti realna** (*die Realität haben soll*), **a koja se ipak ne može neograničeno množiti** (dakle, čak ni transfinitnim množiteljima), ***uopće nije nikakva veličina*** (*ist gar keine Größe*). **Ako on te** (**samoproturječne te *posve neupotrebljive* i *beskorisne*) *apsurdnosti*** (*diese sich selbst widersprechenden und ganz ohne Anwendung und Nutzen dastehenden Undinge*) **naziva veličinama za vlastitu ili za du Bois-Reymondovu privatnu uporabu, tada Vam kažem da nikakva *znanost* iz toga nikada neće moći proizaći** (*die Wissenschaft nie darin folgen können*). **Za privatne se potrebe čovjek jednako lako može baviti i kvadratnim krugovima ili hiperboličkim elipsama kao i aktualno beskonačno malim veličinama. Dok god ne napuštate svoje radne sobe, nitko se neće protiviti vašem fantaziranju. Takve aktivnosti ja nazivam *Signisticismus* (igranjem pukim znakovima)** (*Zeichenspielerei*).

Moram Vas upozoriti i na one čisto formalističke ili, bolje rečeno, signističke pojmove koje ste uveli (*rein formalistisch oder vielmehr signistisch von Ihnen introducirten Begriffen*), a koje sam pronašao već na str. 2 Vašega rukopisa i iz kojih, čini se, proizlazi sve ostalo.

Broj ili veličina koja je za n manja od ω (koju Vi označavate sa $\omega_1 - n$) ne postoji *(gibt es nicht)*, […] baš kao što ne postoji racionalan broj manji od 1 koji je veći od svih ostalih [racionalnih brojeva]. **Nekoliko godina nakon što sam otkrio transfinitne brojeve** (*die transfiniten Zahlen entdeckt hatte*), **u ruke mi je dospjela Fontenelleova knjiga *Éléments de la Géométrie de l'Infini*** (**Paris, 1727**). **Ondje ćete pronaći iste ideje do kojih su Vas, čini se, doveli du Bois-Reymond i Stolz. Unutarnje proturječnosti Fontenelleova sustava** (*die inneren Widersprüche des Fontenelleschen Systems*) **odavno su već konkluzivno dokazane!**" (navedeno prema Meschkowski & Nilson 1991, № 127, str. 327; Cantorov izvorni kurziv, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Stolzov rezultat na koji Veronese referira u pismu Cantoru sadržan je u kratkom priopćenju „Ueber zwei Arten von unendlich kleinen und von unendlich grossen Grössen", koje je Stolz objavio 1888. godine u *Math. Annalen* (Stolz 1888). Kao i Veronese, Stolz naglašava da sustavi veličina koje su uveli du Bois-Reymond i on sam *nisu linearni*, odnosno arhimedovski[519], te da se Cantorov „dokaz" (ili, kako ga Stolz naziva, Cantorov teorem) na njih stoga ne može primijeniti. Drugim riječima, Cantorov je „teorem" primjenjiv je upravo na one, i samo na one, sustave veličina koji su linearni u Cantorovu smislu (v. Odjeljak [3.1] i usp. Ehrlich 2006: 53). Međutim, kako je primijetio Ehrlich (*op. cit.*, str. 54), čini se da se Stolz i Cantor zapravo suglasni u tome da su *infinitezimalne dužine nemoguće* (usp. Stolz 1888:

[519] „Für keines der beiden im Vorstehenden betrachteten Grössensysteme gilt derjenige Satz, den ich kurz als das Axiom des Archimedes bezeichne, unbedingt." (Stolz 1888: 604)

603–604 i v. Cantorov „dokaz“ u Dodatku D[520]). Takvo je Stolzovo stajalište proizlazilo iz njegova uvjerenja da je geometrijski linearni kontinuum neprekidan u Dedekindovu smislu, a sâm je Stolz, kao što smo vidjeli u Odjeljku [2.6], pokazao da su Dedekind-potpuni, odnosno Dedekind-neprekidni, sustavi veličina uvijek i arhimedovski (usp. Stolz 1883). Stoga će u radu iz 1888. reći da Arhimedov aksiom apsolutno i bezuvjetno (*unbedingt*) vrijedi „za svaki sustav neprekidnih veličina, pa samim time i za pravocrtne dužine“ (*für jedes System von stetigen Grössen, also auch für die geradlinigen Strecken von selbst erfüllt ist*) (Stolz 1888: 604). S druge strane, Cantor je još 1872. godine, kada je dao svoju znamenitu konstrukciju realnih brojeva pomoću konvergentnih nizova racionalnih brojeva, ujedno formulirao i svoju inačicu Cantor-Dedekindova aksioma:

> „Bez ikakvih poteškoća može se vidjeti da se numeričkim veličinama (*Zahlengrößen*) [sc. realnim brojevima] […] mogu pridružiti i udaljenosti [između točaka euklidskoga pravca] [sc. dužine]. Da bi se upotpunila veza između domene prethodno definiranih numeričkih veličina [sc. realnih brojeva] i geometrije pravca (*mit der Geometrie der geraden Linie*), potrebno je dodati još samo jedan aksiom (*nur noch ein Axiom hinzuzufügen*). Tim se aksiomom jednostavno tvrdi da svakoj numeričkoj veličini [sc. svakom realnom broju] odgovara točno određena točka na [euklidskom] pravcu čija je koordinata jednaka toj numeričkoj veličini [sc. tom realnom broju]. […] Posredstvom njega [sc. ovoga aksioma] numeričke veličine [sc. realni brojevi] stječu određenu objektivnost (*eine gewisse Gegenständlichkeit*).“ (Cantor 1872, §2, navedeno prema *Gesammelte Abhandlungen*, Cantor 1932: 97)

Neposredno prije formuliranja Cantor-Dedekindova aksioma Cantor objašnjava da smatra kako su točke geometrijskoga linearnog kontinuuma, odnosno standardnoga euklidskoga pravca, pojmovno određene (*begrifflich bestimmt*) tako što se, uz pretpostavku da je zadana neka mjerna jedinica (*unter Zugrundelegung einer Maßeinheit*), „duž apscise [sc. x-osi] utvrđuje položaj njihovih udaljenosti od fiksne točke o pravca i označuje znakom $+$ ili $-$, ovisno o tome nalazi li se dana točka na (prethodno utvrđenom) pozitivnom ili negativnom dijelu pravca, gledano od točke o [odnosno nalazi li se zdesna ili slijeva od koordinatnoga ishodišta – prim. S. P.].“ (Cantor 1932: 96). Odmah nakon formuliranja aksioma Cantor dodaje da smatra „neku točku pravca (*einen Punkt der Geraden*[521]) definiranom kada je njezina udaljenost od o označena odgovarajućim znakom i zadana kao numerička veličina [sc. realni broj].“ (*op. cit.*, str. 97). Iz toga neposredno slijedi ono na što ispravno upozorava Ehrlich,

> „godine 1872., za Cantora, kao i za Dedekinda, utvrditi da geometrijski linearni kontinuum ne sadrži infinitezimale [sc. infinitezimalne dužine kao elemente – prim. S. P.] svodilo se na pokazivanje da u sustavu realnih brojeva nema infinitezimala – nešto što Cantor nikada nije ni smatrao potrebnim dokazivati!“ (Ehrlich 2006: 49)

Drugim riječima, imamo li u vidu arhimedovsku narav skupa $\mathbb{R}$, usvajanjem Cantor-Dedekindova aksioma dobivamo klasičan rezultat: infinitezimali su *de facto* izlišni za analizu

---

[520] Prethodno smo vidjeli da Cantor o linearnim veličinama tipa ζ govori kao o veličinama „koje se mogu predstaviti ili vizualizirati kao omeđene dužine“.

[521] Već sama Cantorova frazeologija ovdje otkriva njegovo shvaćanje strukture kontinuuma. Usp. Veroneseovo inzistiranje na razlikovanju „točke pravca“ i „točke na pravcu“ u Odjeljku [2.4]; v. i nap. 219.

strukture geometrijskoga linearnog kontinuuma i ne može biti govora o ne-konačnim (infinitezimalnim ili beskonačnim) dužinama kao njegovim konstitutivnim elementima (usp. Popović 2017: 86). Upravo je to bila i Cantorova poanta u „dokazu" protiv mogućnosti infinitezimala: infinitezimalne dužine (tipa ζ) „zasigurno ne mogu biti elementi konačnih veličina" (*sicherlich nicht Element endlicher Größen sein kann*) (v. Dodatak D). I Stolz i Cantor zastupali su to stajalište zato što su obojica prihvatili Dedekindovo određenje „suštine neprekidnosti „suštine neprekidnosti" (*das Wesen der Stetigkeit*). Riječ je, naravno, o dobro poznatom Dedekindovu aksiomu neprekidnosti [**D**] (u formulaciji za linearni geometrijski kontinuum), s kojim smo se prethodno već susreli u odjeljcima [2.6], [2.6.1] i [2.6.3] i za koji je sâm Dedekind rekao da se njime neprekidnost takoreći „umisli u pravac" (*durch welches wir die Stetigkeit in die Linie hineindenken*):

> „Ako se sve točke pravca podijele u dvije klase tako da svaka točka jedne klase leži lijevo od svake točke druge klase, tada postoji jedna i samo jedna točka koja proizvodi tu podjelu, to rasijecanje pravca (*Zerschneidung der Geraden*) na dva dijela." (Dedekind 1872, §3 „Stetigkeit der geraden Linie", str. 18)

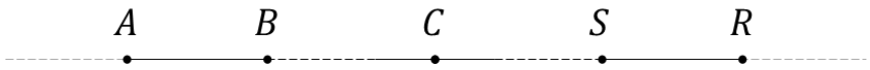
Prepiska iz 1877. potvrđuje da je Cantor, poput Dedekinda, smatrao kako su za neprekidnost dovoljni gustoća i Dedekind-potpunost; drugim riječima, nije nam nužan Cantorov uvjet koherentnosti ili povezanosti (usp. Odjeljak [2.4.1]).[522] Kao što sam već istaknuo, Veronese je među prvima jasno naglasio da Arhimedov aksiom predstavlja posljedicu Dedekindova aksioma, **[D]** ⊢ **[A]** (usp. Veronese 1889 i v. Odjeljak [2.6.3]). Tu poantu ponovno ističe i u *Fondamenti* govoreći o „Cantorovu teoremu o nemogućnosti aktualno infinitezimalne linearne veličine":

> „[U] definicijama uobičajenoga kontinuuma koje su dali drugi [autori] implicitno je sadržan gore spomenuti [sc. Arhimedov] aksiom (s time se također slaže i gospodin Stolz). U tom slučaju uopće nije potrebno posezati za transfinitnim brojevima kako bi se dokazala nemogućnost infinitezimalnih veličina, jer je ona već *a priori* isključena, kao što je to slučaj, primjerice, s definicijom kontinuuma koju je dao sâm gospodin Cantor." (Veronese 1891: 105, nap. 1)

Znači li to onda da su i Cantorove i Stolzove rezerve prema infinitezimalnim dužinama također neopravdane? U jednoj drugoj fusnoti u *Fondamenti* (str. 132, nap. 1) Veronese napominje da je Stolzovo nijekanje (matematičke) egzistencije infinitezimalnih dužina neopravdano jer počiva na Dedekindovu aksiomu, kao, uostalom, „i sve druge poznate definicije uobičajenoga kontinuuma", bilo aritmetičkoga, bilo geometrijskoga. Povijesno je zanimljivo da je još prije nego što je Cantor formulirao svoj „dokaz" Wilhelm Killing u knjizi *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, u odjeljku „Die Raumgebilde als Grössen", iznio slične rezerve prema nearhimedovskim strukturama, a osobito prema infinitezimalnim dužinama. Smatrao je da je Arhimedov aksiom nužan ne samo za uspoređivanje veličina nego i kao uvjet mogućnosti te jamstvo jednoznačnosti mjerenja (*Eindeutigkeit der Messung*) geometrijskih objekata – njihovih dužina, površina i obujmova – pomoću realnih brojeva (v. Killing 1885, §6, str. 46–47). Na Killingove se

[522] V. primjerice Dedekindovo pismo Cantoru od 18.5.1877. i Cantorovo pismo Dedekindu od 20.6.1877. u Ewald 2005: 852–53.

primjedbe, koliko mi je poznato, osvrnuo jedino Veronese u *Fondamenti*, dok ih, čini se, ostali autori nisu uzimali u obzir (usp. Ehrlich 2006: 22). Poanta je Killingove argumentacije ukratko sljedeća. Pretpostavimo da Arhimedov aksiom ne vrijedi. Tada bi trebala postojati neka točka R (v. *Sl. 30*) takva da nijedan konačni umnožak od (AB) ne može nadmašiti (AR), ali „koji ipak prelazi preko svake točke između A i R" (Killing 1885: 47; Veronese 1891: 132, nap. 1). To jednostavno znači da za svaku točku C između A i R postoji neki konačni umnožak $n, n \in \mathbb{N}$, od (AB) takav da $n(AB) \geq (AC)$. Odaberemo li sada na pravcu dužinu (SR) podudarnu s (AB), $(SR) \cong (AB)$, tada, prema istom principu kao i u prethodnom slučaju, postoji neki prirodan broj n takav da vrijedi $n(AB) \geq (AS)$, odakle pak neposredno slijedi $(n+1)(AB) \geq (AR)$, što je u proturečju s početnom pretpostavkom da postoji neka „granična" (*Grenze, limite*) točka poput R u odnosu na koju bi Arhimedov aksiom mogao „zakazati". Killing je vjerovao da je na taj način dokazao univerzalnu valjanost Arhimedova aksioma za sve geometrijske i aritmetičke veličine uopće.



Sl. 30

Veronese je smatrao Killingov „argument" cirkularnim (usp. 1889: 603, nap. 6). Naime, on ispravno primjećuje da ono što Killing pretpostavlja, a ne dokazuje, jest da, ako točka R postoji, tada dužina (AB), dodana samoj sebi neki konačan broj puta, nužno mora premašiti sve točke smještene između A i R (premda ne i samu točku R). „Ta hipoteza sadržana u Killingovu dokazu" (*questa ipotesi contenuta nella dimostrazione del Killing*), naglašava Veronese, „zapravo isključuje infinitezimalne dužine" (*esclude i segmenti infinitesimi*), a upravo je to ono što je Killing želio dokazati (Veronese 1891: 132, nap. 1). Drugim riječima, budući da Killing pretpostavlja kako za svaku točku C između A i R postoji neki konačan prirodan broj n takav da $n(AB) \geq (AC)$, on zapravo prešutno pretpostavlja da dužina (AB) nije infinitezimalna u odnosu na (AR), premda je upravo to ono što bi tek trebalo dokazati.[523] Veroneseova je poanta sljedeća. Neka su zadane bilo koje tri kolinearne točke A, B i C, pri čemu vrijedi da se B nalazi između A i C, $\mathcal{B}(A,B,C)$. Tada, dužina (AB) nije infinitezimalna u odnosu na dužinu (AR) AKKO za svaku točku C, za koju vrijedi $\mathcal{B}(A,C,R)$, postoji konačan prirodan broj n takav da $n(AB) \geq (AC)$. Kad bi dužina (AB) bila infinitezimalna u odnosu na dužinu (AR), tada bi bila infinitezimalna i u odnosu na (AS), pa, suprotno Killingovoj pretpostavci, nijedan konačan umnožak dužine (AB) ne bi mogao premašiti dužinu (AS). Ehrlich smatra da je, najvjerojatnije pod utjecajem Veroneseove kritike, Killing povukao svoj „dokaz" te, štoviše, izričito prihvatio novu, nearhimedovsku geometriju koju je uveo upravo Veronese (Ehrlich 2006: 23).[524]

[523] Za Veroneseovu koncepciju relativne infinitezimalnosti (beskonačnosti) v. Odjeljak [2.6.1].

[524] I sâm Veronese u radu „Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti o infinitesimi attuali", objavljenom u *Math. Annalen*, sa zadovoljstvom primjećuje da je Killing „istaknuo važnost" njegove teorije, odnosno nearhimedovske geometrije, te da se „time prešutno odrekao daljnjih pokušaja obrane svojega dokaza Arhimedova postulata" (*il sig. K. rinuncia così implicitamente alla difesa della sua dimostrazione del postulato d'Archimede*) (Veronese 1896: 424).

Međutim, za razliku od Killinga, koji je očito postao svjestan slabosti svojega argumenta nakon Veroneseova prigovora te je bio spreman povući se, Cantor nije imao namjeru učiniti ništa slično. Veroneseovim riječima: „Gospodin Cantor ne brani svoj dokaz od moje kritike, nego vjeruje da može uništiti moju teoriju s nekoliko općenitih tvrdnji“ (*crede invece con poche affermazioni generiche di distruggere la mia teoria*) (Veronese 1896: 424, moj kurziv). Veronese pritom osobito upozorava na već spomenuta Cantorova pisma (i u njima sadržane „općenite tvrdnje“) koja je Peano objavio u *Rivista di Matematica* 1895. godine (*ibid.*, nap. ***). Cijeli zaplet i kontroverza između Cantora i Veronesea sastoji se u tome što je početkom 1890-ih, barem iz Cantorove perspektive, spor o statusu infinitezimala, a time i o Veroneseovoj novoj infinitezimalnoj geometriji proprimio *izrazito osobnu* dimenziju. Tomu je, čini se, pridonijelo nekoliko međusobno povezanih čimbenika.

Prije svega, Cantor je u prvoj polovici 1880-ih doživio niz neugodnosti tijekom pripreme svojih pionirskih radova iz teorije skupova za objavljivanje na francuskome jeziku u Mittag-Lefflerovim *Acta Mathematica* (v. nap. 243). Suočen s cenzorskim intervencijama Hermiteova kruga te lošom recepcijom teorije skupova u Francuskoj i Njemačkoj, Cantor je u proljeće 1884. doživio prvi u nizu živčanih slomova, što predstavlja drugi važan čimbenik koji valja imati na umu. U vezi s tim Schönflies je u znamenitom radu „Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen“, zamišljenom kao svojevrsni *in memoriam* Cantoru i retrospektiva njegove korespondencije koju je sačuvao Mittag-Leffler, istaknuo sljedeće:

> „Pisma su puna gorčine i oštrih optužbi (*sie sind zugleich voller Bitterkeit und voll von harten Anklagen*), što jest u skladu s njegovom [sc. Cantorovom] vjerom u sebe i u svoje znanstvene ideje, ali je ujedno posljedica negativnoga stava (*ablehnende Haltung*) na koji su [Cantorove ideje] nailazile u istaknutim krugovima. […] Ona odražavaju sve teškoće (*all das Ungemach*) koje je pretrpio i svu ogorčenost (*all den Groll*) koja se u njemu nakupila tijekom godina. Svi oni na koje bez zadrške izlijeva svoju gorčinu (*seiner Bitterkeit freien Lauf lässt*) odavno su već pokopani, no često je nemoguće doslovno reproducirati oštrinu izraza koju je uzavrelost njegove krvi uspjela prenijeti u njegova pisma (*die Schärfe des Ausdrucks wörtlich wiederzugeben, die die Wallungen seines Blutes seinen Briefen mitteilen*). […] Nadam se da će pisma koja ovdje objavljujemo pružiti jasnu sliku [Cantorove] borbe i patnje (*ein deutliches Bild des Kampfens und Leidens*).“ (Schönflies 1927: 1)

Očito zatečen sadržajem pojedinih pisama i spoznajom da su mnoga od njih bila napisana ponajprije radi napadanja i denunciranja drugih matematičara, Schönflies navodi da se mora „suzdržati od objavljivanja mnogih pisama, osobito svih onih koja [Cantor] nije napisao radi obrane vlastitoga djela“, nego, naprotiv, radi diskreditiranja tuđih radova i rezultata (*op. cit.*, *ad loc.*). Kao što su prilično pouzdano utvrdili Cantorovi biografi i povjesničari matematike, među ostalima Grattan-Guinness (koji je uz pomoć kliničkoga psihologa proučio Cantorovu medicinsku dokumentaciju iz Halle Nervenklinik), Purkert i Ilgauds te Dauben, Cantor je patio od anksioznosti, paranoidnih simptoma i težega oblika manične depresije (usp. Dauben 1990, poglavlje „The Significance of Cantor's Nervous Breakdowns“, str. 284–287). Primjerice, Cantor je u više navrata itražavao uvjerenje da ga mnogi „progone“ ili da su se „urotili protiv njega“. Upečatljiv primjer predstavljaju infinitezimalisti Thomae, du Bois-Reymond, Stolz i Veronese, koje je, kao što sam već

naznačio, Cantor doživljavao kao svojevrsni „konzorcij“. Imajući to na umu, potrebno je, kako upozorava Ferreirós (1999: 199), Cantorovoj privatnoj korespondenciji i njegovim polemičkim radovima iz kasnije faze života pristupati s osobitim oprezom. To, dakako, ne znači da ih treba odbaciti kao povijesne izvore, nego da njihove tvrdnje valja uvijek vrednovati u svjetlu drugih dostupnih izvora te ih ne prihvaćati nekritički, osobito kada je riječ o Cantorovim prosudbama drugih matematičara i njihovih doprinosa.

Treći čimbenik bila je, kako ju je Cantor opisao, „katastrofa“ iz 1885., Cantorova *annus horribilis*, kada je nakon odbijanja rada „Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste und zweite Mittheilung“ došlo do konačnoga raskida s Mittag-Lefflerom. Mittag-Leffler smatrao je da su Cantorovi radovi „oko sto godina preuranjeni“ (*um 100 Jahre zu früh*) (iz Mittag-Lefflerova pisma od 9.3.1885.[525]; usp. Cantorovo pismo Poincaréu od 22.1.1896. – Ic, XVa[526] u Meschkowski & Nilson 1991, № 151, str. 376). Od 1885. godine nadalje Cantor se sve više okreće povijesno-filozofskim, a osobito teološkim pitanjima, ne napuštajući pritom u potpunosti ni istraživanja iz teorije skupova (v. nap. 226 i, osobito, nap. 247 uz Odjeljak [2.4.1]). Čak je i *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten* prvotno objavio kao rad u časopisu *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* (Bd. 91, str. 81–125, 1887.; Bd. 92, str. 240–265, 1888.). I prije raskida s Mittag-Lefflerom, Cantor je u Halleu umjesto matematike počeo predavati filozofiju te se sve intenzivnije dopisivati s teolozima. Štoviše, u pismima Mittag-Leffleru iz 1883/84. godine Cantor naglašava da on zapravo *nije stvorio teoriju skupova* i da ne može preuzeti nikakve osobne zasluge za svoja otkrića, budući da je on „samo oruđe više sile“ (*ein Werkzeug einer höheren Macht*), a kada je riječ o stvarnom, odnosno matematičko-znanstvenom sadržaju njegovih radova, sebe je smatrao „samo pukim izvjestiteljem i službenikom“ (*nur Berichterstatter und Beamter*), čiji se jedini doprinos (*mein eigenes Werk*) svodio na jezično-stilsko oblikovanje ideja i osmišljavanje načina njihove prezentacije (v. pisma Mittag-Leffleru od 23. 12. 1883. i 31. 1. 1884. u Meschkowski & Nilson 1991, № 59 i 66, str. 160 i 172).[527] Iz svega proizlazi da je Cantor smatrao kako je Bog nužan za teoriju transfinitnih brojeva te da je teorija skupova božanskoga podrijetla: „Ne sumnjam u istinitost Transfinitnoga, koje sam, uz Božju pomoć, otkrio i prepoznao.“ (iz pisma fra Ignatiusu

[525] Mittag-Leffler u ovom pismu poziva Cantora da razmisli o povlačenju rada jer je bio uvjeren da bi objavljivanje „Principien einer Theorie der Ordnungstypen“ prije nego što Cantor bude u stanju objasniti sve nove pozitivne rezultate svoje teorije znatno narušilo njegov ugled među matematičarima. Upozorava ga:

> „Ako bi Vaša teorija na ovaj način bila diskreditirana (*wenn Ihre Theorien einmal auf diese Weise in Misscredit kommen*), trebalo bi vrlo mnogo vremena da ponovno privuče pozornost matematičkoga svijeta. Vrlo je moguće da ni Vi ni Vaša teorija za naših života nikada nećete dobiti zasluženo priznanje. […] Objavljivanjem „Principien usw.“ nećete ostvariti nikakav značajniji utjecaj na razvoj naše znanosti (*keinen bedeutenden Einfluss auf die Entwicklung unserer Wissenschaft*).“ (navedeno prema Meschkowski & Nilson 1991: 241; v. i Dauben 1990: 138)

[526] U pismu Poincaréu Cantor za raskid odnosa okrivljuje Mittag-Lefflera te nagađa da je njegov zahtjev za povlačenjem rada bio motiviran strahom od „berlinskih moćnika“ (*der Berliner Machthaber*), koji, prema Cantorovu mišljenju, još od 1870. godine nisu odobravali njegova istraživanja.

[527] V. i pismo Dedekindu od 5. 11. 1882., u kojem Cantor piše da mu je „svemogući Bog *poslao* (*hat es Gott der Allmächtige geschickt*) najznamenitije i najneočekivanije rezultate iz teorije skupova i teorije brojeva“ (citirano prema Ferreirós 1999: 257, nap. 2, moj kurziv).

Jeileru od 20.5.1888., Cod. Ms. G. Cantor 16, № 81, str. 169, navedeno prema Hallett 1984: 11). Dauben dobro sažima ovu poantu:

> „Cantor je vjerovao u apsolutnu istinitost svoje teorije skupova zato što mu je bila *objavljena*. Stoga se smatrao ne samo Božjim glasnikom koji pažljivo i vjerno bilježi, izvještava i širi novootkrivenu teoriju transfinitnih brojeva, nego ujedno i Božjim ambasadorom." (Dauben 1990: 147)[528]

Poanta ove analize dubljih motiva koji su stajali u pozadini Cantorova animoziteta prema Veroneseu i, općenitije govoreći, njegova antiinfinitezimalizma jest sljedeća. Cantor je, naime, bio uvjeren da njegova teorija (aritmetičkoga i geometrijskoga) kontinuuma, zajedno s pripadnom teorijom beskonačnosti odnosno transfinitnih brojeva, nije samo *jedina ispravna nego i jedina moguća* te da nijedna alternativna, odnosno suparnička teorija ne može biti održiva ako se njezini rezultati u konačnici ne podudaraju s rezultatima njegove teorije (usp. Popović 2017: 89). Jasno je kakve je posljedice takvo uvjerenje moralo imati za Veronesea i njegovu nearhimedovsku geometriju te s njom povezanu, nekantorovski koncipiranu teoriju beskonačnih brojeva. Veroneseova teorija postala je glavnom metom Cantorovih napada od sredine 1890-ih nadalje iz najmanje dvaju razloga. Prvo, *Fondamenti* su se pojavili u Scheppovu njemačkom prijevodu 1894. godine što je Cantoru omogućilo da se iz prve ruke upozna sa sadržajem Veroneseove teorije. Drugo, i vjerojatno presudno, Vivanti je u pismu od 8.12.1893. upozorio da, budući da su Stolz i, osobito, Veronese „utemeljili klasu jednodimenzionalnih veličina koja uključuje beskonačno male i beskonačno velike elemente (*eine Klasse eindimensionaler Größen begründeten, welche unendlich kleine und unendlich große Elemente einschließen*)", to neminovno znači da je Cantorova teoriju beskonačnosti nepotpuna, odnosno, kako je to formulirao sâm Vivanti: „izvan je svake sumnje da se Vaše [sc. Cantorove] tvrdnje ne mogu odnositi na najopćenitiji pojam veličine (*es ist also außer Zweifel, daß Ihre Behauptungen sich nicht auf den allgemeinsten Größenbegriff beziehen können*)" (citirano iz Cantorova pisma Vivantiju od 13.12.1893., navedeno prema Meschkowski 1965: 505). Dakle,

> „prihvatiti Veroneseove rezultate […] značilo bi zanijekati savršenstvo Cantorove vlastite tvorevine.[529] Razumljivo, *stoga je pokrenuo pravu kampanju kako bi što energičnije diskreditirao Veroneseov rad*. Sama narav Cantorova shvaćanja teorije skupova odredila je vrstu napada koji će poduzeti." (Dauben 1990: 233, moj kurziv)

[528] I u pismu Hermiteu od 22. 1. 1894. Cantor naglašava da ga već dvadeset godina ponajprije zaokupljaju metafizika i teologija. Dodaje kako je zahvalan svemudromu i svemilostivomu Bogu što mu je uvijek uskraćivao ispunjenje želja povezanih s profesionalnim napredovanjem, ponajprije s profesurom u Berlinu, jer ga je „na taj način, kroz dublje uranjanje u teologiju, prisilio da Njemu i Njegovoj svetoj Rimokatoličkoj crkvi služi bolje nego što bi mogao, sa svojim vjerojatno slabim matematičkim sposobnostima, kroz isključivo bavljenje matematikom." (citirano prema Meschkowski 1965: 515)

[529] U svjetlu prethodne analize moglo bi se reći da bi Cantor u ovom kontekstu prije govorio o *creatio divina* nego o *creatio humana*. Tim gore po Veronesea, jer bi to onda značilo da Veroneseova alternativna teorija predstavlja, kako je to duhovito označio Grattan-Guinness, *herezu*. Naime, on u knjizi *The Search for Mathematical Roots, 1870–1940* uvodi čitatelje u problem Cantorova antiinfinitezimalizma opaskom da se „hereza prakticirala u Svetom weierstraßovskom carstvu" jer je „Talijan Giuseppe Veronese pokušao razviti teoriju 'nearhimedovskih [sustava] veličina'." (Grattan-Guinness 2000: 121). Štoviše, Grattan-Guinness je dodao kako bi proučavanje povijesti infinitezimala u razdoblju *fin-de-siècle* „predstavljalo zanimljiv primjer povijesti hereze" (*op. cit.*, str. 122, nap. 31).

Cantor je nastojao svoju kampanju protiv Veroneseove teorije voditi na dvjema „frontama“, u Njemačkoj i u Italiji. Tako u jednom od pisama Killingu (3.6.1895.) inzistira na tome da je nužno „sve upozoriti na Veroneseove pogreške“ (Cod. Ms. G. Cantor 17, № 184, str. 156).[530] Međutim, Killing nakon Veroneseove kritike njegova neuspjeloga „dokaza“ Arhimedova aksioma očito više nije bio spreman sudjelovati u Cantorovoj kampanji.[531] Štoviše, u drugom svesku svoje knjige *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* iz 1898. Killing otvoreno priznaje da je Veronese bio u pravu i kada je riječ o statusu Cantorova „dokaza“ o nemogućnosti infinitezimala: „Cantor nažalost nije pružio potpun dokaz svojega teorema“ (*Cantor hat den vollständigen Beweis für seinen Satz leider nicht veröffentlicht*) (Killing 1898: 53).[532] Ipak, pažljivije čitanje §12 Killingove knjige, posvećenoga Veroneseovim transfinitnim brojevima, pokazuje da je Killing u biti dijelio Cantorovo uvjerenje kako Veroneseova teorija može biti održiva jedino ako se njezini beskonačni brojevi mogu poistovjetiti s Cantorovim transfinitnim ordinalima. Upravo je to Cantor istaknuo u pismu Peanu od 27.7.1895.:

> „**Čini mi se da su njegovi** [sc. **Veroneseovi**] **‘beskonačni brojevi’ održivi jedino ako se poistovjete s mojim ‘transfinitnim ordinalnim tipovima’** (*jedenfalls scheinen mir seine ‘unendlichen Zahlen’ nur dann haltbar, wenn sie mit gewissen von meinen ‘transfiniten Ordnungstypen’ identificirt werden*). No tada za njih ne može vrijediti zakon komutativnosti u pogledu zbrajanja i množenja, na čemu on inače toliko inzistira (*worauf er solchen Nachdruck legt*). A time nestaje i značenje njegovih izmaštanih (*erträumten*) ‘aktualno beskonačno malih dužina’.“ (citirano prema Meschkowski & Nilson 1991, № 143, str. 359–360; Cantorov izvorni kurziv, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Da je Killing doista zastupao slično stajalište potvrđuje njegova tvrdnja da bi Veroneseov broj ∞_1 morao biti izraziv pomoću Cantorovih transfinitnih ordinala, odnosno pomoću ω, „iako je sâm Veronese to smatrao nemogućim“ (*müsste es auch möglich sein, die Veronesesche Zahl* ∞_1 *durch die Cantorschen Zahlen auszudrücken, was Veronese selbst als ausgeschlossen betrachtet*) (Killing 1898: 64). Iako je prilično pažljivo čitao i Veronesea i Levi-Civitu, čini se da Killing ipak nije razumio kako Veroneseovi brojevi *nisu beskonačni brojevi iste vrste* kao Cantorovi. To potvrđuje i njegova opaska da „dvije teorije“, Cantorova i Veroneseova, „ne smiju voditi do kontradiktornih zaključaka“ (*die beiden Theorien nicht zu entgegengesetzten Folgerungen führen*) (*ibid.*). Ono što je Killingu, po svoj prilici, promaknulo zapravo je ključna

---

[530] U pismu Killingu od 5. 4. 1895., napisanom neposredno nakon objavljivanja njemačkoga prijevoda *Fondamenti*, Cantor piše kako „ono što gospodin Veronese izlaže u svom djelu smatram fantazijama (*Phantastereien*), a ono što iznosi protiv mene neosnovanim (*unbegründet*).“ (Cod. Ms. G. Cantor 17, № 173, str. 138). Jedini dijelovi *Fondamenti* u kojima Veronese „iznosi nešto protiv“, odnosno polemizira s Cantorom jesu oni u kojima kritizira njegov „dokaz“ o nemogućnosti infinitezimala.

[531] To, naravno, ne znači da Killing nije imao ozbiljnih rezervi prema pojedinim aspektima Veroneseove metode ili načina izlaganja. Tako je u predgovoru knjizi *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* (1893) istaknuo da se „knjiga *Fondamenti di geometria* gospodina Veronesea toliko značajno razlikuje po cijeloj svojoj strukturi od moje da nemam nikakvih problema ni zadrški u vezi s objavljivanjem svoje knjige čak ni nakon objavljivanja Veroneseove.“ (Killing 1893: viii). Međutim, kao što sam pokazao u Odjeljku [3], upravo je Veroneseovoj teoriji Killing posvetio znatan dio drugoga sveska te knjige iz 1898. godine (*Einführung*, Bd. II).

[532] Podsjetimo, Stolz je već deset godina ranije, 1888., u radu objavljenom u uglednim *Mathematische Annalen* pokazao da je Cantorov „dokaz“ pogrešan, dok sam Weierstraß nije smatrao potrebnim odgovoriti ni na Cantorovo pismo iz 1887., u kojem mu je ovaj poslao skicu svojega „dokaza“ (usp. Dodatak D).

činjenica: Veronese je, za razliku od Cantora, prihvatio princip permanencije. Upravo mu je to Cantor osobito zamjerao:

> „Poštovani kolega, sadržaj Vašega pisma od 10. studenoga nedvojbeno mi pokazuje da ste do svojih stajališta o transfinitnim brojevima došli proizvoljnim, prisilnim i samim time nelegitimnim prenošenjem pojava iz područja konačnoga u [područje] transfinitnoga (*durch eine willkürliche, gewaltsame und daher rechtlose Uebertragung von Vorkommnissen im Gebiete des Endlichen auf das Transfinite*), stajališta koja su, naime, potpuno suprotna mojima (*welche den meinigen durchaus entgegengesetzt sind*)." (pismo od 13.11.1890., navedeno prema Meschkowski & Nilson 1991, № 128, str. 329, moj kurziv)

Kao što možemo vidjeti, formulacija koju Cantor ovdje koristi odgovara izvornoj formulaciji Leibnizova zakona kontinuiteta, koji će Robinson u nestandardnoj analizi rigorozno inkorporirati kao princip transfera (usp. Odjeljak [2.6.1] i v. Odjeljak [4.1]). U istom pismu Cantor naglašava da njihove suprotstavljene i međusobno proturječne teorije *ne mogu obje biti istinite* (*nicht alle beide wahr sein können*) te dodaje kako bi zbog načelnoga neslaganja u pogledu stajališta (*Standpuncte*) o fundamentalnim pitanjima bilo najbolje prekinuti svaku daljnju raspravu o tim pitanjima „s obzirom na neospornu beznadnost postizanja bilo kakva sporazuma u takvim okolnostima" (*bei der unter solchen Umständen zweifellosen Aussichtslosigkeit einer Verständigung*).

Cantorova opaska o istinitosti filozofski je osobito zanimljiva jer jasno pokazuje dijametralnu suprotstavljenost između njegova i Veroneseova stajališta. Naime, pitanje ontološkoga statusa infinitezimala i transfinitnih brojeva, u duhu (radikalnoga) matematičkog realizma koji je Cantor zastupao, predstavlja pitanje koje se tiče Istine, odnosno toga kako stvari *doista* stoje. S tim je usko povezano i njegovo razlikovanje iz *Grundlagen* između uobičajenih realnih brojeva – *reelen Zahlen* – i „stvarno stvarnih brojeva" – *realen Zahlen* – odnosno brojeva koji nisu samo imanentno nego i aktualno ili objektivno postojeći (usp. Odjeljak [2.5]). Na pojedinim mjestima Cantor ih naziva još i „konkretnim brojevima koji posjeduju realno značenje" (*konkrete Zahlen von realer Bedeutung zu besitzen*) (usp. Cantor 1883, §1).[533] Za Cantora, kao i za Fregea ili Gödela, brojevi poput ω postoje kao apstraktni entiteti u nekom „trećem carstvu" (usp. Frege 1918) ili, poslužimo li se Hilbertovom poznatom formulacijom, u „Cantorovu raju" (Hilbert 1926: 170). Nasuprot tomu, kao što sam već pokazao u Odjeljku [2.5], Veronese je ovdje znatno bliži modernomu hilbertovskom, odnosno formalističkom shvaćanju, prema kojemu je to pitanje zapravo *čisto aksiomatsko* i tiče se isključivo neproturječnosti na određeni način definiranih matematičkih objekata ili struktura: iz konzistentnosti slijedi (matematička) egzistencija i Veroneseu je to sasvim dovoljno. To ujedno znači da se Veronese gotovo sigurno ne bi složio s Cantorovom tvrdnjom da dvije suprotstavljene teorije ne mogu obje biti istinite. Ako su obje teorije konzistentne, tada su obje i istinite.[534] Upravo to potvrđuje i njegova prepiska s Cantorom.

---

[533] Dauben je s pravom primijetio da je ta razlika između dvaju značenja pojma „realnosti" brojeva vidljiva jedino u njemačkome izvorniku te da je u potpunosti izgubljena u prijevodima *Grundlagen*. Usp. Dauben 1990: 125ff.

[534] Da je to doista bilo Veroneseovo shvaćanje potvrđuje i njegovo svečano predavanje „Il vero nella matematica", kojim je pozdravio novu generaciju studenata na početku akademske godine 1905/06. u Padovi. Ondje, među ostalim, piše:

Iz Cantorovih se pisama vidi da je poanta na kojoj je Veronese inzistirao bila da između njega i Cantora zapravo nema nikakva suštinskog spora, nego da razlike između njihovih dviju teorija proizlaze iz različitih aksiomatskih pretpostavki na kojima počivaju. Dakle, jednom kada je utvrđeno da su infinitezimali neproturječni, pitanje postoje li oni, povrh toga, i *stvarno*, odnosno *u nekom objektivnom smislu* jest, prema Veroneseovu (i kasnijemu Hilbertovu) shvaćanju, pitanje kojim se mogu baviti metafizičari ili, alternativno, fizičari, ali kojim se matematičari ne moraju nužno opterećivati (usp. Veronese 1893/94 i Veronese 1909). Matematičar je, prema tome, dužan pokazati jedino da je teorija konzistentna, ne i da li objekti te teorije postoje u izvanmatematičkoj stvarnosti.

Doduše, Veronese se možda doista izrazio donekle nespretno govoreći o „hipotezama" umjesto o aksiomima, što je Cantora čak navelo da kao moto za „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" odabere Newtonovu izreku *hypotheses non fingo* (usp. Cantor 1895: 481). Cantor je, naime, odlučno inzistirao na tome da njegova teorija beskonačnih brojeva ne počiva ni na kakvim hipotezama (*die meinigen beruhen aber auf gar keinen Hypothesen*) (v. Cod. Ms. G. Cantor 17, № 173, str. 138).[535] To je još jasnije izrazio i u pismu Veroneseu od 17.11.1890.:

> „Naprosto ne želim nastavljati našu dosadašnju raspravu iz načelnih razloga (*aus sachlichen Gründen*), a ono što mi sada pišete samo dodatno učvršćuje moje uvjerenje u uzaludnost tih rasprava. U mojim aritmetičkim istraživanjima o konačnim i transfinitnim [brojevima] nema govora ni o kakvim hipotezama, nego samo o utemeljenju onoga što je ionako već realno prisutno u prirodi (*sondern nur von der Begründung des Realen in der Natur Vorhandenen*). Vi, naprotiv, poput metageometara (*sie hingegen glauben nach Art der Metageometer*) Riemanna, Helmholtza i njima sličnih, vjerujete da je moguće formulirati hipoteze čak i u aritmetici, što je posve nemoguće (*ganz unmöglich*). U tome leži Vaša jednako nesretna koliko i kobna zabluda, od koje

---

> „La matematica pura è per noi esatta. *La verità nella scienza pura scaturisce dall'armonia dei diversi atti del pensiero, e la libertà dello spirito nelle sue creazioni è limitata soltanto dal principio di contraddizione*. Onde un'ipotesi è possibile quando non vi sia contraddizione colle premesse o colle sue conseguenze. Il matematico assomiglia spesso a un viandante che, percorrendo la sua strada, si trovi dinanzi a due ramificazioni di essa, sicchè gli sia necessaria un'ipotesi, per seguire l'uno piuttosto che l'altro cammino." (Veronese 1906: 8, moj kurziv)

Povijesno je iznimno zanimljivo da je, za razliku od Veroneseove teorije, za koju je još 1890-ih dokazano da je neproturječna konstruiranjem odgovarajućeg modela njezinih aksioma, zapravo upitan bio status Cantorove izvorne, odnosno *naivne teorije skupova*. Naime, Cantor svoju teoriju nije izložio aksiomatski, što je u znatnoj mjeri otežavalo ispitivanje njezinih metamatematičkih svojstava. Kada su se krajem 1890-ih počeli pojavljivati prvi skupovnoteorijski paradoksi, Cantor nije smatrao da oni na bilo koji način dovode u pitanje njegovu teoriju. Doista, kao što su pokazali Purkert i Ilgauds (1985) te Meschkowski i Nilson (1991), Cantorova korespondencija, počevši od prvih pisama Hilbertu iz 1896., pokazuje da je već anticipirao pojedine „antinomije" (*Antinomien*), primjerice Burali-Fortijev paradoks o skupu ili, kako kaže Cantor, „totalitetu" svih ordinalnih brojeva (*Totalität aller Ordnungszahlen*), te da je smatrao kako one „ni na koji način ne potresaju temelje njegove teorije" (*die Antinomie erschüttert nicht die Grundfesten seiner Lehre*) (usp. Meschkowski & Nilson 1991: 389; v. prateći komentar uz Cantorovo pismo Hilbertu od 26.9.1897.). Situacija je postala jasnija tek nakon prvih aksiomatizacija teorije skupova, ponajprije nakon Zermelova pionirskog rada „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I" (*Mathematische Annalen*, sv. 65, str. 261–281), koji je postavio temelje suvremene aksiomatske teorije skupova (usp. i Hallett 2024).

[535] O Veroneseovu shvaćanju geometrijskih hipoteza i njihovoj ulozi u aksiomatskom zasnivanju i izlaganju geometrije v. odjeljke [2.3], [2.5], [2.6.1] i [2.7].

> Vas ne mogu niti želim odvratiti (*darin liegt Ihre ebenso unglückliche wie verhängnisvolle Täuschung, von welcher ich Sie nicht abbringen kann und mag*)." (citirano prema Meschkowski & Nilson 1991, № 129, str. 330)

U nastavku pisma Cantor naglašava da bi svako odstupanje od njegove transfinitne aritmetike predstavljalo „nemoguće odstupanje od fundamentalnih aritmetičkih istina" (*unmögliche Abweichung von den arithmetischen Grundwahrheiten*) te dodaje:

> „Bilo koje 'hipoteze' koje krše te fundamentalne istine jednako su lažne i proturječne kao i, primjerice, tvrdnja da je $2^2 = 5$ ili kvadratni krug. Dovoljno mi je da vidim takve hipoteze postavljene u prvi plan bilo kojega istraživanja pa da odmah znam kako to istraživanje mora biti pogrešno (*daß diese Untersuchung falsch sein muss*).
>
> A Vaši vlastiti postupci to su mi već pokazali, budući da su Vas Vaše žalosne 'hipoteze' dovele do proturječnoga pojma aktualno beskonačno malih linearnih veličina (*da Sie durch Ihre beklagenswerthen 'Hypothesen' zu dem widersprechenden Begriffe actual unendlich kleiner linearer Größen geführt worden sind*)!
>
> Kako mogu očekivati da prihvatite moj dokaz koji se odnosi na ovo drugo kao istinit i točan, kada, na moju žalost, vidim da ste skeptični prema fundamentalnim istinama moje transfinitne aritmetike? *Geometrijske teorije, kakve god bile njihove naravi, podliježu zakonima aritmetike, kako konačnih tako i transfinitnih* [*brojeva*]. *Hipoteze koje proturječe tim zakonima ni pod kojim okolnostima nisu dopuštene* (*Hypothesen, welche diesen Gesetzen widersprechen, sind unter keinen Umständen zulässig*). Dojam koji sam imao od samoga početka, da su Vaše nelegitimne koncepcije aktualne beskonačnosti povezane s Fontenelleovima, ne samo da je opstao nego je Vašim objašnjenjima dodatno učvršćen. […] *Nikada nisam napisao niti rekao da smatram mogućima neke druge transfinitne kardinalne i ordinalne brojeve osim onih koje sam ja utvrdio* (*daß ich andere transfinite Cardinal und Ordnungszahlen für möglich hielte, als die von mir erkannten*)." (prema Meschkowski & Nilson 1991, № 129, *loc. cit.*, moj kurziv)

Unatoč Veroneseovim nastojanjima da Cantoru objasni zbog čega je navodni „dokaz" protiv mogućnosti infinitezimala iz *Mitteilungen* pogrešan te unatoč tomu da mu je očito skretao pozornost na to da su do istoga zaključka došli i drugi matematičari, menđu njima i Stolz, Cantor nije pokazivao nikakvu spremnost na promjenu svojega stajališta. Kurzivirani dijelovi prethodno citiranoga Cantorova pisma, među ostalim, jasno pokazuju Cantorovo duboko uvjerenje, karakteristično za to razdoblje, da se geometrija mora pokoravati zakonima aritmetike (v. analizu „triju dogmi" moderne matematike u Odjeljku [1.3]); nasuprot tomu, kao što sam već istaknuo, Veronese je, nasuprot tomu, kao geometar, ali i kao jedan od *metageometara* te filozofa geometrije, dosljedno zastupao autonomiju svoje discipline, inzistirajući na tome da pri zasnivanju geometrije čisto geometrijsko stajalište (*punto di vista puramente geometrico*) mora imati prednost pred analitičkim pristupom, bio on aritmetički, skupovnoteorijski ili logički. Cantor raspravu s Veroneseom zaključuje sljedećim riječima:

> „Ako se ikada urazumite i jednom shvatite (nadam se, ali ne vjerujem da će se to dogoditi) da se sve spekulacije o aktualno beskonačno malim linearnim elementima temelje na zabludi ili, bolje rečeno, da predstavljaju himere (*dass alle Speculationen über actual unendlich kleine Linienelemente auf Irrthum beruhen, resp. Chimären sind*) – kao što je to slučaj s Vama, kao i sa svakim drugim tko se time prije bavio, tko se time sada

> bavi ili tko će se time [u budućnosti] baviti – tada ćete se s osmijehom prisjećati mojih pisama, koja su Vam sada toliko nesimpatična (*so werden Sie mit Lächeln an meine Ihnen zur Zeit so unsympathischen Briefe zurückdenken*). Moja nada da ću Vas u ovoj nesretnoj stvari privesti istini potpuno iščezava (*meine Hoffnung, Sie zur Wahrheit in dieser unglücklichen Sache zu bekehren, schwindet vollends*). […]
>
> Činjenica da ne odgovaram gospodinu Stolzu ili bilo komu drugomu tko piše protiv mene ne znači da time odobravam ono što govore. **Lažne teorije ne postaju istinite njihovim ponavljanjem ili variranjem**, **a istinite teorije ne postaju lažne zato što ih se napada**, **čak ni ako ti napadi ostanu bez odgovora**. **Neslaganja utemeljena na činjenicama** (*sachliche Meinungsverschiedenheiten*) **nemaju apsolutno nikakva utjecaja na moja osobna uvjerenja** (*keinen Einfluß auf meine persönliche Gesinnung*); **u takvim slučajevima žalim jedino zbog odstupanja od istine** (*Abweichung vom Wahren*)." (citirano prema Meschkowski & Nilson 1991, № 130, str. 331, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Ovaj ulomak pokazuje da s Cantorom više nije bilo moguće na objektivan te znanstveno, odnosno matematički utemeljen način voditi raspravu o statusu njegova „dokaza", niti o ontološkome statusu infinitezimala i, općenito uzevši, novouvedenih nearhimedovskih algebarskih ili geometrijskih struktura. To ne znači da Cantor više nije bio spreman raspravljati, nego da je rasprava za njega već *unaprijed* imala poznat ishod: *svaka teorija koja nije bila sukladna njegovoj transfinitnoj aritmetici morala je biti pogrešna*. Veroneseov je pokušaj, stoga, od samoga početka bio osuđen na neuspjeh jer Cantor nije bio spreman prihvatiti mogućnost da njegov dokaz možda nije valjan. A, kao što smo vidjeli, činjenica je bila da je njegov „dokaz" naprosto bio cirkularan a samim time i pogrešan, zbog čega i nije mogao poslužiti kao dokaz nemogućnosti infinitezimala. Cantorova su „osobna uvjerenja", kako ih on sam naziva, postala kriterij prema kojemu je prosuđivao sve alternativne, nekantorovski koncipirane teorije beskonačnosti, kakva je, primjerice, bila Veroneseova (ili Stolzova ili ona du Bois-Reymonda). Svaku takvu teoriju koja nije bila istovjetna njegovoj Cantor je smatrao „odstupanjem od istine".

Na to upućuju i brojna pisma Peanu iz 1895. godine, u kojima Cantor iznosi niz izrazito oštrih i uglavnom neutemeljenih optužbi na Veroneseov račun (v. pisma iz Cantorove *Briefbuch* III za razdoblje 1890.–1895.). Tako ga, primjerice, optužuje za plagijat (v. pismo od 27.7., Cod. Ms. G. Cantor 17, № 189); zatim tvrdi da su Veroneseovi brojevi tek „papirnate veličine" (*papierne Größen*) kojima je stoga mjesto u košu za papir (*in den Papierkorb*)[536] (pismo od 28.7., usp. Cod. Ms. G. Cantor 17, № 192), dok na drugome mjestu njegove definicije proglašava „posve besmislenima i monstruozno cirkularnima" (*völlig nichtssagend und ein monströser Circel*), zaključujući da su svi Veroneseovi rezultati o transfinitnim brojevima znanstveno neopravdani.[537] Na Cantorovo inzistiranje Peano je jedno od tih pisama (od 20.7.1895.) objavio u petom svesku *Rivista di Matematica*. Cantor je tom prilikom dodatno pojačao pojedine negativne opaske pa, primjerice, govori o Veroneseovoj teoriji kao

[536] Usp. i Cantorovo pismo Vivantiju od 13.12.1893. u Cod. Ms. G. Cantor 17, № 162 (v. i Meschkowski 1965: 506–7).

[537] „Es fehlt daher auch allen Folgerungen, welche Herr Veronese an seine transfiniten Zahlbildungen knüpft, die wissenschaftliche Berechtigung." (citirano prema Meschkowski & Nilson 1991, № 144, str. 361)

o „proizvoljnoj pseudo-transfinitnoj brojevnoj konstrukciji“ (*willkürlichen pseudo-transfiniten Zahlbildungen*) koja nema nikakvo znanstveno utemeljenje (v. *Rivista di Matematica*, Vol. 5, str. 108–109). Peano je u istom broju *Rivista* objavio i izvadak iz Cantorova pisma Vivantiju od 13.12.1893., u kojem Cantor, među ostalim, kaže:

> „Opravdanje za uvođenje veličina […] koje bi, kada bi postojale, morale biti manje od svake, ma koliko male, veličine u uobičajenoj domeni realnih veličina [sc. brojeva] (*des gemeinen reellen Grössengebiets*), […] prije svega ovisi o pitanju postoje li uopće beskonačno male veličine ili dužine u domeni mogućega (*im Gebiete des Möglichen*). Na to se pitanje, kao što sam dokazao (*wie ich es bewiesen habe*), mora nedvosmisleno odgovoriti niječno. Dok Thomae, du Bois, Stolz, Veronese itd. vjeruju da mogu opravdati svoje uvođenje infinitezimala (*die Einführung der infinitesimi*), […] istina je zapravo da cijela njihova teorija novih ordinalnih veličina (*ihre ganze Theorie von den neuen Ordnungsgrössen*) visi u zraku (*in der Luft schwebt*) ili je, bolje rečeno, potpuno besmislena (*ein Nonsens ist*), ako u domeni mogućega beskonačno male veličine [sc. infinitezimali] zapravo ne mogu postojati. Kao što možete vidjeti, začarani krug u kojem se u svojim razmišljanjima kreću ta gospoda (*der vitiose Zirkel im Gedankengange dieser Herren*) nije nešto što bi se moglo poželjeti.“ (v. *Rivista di Matematica*, Vol. 5, str. 105)

U vezi s Veroneseovim *Fondamenti* Cantor ponovno naglašava da je „matematička osnova toga djela posve apsurdna“ (*die mathematische Grundlage des Werkes ist aber durchaus absurd*) (*op. cit.*, str. 108). Po svoj prilici, Vivantija i Peana nije trebalo osobito uvjeravati. Obojica su prihvatila Cantorov „dokaz“ i dijelila njegov opći antiinfinitezimalistički stav (usp. Vivanti 1891a, §3. Dimostrazione di Cantor della non esistenza dell'infinitesimo, str. 137–138; usp. Peano 1892a):

> „Kao što smo utvrdili, u domeni realnih veličina (*nel campo delle quantità reali*) aktualni infinitezimali ne postoje (*l'infinitesimo attuale non esiste*).“ (Vivanti 1891a: 146)

> „Budući da neprekidnost isključuje postojanje infinitezimala (*poiché la continuità esclude l'esistenza dell'infinitesimo*), a budući da ona [sc. neprekidnost] predstavlja temeljno svojstvo veličina […] aktualno infinitezimalne veličine, primjerice dužine (*lunghezze attualmente infinitesime*), predstavljaju apsurdne i nepojmljive entitete (*enti assurdi, inconcepibili*), odnosno 'nemoguće, *u sebi proturječne* imaginarne objekte', kako kaže Cantor (*come dice Cantor*).“ (Vivanti 1891b: 253)

> „Iz činjenice da se infinitezimalna dužina ne može učiniti konačnom čak ni posredstvom nekoga aktualno beskonačnog množenja, ma koliko ono bilo moćno (*per quanto potente essa sia*), zaključujem zajedno s Cantorom (*conchiudo col Cantor*) da ona ne može biti element konačnih veličina (*non può essere elemento di grandezze finite*).“ (Peano 1892a: 62)

Ono što pokazuje drugi ulomak iz Vivantijeva rada „Ancora sull'infinitesimo attuale“ jest da je Vivanti, kao i Cantor i Stolz, zapravo smatrao kako se neprekidnost geometrijskoga linearnog kontinuuma iscrpljuje u Dedekind-potpunosti i da nije moguća nikakva alternativna karakterizacija neprekidnosti pravca, poput one koju je predložio Veronese. Međutim, ako se već na početku prihvati Dedekindov aksiom, tada su, kao što je pokazao Veronese, time ujedno isključene i infinitezimalne dužine kao mogući elementi

geometrijskoga linearnog kontinuuma, budući da Dedekindov aksiom implicira Arhimedov aksiom (usp. Odjeljak [2.6.3]).

Zanimljivo je da je Peano, slijedeći Veronesea, eksplicitnp istaknuo kako „iz Dedekindova postulata, kao što je dobro poznato, slijedi nemogućnost konstantnih [sc. aktualnih] infinitezimala“, zbog čega naglašava da u svojem „dokazu“ nemogućnosti infinitezimalnih dužina „niti prihvaća niti niječe taj postulat“ (Peano 1892a: 61). Drugim riječima, budući da je očito bio svjestan prigovora koji su već bili upućeni Cantorovu „dokazu“, Peano je nastojao „razraditi“ Cantorovo izvođenje (*di sviluppàre questa dimostrazione*) kako se zbog njegove „prevelike konciznosti“ ne bi stekao dojam da je Cantorov „dokaz“ nepotpun (usp. Peano 1892a: 59).[538] Laugwitz je smatrao da je Peanova uloga u cijeloj toj stvari bila negativna, a njegovo držanje u sporu između Veronesea i Cantora nečasno. Uzrok tomu vidio je u Peanovu osobnom animozitetu i „averziji prema Veroneseu“ (još iz razdoblja rasprave o geometriji hiperprostora – v. Odjeljak [2.3]): „to može objasniti“, piše Laugwitz, „čudnu činjenicu da je Peano podržavao Cantora u njegovu pogrešnom uvjerenju da su infinitezimali nemogući.“ (Laugwitz 2002: 122). Ehrlich je slična mišljenja:

> „Peanov navodni ‘dokaz’ može se promatrati podjednako kao napad na Veroneseovo pionirsko istraživanje nearhimedovske geometrije i kao pokušaj razrade Cantorova apstraktnog argumenta. Doista, njegov se ‘dokaz’, uzme li se zajedno s njegovim prikazom Veroneseovih *Fondamenti*, može smatrati prvim plotunom u višestrukoj kritici nearhimedovske geometrije i/ili Veroneseovih doprinosa koja je uslijedila nakon objavljivanja Veroneseova pionirskog djela.“ (Ehrlich 2006: 102)

Zanimljivo je da je Peano, za razliku od Cantora, prihvaćao princip permanencije ili, kako ga je sâm nazivao, princip konzervacije formalnih zakona (*principio di conservazione delle leggi formali*) (v. njegov rad „Principio de Permanentia. Exercitio de Latino recto“ – Peano 1903; usp. i Peano 1911, kao i Toader 2021, §3, str. 83ff.). Međutim, unatoč tomu, Peano je smatrao da za operacije s beskonačnim brojevima vrijede isključivo ona pravila i zakoni koje je propisao Cantor u svojoj transfinitnoj aritmetici. Time je tvrdio da je množenje infinitezimalnih dužina transfinitnim brojevima nemoguće, odnosno da nije dobro definirano (usp. Peano 1892a: 61–62). Riječ je o sljedećem. Njegov se argument može sažeti na sljedeći način. Peano smatra da je distinktivno svojstvo uobičajenih, odnosno ograničenih dužina (*segmenti terminati*), to da njihovom konkatenacijom uvijek nastaju veće dužine: ako je u neka ograničena dužina, tada vrijedi

$$\underbrace{u + u + \cdots}_{n \text{ puta}} = nu > u,$$

pa je, rimjerice, $u + u = 2u > u$. Potom uvodi dužinu ∞u, koju naziva „umnoškom beskonačnoga reda dužine u“, odnosno *il limite superiore* umnožaka dužina $2u, 3u, \ldots nu, \ldots$

[538] „Questa questione [sc. o ontološkome statusu infinitezimala], dibattutasi tra i dott. Vivanti e Bettazzi sulla *Rivista di Matematica*, è assai interessante tanto più che negli ultimi tempi sull'ipotesi della loro esistenza si sono fatte teorie e stampati dei volumi. Ad essa rispose negativamente il Cantor; ma la dimostrazione che questo illustre matematico ne diede è così concisa che fu giudicata incompleta. Scopo della presente nota si è di sviluppàre questa dimostrazione.“

(*op. cit*, str. 61). Infinitezimalnu dužinu pak definira na sljedeći način: „dužina u infinitezimalna je u odnosu na dužinu v, što zapisujemo kao $u\varepsilon v/\infty$, ako je svaki umnožak od u manji od v" (*op. cit.*, ¶11). Ako je, dakle, dužina u infinitezimalna u odnosu na dužinu v, dužina ∞u, kao gornja granica umnožaka dužine koja je infinitezimalna, manja je od v, odnosno $\infty u < v$. Peano zatim dodaje da se dužina ∞u može zbrajati s dužinom u, pri čemu nastaju dužine $(\infty + 1)u$, $(\infty + 2)u$,…, ali se može zbrajati i sama sa sobom, čime se dobiva $2\infty u$ i, općenito uzevši, svi višekratnici od ∞u. Naposljetku, Peano smatra da se ∞u može množiti i s ∞, čime se dobiva $\infty^2 u$, i tako dalje (*ibid.*). Međutim, prema Peanu, iz toga slijedi da su sve dužine koje se mogu dobiti na taj način, odnosno „množenjem [infinitezimalne dužine] u s Cantorovim transfinitnim brojevima[539], uvijek međusobno jednake [sc. odnosno jednake dužini ∞u – prim. S. P.]." (*ibid.*)[540] Drugim riječima, za svaku infinitezimalnu dužinu tipa u, odnosno za u odnosu na nju beskonačnu dužinu tipa v, vrijede, kako kaže Peano, sljedeće formule (*le formule seguenti*): za svaki transfinitni broj μ, $\mu u = \infty u < v$; za svaki konačni broj $n \in \mathbb{N}$, $nu < v$; $\infty u < v$ *i* $2\infty u = \infty u < v$ (*op. cit,* str. 62).

Peano zaključuje da infinitezimalne dužine, budući da za njih vrijedi $2\infty u = \infty u < v$, „proturječe općem pojmu dužine" (*è in contraddizione col concetto comune di segmento*) jer ne zadovoljavaju prethodno definirano distinktivno svojstvo ograničenih dužina, naime da njihovom konkatenacijom nastaju veće dužine, odnosno da je $2u > u$. Međutim, Peano pritom previđa jednu okolnost. Te se dvije tvrdnje, odnosno formule, uopće ne mogu uspoređivati jer je prva formulirana u čisto arhimedovskom kontekstu i odnosi se na svojstva konačnih dužina, dok je druga formulirana u nearhimedovskom kontekstu (usp. Freguglia 2021: 153). Time se, dakle, ni Peanovim „dokazom", kao ni Cantorovim, zapravo ništa ne postiže: njime se ne pokazuje da su infinitezimalne dužine proturječne, nego samo to da su nespojive s arhimedovskim pojmom dužine koji je sam unaprijed pretpostavio. Laugwitzovim riječima, „Peano, kao ni Cantor, nema jasnu predodžbu o tome kako bi trebalo množiti beskonačne ordinale i elemente neke algebarske strukture." (Laugwitz 2002: 123). Kada je riječ o filozofskoj recepciji tih argumenata, Branislav Petronijević u spisu *Die typischen Geometrien und das Unendliche* prvi je izričito istaknuo da „Cantor-Peanov dokaz […] nemogućnosti beskonačno malih dužina […] mora biti pogrešan (*der Cantor-Peanosche Beweis für die Unmöglichkeit der unendlich kleinen Strecke unrichtig sein muß*)." (Petronievics 1907: 74, nap. 1)

Cantor je u pismu Peanu od 9.11.1895. napisao kako bi „doista bilo najbolje kada bi gospodin Veronese herojski odlučio reći: 'Pogriješio sam', što je uostalom ljudski: *errare*

[539] Veronese je u radu „Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale", u kojem analizira Peanov „dokaz", s pravom istaknuo da jeda je Peanova argumentacija pogrešna već u samome polazištu. Naime, ako Peano smatra da bi se broj ∞ trebao ponašati na isti način kao „Cantorovi transfinitni brojevi" odnosno kao ω, tada njegova tvrdnja da vrijedi $\infty + 1 = 1 + \infty = \infty$ naprosto nije točna. Kao što smo vidjeli u Odjeljku [2.6.1], u Cantorovoj transfinitnoj aritmetici, za ω vrijedi $\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$ (v. Veronese 1892b: 74–75, nap. *). Upravo zato Veronese zaključuje da Peanov „dokaz" ne predstavlja razradu (*lo sviluppo)* Cantorova argumenta.

[540] „Ma tutti questi varii segmenti, che si ottengono moltiplicando u per i numeri transfiniti di Cantor sono uguali tra loro."

humanum est." (Cod. Ms. G. Cantor 17, № 221; v. Meschkowski & Nilson 1991, № 147, str. 367). U svjetlu analize provedene u ovom i prethodnom odjeljku ta se Cantorova opaska pokazuje gotovo ironičnom. Naime, upravo su Cantor i Peano ustrajali pri argumentima koji, kako su Veronese i drugi suvremenici već pokazivali, nisu uspijevali dokazati ono što su trebali dokazati. Ništa ne upućuje na to da je Cantor bio spreman preispitati svoje stajalište. Tako, primjerice, u pismu Veroneseu od 6.10.1890. naglašava da nema namjeru odstupiti od svojega uvjerenja kako je dokazao „takozvani Arhimedov aksiom" te da svako odstupanje od toga aksioma, koji smatra „fundamentalnom istinom" (*Grundwahrheit*), nužno mora predstavljati pogrešku koja je u suprotnosti s „realnim idejama" (*die realen Ideen*).[541] Da stvar bude gora, Peano je otišao i korak dalje. U istome broju *Rivista di Matematica* u kojem je objavio vlastiti „dokaz" objavio je i kratak prikaz Veroneseovih *Fondamenti*, koji završava sljedećim riječima:

> „**Moglo bi se unedogled nastaviti s nabrajanjem apsurda koje je autor [*Fondamenti*] nagomilao. Ali sve te pogreške, nedostatak preciznosti i strogosti u cijeloj knjizi čine je potpuno bezvrijednom**." (Peano 1892b: 144, moja emfaza)[542]

Dakle, u nedostatku uvjerljivih (matematičkih) argumenata, Peano je, kao i Cantor prije njega, polemiku sve više premještao s razine matematičke ili matematičko-filozofske rasprave na razinu osobnih diskvalifikacija.[543] Stolz je, naprotiv, prihvativši Veroneseove prigovore, revidirao svoje prvotno negativno stajalište o statusu infinitezimalnih dužina, Tako u radu „Über das Axiom des Archimedes" izričito priznaje da „nije dopušteno, kao što sam ranije tvrdio, smatrati ovaj aksiom [sc. Arhimedov] za dužine posljedicom neprekidnosti (*als eine Folge der Stetigkeit*)" (Stolz 1891a: 112). Štoviše, kako je uočio Ehrlich, Stolz je već iste godine u knjizi *Grössen und Zahlen* napisao da je „svojedobno uspješno uspostavio [sustav] neproturječnih aktualno beskonačno velikih i malih veličina", čiji su najbolji primjer upravo „*infiniti* i *infinitesimi attuali* koje je uveo Veronese" (*Veronese angekündigten neuen infiniti und infinitesimi attuali*) još u radu „Il continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede" (Stolz 1891b: 16; usp. Ehrlich 2006: 75). Nažalost, nakon Peanove negativne ocjene *Fondamenti*, pojedini su matematičari počeli s nepovjerenjem promatrati Veroneseove doprinose zasnivanju (nearhimedovske) geometrije. Dobar je primjer Friedrich Schur, za kojega smo već vidjeli (usp. Odjeljak [3]) da je u velikoj mjeri slijedio Veronesea u vlastitim *Grundlagen der Geometrie*. Unatoč tomu, u jednom pismu Friedrichu Engelu iz 1892. istaknuo je da „Veronese nije čovjek koji bi trebao pisati o osnovama [geometrije]" (citirano prema Voelke 2010: 230).

---

[541] „So lange dies nicht geschieht, halte ich an der Ueberzeugung fest, dass das sogenannte 'Archimedische Axiom' von mir bewiesen und daß eine Abweichung von diesem 'Axiom' eine Verirrung ist." (Cod. Ms. G. Cantor 17, № 91, v. Meschkowski & Nilson 1991: 328)

[542] „E si potrebbe lungamente continuare l'enumerazione degli assurdi che l'A. ha accatastato. Ma questi errori, la mancanza di precisione e rigore in tutto il libro tolgono ad esso ogni valore."

[543] Laugwitz s pravom smatra da već sama činjenica što je Peanov izrazito pristran prikaz *Fondamenti*, dug jedva dvije stranice (za razliku od već spomenutoga Kötterova prikaza u *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*), objavljen upravo u Peanovu vlastitom časopisu svjedoči o njegovu nedobronamjernom odnosu prema Veroneseu. Usp. Laugwitz 2002: 122.

Nasuprot tomu, Veronese je kritičkoj evaluaciji Killingovih, Cantorovih i Peanovih argumenata pristupio bez predrasuda i, koliko je moguće razabrati iz njegovih objavljenih radova i korespondencije, posve objektivno, doslijedno nastojeći da raspravu vodi isključivo na matematičkoj razini. Takav je pristup, kao što sam već naglasio u Odjeljku [1.1], bio u skladu s kritičkom metodologijom proučavanja povijesti i zasnivanja matematike koji je artikulirao u *Fondamenti*. Veroneseov stav prema Peanovu načinu polemiziranja možda najbolje sažima fusnota iz *Fondamenti* s kojom smo se već susreli u Odjeljku [2.3]:

> „Gospodin Peano griješi i u pogledu forme i u pogledu sadržaja, ali iako ne bi bilo teško odgovoriti na njegove prigovore, budući da za nedostatak zdravoga razuma optužuje one geometre koji ne misle kao on, svaka dostojanstvena i prijateljska rasprava time postaje onemogućena. Uvjeren sam da su pitanja o načelima matematike, a osobito geometrije, već sama po sebi dovoljno teška te da nema potrebe zapaljivim i netolerantnim raspravama dodavati nove teškoće druge naravi, kao što sam također uvjeren da određene kritike već samim načinom na koji su formulirane i iznesene jasno izazivaju i u sebi nose vlastitu osudu.“ (Veronese 1891: 613, nap. 2)[544]

Da je Veronese doista i postupao u skladu s s vlastitim metodološkim načelima potvrđuje i ulomak iz pisma koje je njegov nekadašnji profesor Felix Klein uoči objavljivanja Veroneseova rada „Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti o infinitesimi attuali“ u *Mathematische Annalen* 1896. godine poslao Cantoru:

> „Veronese mi je poslao odgovor na napad [iznesen] u Vašem posljednjem radu koji je, usput rečeno, *potpuno objektivan* (*durchaus objectiv gehalten ist*). […] Čini mi se da je [Veronese] u pravu (*er scheint mir doch recht zu haben*).“ (iz Cantorova pisma Peanu od 6.12.1895., navedeno prema Meschkowski & Nilson 1991: 368, moj kurziv)[545]

I doista, Veroneseov rad predstavlja iznimno elegantnu, preciznu i, što je možda najvažnije, dobronamjernu[546] analizu Killingovih i Cantorovih prigovora njegovoj teoriji izloženoj u *Fondamenti*. Veronese je bio potpuno svjestan da bi „dokazi“ protiv mogućnosti infinitezimala, premda pogrešni, mogli ozbiljno utjecati na recepciju njegove teorije: „mislim da je prikladno da ih opovrgnem kako ne bih dopustio da se u javnosti ukorene pogrešne

---

[544] „Il sig. Peano ha torto nella forma e nella sostanza, ma per quanto non sia difficile rispondere alle sue affermazioni, siccome egli accusa di mancanza di buon senso quei geometri che non possono pensare come lui è resa cosi impossibile ogni dignitosa e amichevole discussione lo sono convinto che le questioni sui principi delia matematica, e specialmente della geometria siano già di per sé abbastanza difficili senza che vi sia bisogno di aggiungervi nuove difficoltà di altra natura con polemiche appassionate e intolleranti, come sono altresì convinto che certe critiche pel modo con cui son fatte portano chiaramente in so la loro condanna.“

[545] Na isti zaključak dolaze i priređivači Cantorove korespondencije, koji za Veroneseovu kritiku pišu: „Die Kritik [bei Veronese] ist sachlich und trifft den Kern.“ (Meschkowski & Nilson 1991: 331)

[546] Tako Veronese, osvrćući se na Cantorov „dokaz“, ističe da on „nije potpun“ (*non è però completa*) te dodaje kako, budući da „ni ja ni drugi [autori] nismo mogli upoznati [njegov sadržaj] u cijelosti“ (*conoscerla interamente*), nastojao mu je u svojoj knjizi dati „ono tumačenje koje mi se tada činilo, a još mi se i danas čini, istinitim“ (*quella interpretazione che mi parve e mi pare tutt'ora la vera*).“ (Veronese 1896: 424) Drugim riječima, Veronese nije unaprijed odbacio Cantorov dokaz samo zato što je bio nespojiv s njegovom vlastitom teorijom ili suprotan njegovim „uverenjima“. Naprotiv, nastojao ga je rekonstruirati na način koji je smatrao najvjernijim Cantorovoj izvornoj namjeri te ga je tek potom podvrgnuo kritici.

predodžbe o osnovama [moje teorije].“ (Veronese 1896: 423) Izgleda kao da je Veronese već tada naslutio u kom pravcu će ići recepcija *Fondamenti*:

> „Ove kritike, ne samo da su selektivne jer ne spominju sve ono što se odnosi na [moju] teoriju [aktualne beskonačnosti i infinitezimalnosti], kako u mojim *Fondamenti di Geometria*, tako i u drugim mojim publikacijama, a što bi moglo rasvijetliti predmet rasprave, nego, naprotiv, jasno i nedvojbeno pokazuju da, iako su se bavile samo malim dijelom mog opusa (*una piccola parte dell'opera mia*), nisu ni vjerno prikazale ni ispravno protumačile tvrdnje i stajališta koja sam ondje iznio i razmatrao.
>
> Da bi se neka teorija mogla kritički ocijeniti (*per censurare una teoria*), potrebno je prije svega razmotriti principe na kojima počiva ili druge principe koji su im ekvivalentni. Svaki drukčiji način pristupa, čini mi se, može lako dovesti, osobito kada je riječ o fundamentalnim principima, do nesporazuma i beskrajnih rasprava od kojih znanost nema nikakve koristi ni dobitka. Upravo sam se zato pri proučavanju radova [drugih autora] iz područja zasnivanja geometrije, koje sam sabrao u apendiksu *Fondamenti*, uvijek trudio pažljivo i bez predrasuda slijediti principe uspostavljene u svakome od tih radova, navodeći, uz moguće nedostatke, sve njihove najvažnije prednosti koje zaslužuju da ih se uzme u obzir te pažljivo ograničavajući opseg kritike. Toga sam se načina također pridržavao i kada sam pokazao da prigovori izneseni u prošlosti protiv aktualno infinitezimalnih dužina, koji vrijede za [koncepcije] drugih autora, ne mogu vrijediti za moju [koncepciju].“ (*op. cit.*, str. 423–424)

Za razliku od načina na koji je Veronese čitao i tumačio radove drugih matematičara, drugi matematičari, a poslije ni brojni povjesničari i filozofi matematike, nisu bili skloni voditi se Veroneseovom metodom i slijediti njegove interpretativne smjernice pri proučavanju Veroneseova opusa. Možda najbolji primjer te vrste nalazimo kod Poincaréa.[547] Međutim, prije nego što prijeđem na analizu Poincaréove dvostruke pogreške, korisno je, međutim, nakratko razmotriti neke šire implikacije i posljedice Cantor-Peanova „dokaza“ te, općenitije, rasprave o tome mogu li infinitezimali uopće postojati i u kojem smislu.

[3.1.2] Epilog spora o ontološkom statusu infinitezimala i infinitezimalnih dužina: nekoliko ilustrativnih primjera

Cantor i Peano ostvarili su presudan utjecaj na Bertranda Russella, koji je zauzvrat afirmirao filozofski značaj njihovih rezultata te, osobito posredstvom niza publikacija – od članka „Recent Work on the Principles of Mathematics“ (1901) [548], preko *Principles of Mathematics* (1903) i *Principia Mathematica* (1910–13), do *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919) – dao nemjerljiv doprinos recepciji, popularizaciji i transmisiji njihovih ideja među filozofima i povjesničarima matematike (usp. Ehrlich 2006: 2). U svojoj *Autobiografiji* Russell

[547] U ovom odjeljku nisam podrobnije rekonstruirao raspravu koju su Vivanti i Bettazzi vodili na stranicama *Rivista di Matematica* tijekom 1891. i 1892. godine. Za detaljniju analizu v. Odjeljak [5.2] u Popović 2016 te Ehrlich 2006: 75–101. Za Veroneseov osvrt na dio rasprave vođene tijekom 1891. v. *Fondamenti*, odjeljak „Osservazioni su alcune dimostrazioni contro l'infinito e l'infinitesimo attuale“, str. 622–625.

[548] Nedugo potom rad je pretiskan pod naslovom „Mathematics and the Metaphysicians“ u zbirci *Mysticism and Logic and Other Essays* (1918).

ističe da je 1900. godina predstavljala prekretnicu u njegovu intelektualnom razvoju jer je tada upoznao Peana, čiji je *Formulario mathematico* presudno utjecao na njegovo kasnije bavljenje zasnivanjem matematike (Russell 2009, Poglavlje 6 „*Principia Mathematica*“, str. 135). Kada je pak riječ o Cantoru, Russell je njegove radove počeo ozbiljnije proučavati već 1895/96., ali je isprva bio sumnjičav prema Cantorovim rezultatima. Štoviše, smatrao da su Cantorovi argumenti pogrešni. Unatoč tomu proučio ih je „do najsitnijih detalja“, što mu je, kako poslije priznaje, bilo od velike koristi kada je shvatio da je u svojoj početnoj procjeni Cantorovih doprinosa pogriješio (Russell 2009: 118).[549] Početni skepticizam i negativan stav ubrzo je prerastao u otvoreno divljenje, pa Russell tako već u predgovoru *Principles of Mathematics* piše: „u matematici najviše dugujem, što je uostalom i očito, Georgu Cantoru i profesoru Peanu.“ (Russell 1903: viii) Gotovo se ista formulacija, uz tek neznatne izmjene, pojavljuje i u predgovoru prvomu tomu *Principia Mathematica* (usp. Whitehead & Russell 1910: viii–ix)[550]

Oslonivši se gotovo u potpunosti na autoritet Cantora i Peana, Russell je prihvatio i podržao i njihove zaključke o statusu infinitezimala i infinitezimalnih dužina:

> „Sada prelazim na jedno veoma teško pitanje o kojem radije ne bih htio ništa reći – mislim na pitanje o redovima beskonačnosti i infinitezimalnosti […]. Najveći autoriteti po tom su pitanju podijeljeni: du Bois-Reymond, Stolz i mnogi drugi tvrde da ti redovi tvore posebnu klasu veličina u kojoj se javljaju aktualni infinitezimali, dok Cantor snažno inzistira na tome da je cijela ta teorija pogrešna. […] Razrađujući je, Cantor je pronašao začarani krug i, premda je pitanje teško*, čini se da je Cantor u pravu* […] *jer je moguće dokazati da postoje jasno određena proturječja u vezi s pretpostavljenim infinitezimalima*. […] Mislim da stoga možemo zaključiti kako su ti infinitezimali matematičke fikcije. To se može dodatno potkrijepiti razmatranjem da bi, kada bi postojali infinitezimalni brojevi, morale postojati i infinitezimalne dužine, a vidjeli smo [na temelju Peanova dokaza – prim. S. P.] da je to nemoguće.“ (Russell 1903, §313, moj kurziv)[551]

---

[549] Primjerice, Russell je već u radu „On Some Difficulties of Continuous Quantity“ (1896.) izrijekom govorio o „poteškoćama u vezi s kontinuumom“ te upozoravao da su „matematičari u opasnosti zaboraviti kako filozofske antinomije u ovom području imaju svoj pandan u matematičkim pogreškama“, koje „prožimaju calculus, ali i složeniju mašineriju Cantorovih *Mengen*“ (citirano prema*The Collected Papers of Bertrand Russell*, Vol. III, Moore 1993: xvii).

[550] Sličan stav Russell je iznio već u radu „Recent Work on the Principles of Mathematics“ iz 1901., gdje, primjerice, nalazimo sljedeće riječi:

> „[M]noge teme koje su nekoć spadale među velike misterije – primjerice, priroda beskonačnosti, neprekidnosti, prostora, vremena i kretanja – sada više ni u kojem stupnju nisu otvorene za sumnju ili raspravu. Oni koji žele spoznati prirodu tih stvari trebaju samo pročitati djela ljudi poput Peana ili Georga Cantora; ondje će pronaći egzaktno i nedvojbeno izlaganje svih tih nekoć velikih misterija.“ (Russell 1901: 88, citirano prema Moore 1993: 369)

[551] Za Russellovu varijaciju na temu Peanova „dokaza“ protiv mogućnosti infinitezimalnih dužina v. §312 *Principles*. Povijesno je osobito zanimljivo da je Russell u vrijeme pisanja disertacije iz koje će proizaći *An Essay on the Foundations of Geometry* prihvaćao mogućnost infinitezimala. Čak je i 1901. zauzimao nešto umjerenije stajalište o njihovu statusu smatrajući da većina nedoumica u vezi s infinitezimalima proizlazi iz činjenice da oni nisu precizno definirani. Međutim, već je tada napisao da ih je Weierstraß „strogo protjerao iz matematike“ pokazavši da „uopće nisu potrebni i da se sve može postići i bez njih“, zbog čega „više nema potrebe

Stoga će Russell zaključiti da se infinitezimali „moraju smatrati nepotrebnom, pogrešnom i samoproturječnom“ te, općenito uzevši, „vrlo ograničenom i matematički posve nebitnom koncepcijom od koje su i beskonačnost i neprekidnost potpuno neovisne.“ (Russell 1903, §§314 i 324). Time je Russell antiinfinitezimalističko stajalište Cantora i Peana prenio iz matematičke polemike u filozofiju matematike, gdje će ono tijekom znatnoga dijela 20. stoljeća imati iznimno velik utjecaj. Međutim, premda izjave ove vrste na prvi pogled mogu djelovati izrazito dogmatski, kod Russella je moguće pronaći i mjesta koja sugeriraju da je ipak ostavljao otvorenom mogućnost da bi neke vrste infinitezimala mogle biti legitimne, čak i ako bi, matematički promatrano, bile beskorisne. Tako, primjerice, kaže sljedeće:

> „Vidjeli smo da se infinitezimali, iako potpuno beskorisni u matematici, ipak javljaju u određenim situacijama – primjerice, dužine ograničenih pravaca infinitezimalne su u usporedbi s površinama poligona, koje su pak infinitezimalne u usporedbi sa zapreminama poliedara. No, kao što smo vidjeli, takve istinske primjere infinitezimala (*genuine cases of infinitesimals*) matematičari uvijek tretiraju kao veličine različite vrste jer je potpuno nemoguće numerički uspoređivati, čak ni pomoću transfinitnih brojeva, površinu i dužinu ili zapreminu i površinu. Numeričko mjerenje zapravo u potpunosti ovisi o Arhimedovu aksiomu i ne može se proširiti onako kako je Cantor proširio brojeve.“ (Russell 1903, §314)
>
> „U slučaju racionalnih ili realnih brojeva, potpuno znanje koje posjedujemo o njima čini nepostojanje infinitezimala dokazivim. […] Slijedom toga, *ako bi uopće bilo moguće, u bilo kojem smislu, govoriti o infinitezimalnim brojevima, onda bi to moralo biti u nekom radikalno novom smislu*.“ (Russell 1903, §312, moj kurziv)

Ovi ulomci, među ostalim, pokazuju da je Russell, slično kao i Killing prije njega (usp. Odjeljak [3.1.1]), smatrao kako bi uvođenje infinitezimala onemogućilo mjerenje, za koje je vjerovao da bitno ovisi o Cantor-Dedekindovu i Arhimedovu aksiomu (usp. Russell 1903, §417; v. i Pt. III, Ch. 21, „Numbers as Expressing Magnitudes: Measurement“). Međutim, pionirski rezultati Abrahama Robinsona iz 1960-ih, a osobito Petera A. Loeba (1937–2024) iz 1970-ih, pokazali su da postoji i potpuno razvijena nestandardna teorija mjere, odnosno da je pojam mjere moguće dosljedno razviti i unutar nestandardnoga, Leibnizova univerzuma.[552]

---

pretpostavljati da takvo što uopće postoji“ (usp. Russell 1901: 88–90). Dvije godine poslije, u *Principles*, Russell će zaključiti: „Čini se da je taj pojam [sc. infinitezimala] postao matematički beskoristan.“ (Russell 1903, §309)

[552] Robinson je već u petom poglavlju *Non-Standard Analysis* (1966) pokazao kako je moguće definirati Lebesgueovu mjeru u terminima NSA. Loeb je potom u radu „Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory“ (Loeb 1975) uveo danas poznatu *Loebovu mjeru*, koja predstavlja jedan od najmoćnijih alata u nestandardnoj analizi, s brojnim primjenama u teoriji vjerojatnosti, matematičkoj fizici i matematičkoj ekonomiji, aditivnoj teoriji brojeva i kombinatorici. Usp. Rašković 1983, Cutland 1983 i Keisler 1994, §7. Mjere se mogu definirati i na različitim nearhimedovskim poljima, odnosno na nearhimedovskim proširenjima polja $\mathbb{R}$ realnih brojeva. Primjerice, Shamseddine i Berz pokazali su kako je moguće definirati Lebesgueovu mjeru na Levi-Civitinu polju $\mathcal{R}$ (Shamseddine & Berz 2003). Talijanski matematičari Vieri Benci, Mauro Di Nasso i Emanuele Bottazzi također su mnogo radili na nestandardnim mjerama; usp. Benci, Bottazzi & Di Nasso 2014 i Bottazzi 2022. V. također i knjigu *How to Measure the Infinite* (Benci & Di Nasso 2019).

Neovisno o tomu, Ehrlich s pravom primjećuje da je upravo Russellov golemi autoritet pridonio tomu da je tijekom većega dijela 20. stoljeća među povjesničarima i filozofima matematike, ali i među samim matematičarima i logičarima, prevladalo gledište prema kojem su infinitezimali u 19. stoljeću bili „jednom zauvijek eliminirani iz matematike", dok je tek Robinsonova nestandardna analiza „učinila smislenim pojam infinitezimala" (Ehrlich 2006: 2). Već sam naglasio da je takvo pojednostavljeno gledanje na povijesni razvoj nearhimedovske matematike rezultiralo nizom povijesnih i povijesno-filozofskih studija koje redovito pate od istoga nedostatka, *lakunarnosti*, budući da u pravilu preskaču formativno razdoblje od 1870-ih godina do Robinsonovih rezultata iz 1960-ih, čime se temeljni doprinosi matematičara s kraja 19. stoljeća gotovo posve gube iz vida. Time se zanemaruje činjenica da su infinitezimali već u razdoblju *fin-de-siècle* bili rehabilitirani na konzistentan, sofisticiran i matematički rigorozan način u okviru različitih nearhimedovskih geometrijskih i algebarskih sustava veličina, ponajprije zahvaljujući Veroneseu. Kao što su istaknuli tvorci Ω-računa Schmieden i Laugwitz (usp. Odjeljak [2.6.2]), upravo je Veronese načinio prve odlučujuće proboje koji su dali snažan poticaj kasnijemu razvoju *moderne teorije infinitezimala* (usp. i Laugwitz 1975: 297ff.; Laugwitz 2000: 185–186; Laugwitz 2002: 115).

Još jedan ilustrativan primjer percepcije (i recepcije) infinitezimalne matematike predstavlja Abraham (Adolf) Fraenkel (1891–1965), danas najpoznatiji po pionirskim doprinosima aksiomatskom zasnivanju teorije skupova. Standardna Zermelo-Fraenkelova (ZF) teorija skupova nosi upravo njegovo ime. Fraenkel je ovom kontekstu osobito zanimljiv iz najmanje triju razloga. Bio je bio *učenik* Kurta Hensela (1861–1941), tvorca nearhimedovskog polja $\mathbb{Q}_p$, odnosno takozvanih p-adskih brojeva.[553] Bio je i *učitelj* Abrahama Robinsona, tvorca nearhimedovskog polja $^*\mathbb{R}$ hiperrealnih brojeva i nestandardne analize. Povrh toga, Fraenkel je bio i veliki popularizator cantorovske teorije skupova. Njegova knjiga *Einleitung in die Mengenlehre* (1919), zamišljena kao „uvođenje u kraljevstvo beskonačnih veličina", bila je ponajprije namijenjena matematičkoj i filozofskoj publici (*mathematischer und philosophischer Kreise*). Njezin je cilj bio pružiti svojevrsno opravdanje ili utemeljenje „beskonačno velikoga", za koje je Fraenkel istaknuo da je dotad, „kao i beskonačno malo, u najboljem slučaju moglo, manje ili više precizno definirano, nekako održavati svoju bijednu egzistenciju u filozofiji" (*in der Philosophie eine kümmerliche Existenz fristen*), dok su i jedno i drugo zapravo „bili protjerani iz matematike" (*aus der Mathematik verwiesen*) (Fraenkel 1919, v. *Vorwort* i §1). I u *Einleitung* i u kasnijoj, vrlo popularnoj i često pretiskivanoj knjizi *Abstract Set Theory* (prvo izdanje 1953.; četvrto, dopunjeno i prošireno izdanje 1976.), zamišljenoj kao udžbenik za studente matematike i filozofije, Fraenkel ističe da je Cantor „osigurao pojmu beskonačno velikoga građansko pravo u kraljevstvu matematike" (*dem Begriff des Unendlichgroßen das Bürgerrecht im mathematischen Königreich zu verschaffen*) i priznao mu „legitimitet" (*Rechtmäßigkeit*) koji ni po čemu nije manji od onoga koji pripada ostalim matematičkim veličinama (Fraenkel 1919: 1). U četvrtom izdanju *Abstract Set Theory* istu misao sažima riječima da je „prema mišljenju većine matematičara 20. stoljeća [Cantor] uspio

[553] V. Henselove klasične radove „Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 6, 1897, str. 83–88, te „Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen", Mathematische Zeitschrift, Bd. 2, 1918, str. 433–452.

u zadaći pružanja legitimiteta beskonačno velikim veličinama.“ (Fraenkel 1976: 1). Fraenkel se u *Abstract Set Theory* ipak ukratko osvrnuo i na „problem infinitezimala“ te na njihov odnos prema Cantorovim transfinitnim brojevima. Zanimljivo je da je pritom u fusnoti čitateljima preporučio da taj dio knjige jednostavno preskoče jer nije važan za kasniji izloženi sadržaj (usp. Fraenkel 1976, §7, ¶7, str. 120, nap. 4). Tako piše sljedeće:

> „Ovo je zgodna prilika da se osvrnemo na pitanje koje se povremeno javljalo u matematičkoj i filozofskoj literaturi, naime, je li, usporedno s beskonačno velikim veličinama predstavljenima [Cantorovim] transfinitnim ordinalima, moguće i korisno (*possible and useful*) uvesti također i beskonačno male veličine te kakve bi mogle biti njihove moguće primjene. […]
>
> Cantor je u svom pothvatu ‘proširenja ili produženja niza realnih cijelih brojeva *in infinitum*’ […] odbio razmatrati beskonačno male veličine. […] Suprotstavljajući se tom [Cantorovu] stajalištu, pojedine škole filozofa […], a poslije, sporadično, i pojedini matematičari, predlagali su nastavak neuspjelih pokušaja brojnih matematičara 17. i 18. stoljeća da račun zasnuju na beskonačno malim veličinama. […]
>
> **Cantor je takva gledišta u potpunosti odbacio** [na ovome mjestu Fraenkel referira na Cantorov „dokaz“ iz *Mitteilungen* iz 1887. – prim. S. P.], **kao**, **uostalom i čitav matematički svijet**. **Razlog takvoj jednodušnosti nije bio dogmatizam**, koji je ionako rijetko obilježje matematike, a [čak i kada se eventualno pojavi], gotovo uvijek i u pravilu biva odbačen. **Nitko nije gorljivije od samoga Cantora zastupao stajalište da je sloboda mišljenja bit matematike te da su predrasude** [**u matematici**] **kratkoga vijeka**. [**Poanta Cantorova**] **argumenta nije čak bila ni u tome da je prihvaćanje infinitezimala samoproturječno, nego da je jednostavno *jalovo* i *beskorisno*** (*just sterile and useless*). […] **Ta je beskorisnost** [**infinitezimala**] **u izrazitoj suprotnosti s uspjehom transfinitnih brojeva**, kako u pogledu njihovih primjena, tako i u pogledu njihove zadaće uopćavanja konačnoga brojanja i uređaja.“ (Fraenkel 1976, §7, ¶7, str. 120–122, Fraenkelov izvorni kurziv, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Imajući u vidu analizu Cantorova „dokaza“ nemogućnosti infinitezimala koju sam iznio u Odjeljku [3.1], kao i raspravu o Cantorovu antiinfinitezimalizmu (u odjeljcima [3.1] i [3.1.1]), lako je uočiti da Fraenkelov prikaz nije samo znatno *romantiziran*[554] nego je, što je još važnije, u bitnim aspektima posve nespojiv s neospornim povijesnim činjenicama i dostupnim tekstualnim dokazima izloženima u prethodnim odjeljcima. Ukratko, njegova interpretacija ostavlja *pogrešan i zavodljiv dojam*, tim više što je iznesena u popularnom udžbeniku kojim su se desetljećima služile generacije studenata matematike i filozofije. Na sličan je problem upozorio i Fisher u svojoj studiji o du Bois-Reymondu, istaknuvši da se „unatoč Fraenkelovu autoritetu kao tumača Cantora čini kako njegova prosudba o Cantoru u ovome slučaju nije precizna.“ (usp. Fisher 1981: 122) Vidjeli smo da je Cantorov odnos prema infinitezimalima i njihovim zagovornicima doista bio izrazito dogmatičan te da je

[554] Slične, povijesno nedovoljno utemeljene i donekle idealizirane ocjene mogu se pronaći i u Fraenkelovim prilozima Cantorovoj biografiji. V. njegov poznati rad „Georg Cantor“, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 39, 1930, str. 189–266, kao i „Das Leben Georg Cantors“ u Cantorovim *Gesammelte Abhandlungen* (Cantor 1932: 452–483).

počivao na nizu pretpostavki, odnosno uvjerenja koja su bila više metafizičke i religijske nego logičko-matematičke naravi. Neovisno o tomu kako ocijenimo Fraenkelovu interpretaciju Cantorova antiinfinitezimalizma, jednako je zanimljivo promotriti što nam prethodno citirani ulomci otkrivaju o Fraenkelovu vlastitom odnosu prema infinitezimalima.

Čini se da Fraenkel u bitnome ponavlja ono što je Russell desetljećima ranije naglašavao *ad nauseam*, naime da glavni razlog za odbacivanje infinitezimala nije toliko logičke koliko prije svega instrumentalne ili, kako je to formulirao Fisher (*op. cit.*, *ad loc.*), *etičke* ili *pragmatičke naravi*, budući da se prije svega tiče pitanja „moguće primjene" infinitezimala, odnosno njihove *uporabne vrijednosti*. Čak i ako nisu proturječni, infinitezimali su za Fraenkela, neovisno o tome, u svakom slučaju neuporabljivi, odnosno „jalovi i beskorisni". Posebno je znakovito da Fraenkel nije izmijenio ovaj dio *Abstract Set Theory* ni u četvrtom izdanju iz 1976. godine, objavljenom punih petnaest godina nakon Robinsonova zasnivanja nestandardne analize. Doduše, dodao je sljedeću napomenu:

> „Nedavno je jedna neočekivana primjena beskonačno malih veličina, osobito jedna metoda zasnivanja analize (računa) na infinitezimalima, postala moguća i važna zahvaljujući nearhimedovskom, nestandardnom, pravom proširenju polja realnih brojeva. […] Taj razvoj, nazvan 'nestandardna analiza', dugujemo Abrahamu Robinsonu. […] Ništa od onoga što je rečeno u ¶8 o nearhimedovskim domenama nije opovrgnuto tim razvojem." (Fraenkel 1976: 125, v. i nap. 1)

A ono što je Fraenkel rekao u ¶8 otkriva da je dijelio Cantorov platonizam u pogledu ontološkoga statusa matematičkih objekata:

> „Općenito uzevši, razlika između transfinitnih domena teorije skupova i nearhimedovskih domena donekle je povezana s Cantorovim razlikovanjem između prijelazne i samo imanentne realnosti pojmova. Ta razlika objašnjava zašto su definicije poretka i operacija za [transfinitne] kardinale i ordinale prirodne i kvaziobvezujuće (*natural and quasi-compulsory*), za razliku od formalnijih i proizvoljnijih definicija u općim nearhimedovskim domenama. Čak i kada se infinitezimali pravilno uvedu, oni pripadaju ovoj drugoj kategoriji." (Fraenkel 1976: 123)

Neovisno o ontološkim preferencijama, ovaj ulomak pokazuje da je Fraenkel, čak i unatoč nestandardnoj analizi, smatrao kako operiranje infinitezimalima neminovno mora biti proizvoljno i neprirodno, odnosno tek formalno, zbog čega je vjerojatno držao da bi infinitezimale u praktičnom smislu trebalo izbjegavati. Istodobno valja primijetiti da Fraenkel nije posve zanemario ranije nearhimedovske teorije. Naprotiv, eksplicitno spominje Veronesea i Levi-Civitu:

> „Nesklad između beskonačno velikih i beskonačno malih veličina ne bi trebalo preuveličavati do te mjere da to znači kako ove druge ne mogu postojati. Primjerice, pojedini duboki i impresivni, premda ne uvijek i neproturječni, osnovi geometrije pruženi su korištenjem beskonačno malih dužina različitih redova [infinitezimalnosti], uz standardne točke i konačne dužine (osobito u Veronese 1891 i Levi-Civita 1893)." (Fraenkel 1976: 122)

Ovaj se ulomak može tumačiti dvojako: s jedne strane kao pohvala doprinosima koje su Veronese i Levi-Civita dali zasnivanju nearhimedovske geometrije, a s druge strane i kao

caveat da ti rezultati možda ipak nisu bili posve konzistentni[555] (što je, naravno, isključeno u svjetlu rekonstrukcije i tumačenja iz odjeljaka [2.6], [2.6.1] i [2.6.2]). Valja istaknuti da se pitanje o „uporabnoj vrijednosti" aktualnih, odnosno statički shvaćenih infinitezimala, čak i pod pretpostavkom da ih je moguće definirati na neproturječan način, pojavilo mnogo prije Fraenkela, već početkom 1890-ih. Naime, zaključivši da aktualni infinitezimali postoje u matematičkom smislu (*l'infinitesimo attuale esiste*) utoliko što ne proturječe drugim svojstvima standardnih veličina, Bettazzi je u prvom prilogu raspravi o ontološkom statusu infinitezimala, vođenoj na stranicama *Rivista di Matematica*, postavio pitanje „kakav bi uopće značaj mogli imati takvi infinitezimali u matematici" (Bettazzi 1891: 176). Podsjetimo (usp. nap. 281), već je Veronese u predgovoru *Fondamenti* jasno razdvajao čisto teorijske ili logičke od praktičnih aspekata, odnosno mogućih primjena matematičkih hipoteza, naglasivši da matematička egzistencija objekata poput infinitezimala ni u kojem smislu ne ovisi o njihovoj mogućoj instrumentalnoj ili uporabnoj vrijednosti niti o plodotvornosti (*fecondità*):

> „Čista matematika odbacuje samo ono što je lažno i stoga, da bi se pobila neka matematička hipoteza, mora se dokazati njezina lažnost, ali taj dokaz mora biti logičko-matematički u strogom smislu te riječi, a ne filozofski; da bi se dokazala njezina lažnost, mora se dokazati da ona nužno vodi u proturječje. […] Naravno, moguće je i da plodotvorne hipoteze dovedu do proturječja, kao što se to dogodilo u diferencijalnom računu." (Veronese 1891: xiii–xiv)

Kada je riječ o aktualnim infinitezimalima, Veronese je istaknuo sljedeće:

> „Podržavam aktualne infinitezimale jer sam dokazao ne samo njihovu mogućnost [sc. neproturječnost, odnosno matematičku egzistenciju] nego i njihovu korisnost u području geometrije; zapravo, koliko god jedna takva teorija [nearhimedovskih kontinuuma] bila zanimljiva sama po sebi, možda je ovdje ne bih ni razmatrao da nije bilo geometrijskih primjena koje sam uspio ostvariti. Čini mi se da bi se i čisto analitički pristup geometriji neovisnoj o Arhimedovu aksiomu trebao pokazati zanimljivim također i za [matematičku] analizu." (Veronese 1891: xxvii)

S obzirom na ekspanziju istraživanja u području nearhimedovskih uređenih geometrijskih i algebarskih sustava, potaknutu Veroneseovim pionirskim rezultatima iz *Fondamenti* 20. stoljeća, moglo bi se reći da je Veronese bio u pravu te da je gotovo proročki naglašavao i praktični aspekt, odnosno potencijal za moguće primjene teorija infinitezimala u različitim područjima matematike. Međutim, krajem 19. i početkom 20. stoljeća bilo je i drugih matematičara koji su zastupali Russell-Fraenkelovo stajalište prema kojem su infinitezimali matematički malo ili nimalo uporabni. Tako je, primjerice, Stolz, odgovarajući na Cantorov „dokaz", eksplicitno naglasio da je i sam daleko od toga da nearhimedovskim sustavima veličina pridaje bilo kakvu drugu vrijednost osim *čisto formalne* ili *teorijske*,[556] dodajući

---

[555] Usp. i ocjenu Jeremyja Graya, koji je mnogo kasnije primijetio: „činjenica da ova [sc. Veroneseova] nearhimedovska geometrija nije bila opipljivo apsurdna […] možda je pružila osnovu za njezino kasnije proučavanje." (Gray 2008: 340)

[556] „Ich bin weit davon entfernt, dem soeben geschilderten Grössensysteme *einen andern als formalen Werth beizulegen*." (Stolz 1888: 603, moj kurziv). Štoviše, Stolz je *ad loc.* istaknuo da su infinitezimalni momenti koje je uveo *samo formalno*, ali ne i stvarno, odnosno aktualno beskonačno mali (*nur formal unendlich klein*), odnosno „samo na papiru i za potrebe računanja" (*auf dem Papier, für die Rechnung*), za razliku od apsolutnih, odnosno standardnih brojeva (*absoluten Zahlen*), koji su posve određeni na drukčiji način (*ja anders definite sind*).

da oni znatno „zaostaju za drugim, slično konstruiranim sustavima veličina u pogledu praktičnih primjena“ (*bleibt es hinsichtlich seiner praktischen Verwendbarkeit hinter anderen, auf ähnliche Weise geschaffenen Größensystemen zurück*) (Stolz 1888: 603). Slično je stajalište zastupao i Bettazzi, koji je smatrao da infinitezimali zasigurno posjeduju „apstraktni značaj“ (*importanza astratta*) te da će možda jednoga dana znatno pridonijeti „tretmanu računa [sc. analize] drukčijem od uobičajenoga“ (Bettazzi 1891: 176). I Veroneseov nekadašnji profesor Felix Klein u trećem tomu svoje *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* (prvo izdanje 1902.), posvećenom *Präzisions- und Approximationsmathematik*, postavlja pitanje o *svrhovitosti* (*Zweckmäßigkeit*) razvijanja jednoga takvog sustava geometrije kakav je Veroneseov u *Fondamenti*. Pritom ističe da je Veronese odveo matematiku u smjeru idealizacije (*Idealisierung*) dalje nego što je i on sâm (sc. Klein) može razumjeti i slijediti (Klein 1968: 156). Govoreći o Veroneseovim brojevima, Klein postavlja pitanje:

> „Je li moguće dosljedno operirati takvim izrazima bez zapadanja u proturječje (*widerspruchsfrei operieren*)? To je doista moguće, tako da se **s čisto apstraktnoga matematičkog stajališta** (*vom abstrakt mathematischen Standpunkt aus*) **Veroneseu nema što prigovoriti** (*nichts gegen Veronese einzuwenden ist*). **No možemo dalje pitati: s obzirom na to da je čitava stvar matematički prihvatljiva (*mathematisch zulässig*), je li samim tim i svrhovito baviti se njome?** Time dolazimo do općenitijega pitanja: koja su pitanja ili problemi uopće vrijedni proučavanja u matematici (*welche Fragestellungen sind in der Mathematik überhaupt zweckmäßig*)?
>
> Naravno, teoretski mogu postaviti bilo koji problem ili pitanje i nitko mi ne može zabraniti da se njime bavim. Ali, značajni problemi koje je svrhovito proučavati samo su oni koji su povezani s drugim problemima na kojima se u svakom slučaju mora raditi i na kojima se također oduvijek radilo zbog same prirode stvari. Želim ukazati na činjenicu da se matematika suočava […] s dovoljno neriješenih problema, zbog čega se pitam bismo li velik dio svoje očito prilično ograničene radne energije trebali usmjeriti na nove i u početku naizgled ezoterične stvari. […] Pod uvjetom da postoji neka duboka epistemološka potreba (*ein tiefes erkenntnistheoretisches Bedürfnis*) koja će biti zadovoljena proučavanjem novoga problema, opravdano je proučavati ga; ali, ako se to čini samo zato da bi se učinilo nešto novo, tada proširenje nije poželjno (*die Erweiterung nicht wünschenswert*).
>
> Htio bih citirati Cantora, koji je svojedobno rekao da *bit znanosti leži u njezinoj slobodi* (*das Wesen der Wissenschaft liegt in ihrer Freiheit*), odnosno da se u matematici možemo baviti svime što želimo, sve dok iz premisa izvodimo samo ispravne zaključke (*nur richtige Folgerungen zieht*). Premda teoretski prihvaćam Cantorovo stajalište, dodajem mu jedno praktično ograničenje koje mi se čini od bitne važnosti, naime da *svatko tko raspolaže slobodom također ima i odgovornost* (*daß jeder, der über Freiheit verfügt, auch eine Verantwortung trägt*). Stoga ne želim zagovarati apsolutnu proizvoljnost (*absoluten Willkür*) u oblikovanju matematičkih ideja (*mathematischen Ideenbildung*), nego samo želim svima sugerirati da uvijek imaju na umu cjelinu znanosti (*das Ganze der Wissenschaft im Auge halten soll*).“ (Klein 1968: 156–157, Kleinov izvorni kurziv, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Čini se da je Klein smatrao kako je, s obzirom na visok stupanj apstraktnosti Veroneseovih i, općenito uzevši, modernih *fin-de-siècle* istraživanja nearhimedovskih sustava, opravdano postaviti pitanje je li nešto takvo u kontekstu cjeline matematičkih istraživanja

uopće svrhovito. Ako prizom uzmemo u obzir Kleinovo ograničenje Cantorova određenja biti matematike, pitanje je i da li je nešto takvo uopće odgovorno u svjetlu velikih otvorenih problema (u smislu Hilbertovih „Mathematische Probleme" iz 1900. godine) i aktualnih istraživačkih programa ili strategija koje definiraju okvire unutar kojih bi se trebala odvijati standardna matematička praksa, kojom su pak određene osi duž kojih bi se matematika trebala razvijati i u budućnosti.[557] Uproščeno, Klein se pitao treba li matematička zajednica svoju *nužno ograničenu istraživačku energiju* usmjeravati prema novim i izrazito apstraktnim „ezoteričnim" teorijama ili prije prema istraživačkim programima koji određuju glavne smjerove razvoja matematike. Upravo je zbog takvih opaski, među ostalim, Mehrtens svrstao Kleina među kontramoderniste. Međutim, da se Veronese držao isključivo tada poznatih problema i već ustaljenih metoda, najvjerojatnije ne bi došao ni do važnih rezultata iz projektivne geometrije hiperprostora koji su proizašli iz njegove suradnje s Kleinom, a kamoli do potpuno nove geometrije i na njoj zasnovane teorije beskonačnih brojeva. Doista, kao što je primijetio Laugwitz, Veronese je samo u *Fondamenti* unio *toliko mnogo inovacija* da je bilo neizbježno da se pojave i kontroverze (Laugwitz 2002: 115).

Zanimljivo je da je čak i Peano s vremenom, po svoj prilici, ublažio svoje početno nepomirljivo kantorovsko stajalište o infinitezimalima. Naime, u radovima „Sugli ordini degli infiniti" (1910) i „Derivata e differenziale" (1913), Peano je od tvrdnje da su infinitezimali proturječni dolazi do zaključka da se, slično Thomaeu i du Bois-Reymondu, i u teoriji funkcija mogu pronaći novi primjeri infinitezimala.[558] Stoga zaključuje:

> **Infinitezimalni entiteti** (*enti infinitesimi*), u smislu u kojem pripadaju nekoj kategoriji entiteta, uključujući tu i uobičajene pozitivne veličine nad kojima su definirane uobičajene aritmetičke operacije i relacije, i od kojih je svaki veći od nule, a manji od svakoga pozitivnog broja, **sami po sebi ne predstavljaju ništa apsurdno** (*non presentano alcun assurdo in se stessi*). Proučavali su ih brojni autori; primjerice, i ja u bilješci „Sugli ordini degli infiniti" u *R. Accademia dei Lincei*, 16. lipnja 1910. **Dobro izraženi varijabilni** [sc. potencijalni ili dinamički] **infinitezimali u biti se svode na konstantne** [sc. aktualne ili statičke] **infinitezimale**. **Ali, ti infinitezimali nisu potrebni** (*questi infinitesimi non sono necessarii*); **štoviše, beskorisni su** (*anzi inutili*)." (Peano 1912, citirano prema Peanovim *Opere scelte*, Vol. I, Peano 1957: 388, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Dakle, i Peano je naposlijetku zauzeo Russell-Fraenkelovo stajalište o beskorisnosti infinitezimala. Iz takva je stajališta, klajnovski rečeno, prirodno slijedio i zaključak da daljnje proučavanje te razvijanje nearhimedovske matematike nije osobito svrhovito. U istome je

---

[557] V. znamenito Poincaréovo predavanje „L'avenir des mathématiques" s četvrtoga ICM-a održanog u Rimu 1908. godine (Poincaré 1909). Poincaré je u njemu inzistirao na Machovu principu *ekonomičnosti mišljenja* te na njegovoj dosljednoj primjeni i u matematici. Smatrao ga je, zajedno s estetskim *principom elegancije* i Weierstraßovim *principom egzaktnosti*, jednim od osnovnih principa koji su usmjeravali napredak matematike u prošlosti i koji bi, prema njegovu mišljenju, trebali određivati i njezin budući razvoj.

[558] „Si presentano così nuove categorie di enti infiniti e infinitesimi attuali, o costanti. E si vede che la differenza fra gl'infiniti attuali o costanti, e quelli potenziali o variabili, questione che ha tanto appassionato e ancora appassiona i filosofi matematici, sia una questione di puro linguaggio. La funzione $\frac{1}{x}$, per x tendente ad infinito, è un infinitesimo variabile; il suo fine è un infinitesimo costante." (Peano 1910, citirano prema Peanovim *Opere scelte*, Vol. I, Peano 1957: 362)

duhu i Vivanti u studiji *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione in matematica* ustvrdio da je pitanje o prirodi infinitezimala prestalo imati bilo kakav matematički značaj (*la questione della natura dell'infinitesimo ha cessato di avere piu alcun interesse matematico*) (Vivanti 1894: 11). Složio bih se s Fisherovom ocjenom da je među matematičarima i filozofima matematike vrlo vjerojatno bilo mnogo nedokumentiranih slučajeva prihvaćanja Cantorovih antiinfinitezimalističkih stajališta (Fisher 1981: 121). Time je vivantijevsko stajalište već početkom 20. stoljeća postupno preraslo u svojevrsni *communis opinio* ne samo među matematičarima nego i među povjesničarima i filozofima matematike. Koliko je takav način razmišljanja tada već bio raširen dobro pokazuje i rasprava *Das Infinite in der Mathematik* Gerharda Hessenberga (1874–1925) iz 1904. godine, u kojoj autor piše:

> „Načelno gledano, mora se primijetiti da je bez ikakva logičkog proturječja zamisliva aritmetika u kojoj je neki broj a, zajedno sa svim svojim umnošcima, manji od nekoga drugog broja b i svih njegovih alikvotnih dijelova. Međutim, u jednoj takvoj aritmetici obični su brojevi sadržani kao elementi, a sve što se tome [sc. standardnim konačnim brojevima – prim. S. P.] dodaje jest balast koji ne rješava nijedan problem (*ein Ballast, der kein Problem löst*), ne pojednostavnjuje nijedan dokaz, nego samo iznova pokreće sve teškoće koje su danas, srećom, otklonjene u uobičajenoj [sc. standardnoj] aritmetici." (Hessenberg 1904: 189, usp. i Schubring 2005: 615)[559]

Moglo bi se navesti još mnogo sličnih primjera, ali poanta je sljedeća. Djelomično pod utjecajem matematičko-filozofskog programa aritmetizacije (degeometrizacije) i rigoroznoga zasnivanja analize (usp. Odjeljak [1.3]), a djelomice zahvaljujući središnjoj ulozi koju je Cantorova teorija skupova odigrala u modernizacijskoj transformaciji matematike krajem 1890-ih (i to u nizu disciplina, usp. Odjeljak [2.5]), šira matematička zajednica početkom 20. stoljeća u nearhimedovskoj matematici naprosto nije prepoznala *obećavajući istraživački program* koji bi mogao postati dijelom matematičkoga mainstreama. To je vrijedilo unatoč dubokim i vrlo značajnim rezultatima pionira poput Stolza, Bettazzija i, osobito, Veronesea ili Levi-Civite. Kada se tomu pridoda uvjerenje da je jedini pravi kriterij, odnosno glavni test potrebe za infinitezimalima njihova primjenjivost u analizi[560], kao i silina i oštrina

---

[559] Hessenberg u nastavku dodaje da pretpostavka o egzistenciji „nemjerljivih veličina" (*unmessbaren Größen*), odnosno infinitezimala, „u području geometrije i teorije gibanja [sc. kinematike] proturječi samom izvoru spoznaje (*Erkenntnisquelle*) [u tim dvjema znanostima]: čistoj intuiciji (*reine Anschauung*)" te, štoviše, da pretpostavka beskonačne djeljivosti prostora i vremena isključuje infinitezimale. Kao što sam prethodno pokazao, Veronese je, *pace* Hessenbergu, zastupao upravo suprotno stajalište. Smatrao je da je, kao što je s geometrijskom intuicijom kompatibilno to da Playfairov aksiom paralelnosti ne mora univerzalno vrijediti – što su nedvojbeno pokazali Beltrami, Helmholtz i Poincaré svojim modelima neeuklidske vizualizacije – tako s geometrijskom intuicijom kompatibilno i to da kontinuum ne mora biti arhimedovski. Drugim riječima, pretpostavka o egzistenciji infinitezimala *nije protuintuitivna* (usp. i Ehrlich 2021: 507).

[560] Zanimljivo je da je taj test prvi izrijekom formulirao Fraenkel u drugom izdanju knjige *Einleitung in die Mengenlehre* (1928). Robinson je odgovarajući odlomak reproducirao u *Non-Standard Analysis*::

> „*Bei dieser Probe hat aber das Unendlichkleine restlos versagt*. Die bisher in Betracht gezogenen und teilweise sorgfältig begründeten Arten unendlichkleiner Grössen haben sich zur Bewältigung auch nur der einfachsten und grundlegendsten Probleme der Infinitesimalrechnung (etwa zum Beweis des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung oder zur Definition des bestimmten Integrals) als völlig unbrauchbar erwiesen […] es besteht auch kein Grund zu der Erwartung, dass sich hierin künftig etwas ändern werde. Gewiss wäre es an sich denkbar (wenn auch aus guten Gründen äusserst unwahrscheinlich und jedenfalls beim heutigen Stand der Wissenschaft in ungreifbarer Ferne liegend), dass ein zweiter Cantor dereinst eine

otpora prema njihovim primjenama u drugim područjima matematike, poput geometrije ili algebre, koji je dolazio iz kantorovskog tabora, ne iznenađuje što su se sve donedavno i povjesničari moderne nearhimedovske matematike gotovo isključivo bavili Robinsonovom nestandardnom analizom. Smatralo se da je tek Robinson pružio „prvo uspješno rigorozno utemeljenje infinitezimala" (sec. Dauben 1995: xiv), odnosno „rigoroznu teoriju beskonačnih i infinitezimalnih brojeva" koja je učinila „nužnom reevaluaciju starog protivljenja infinitezimalama među matematičarima" (sec. Dauben 1992: 113–114). Međutim, upravo je uvjerenje da su tek nestandardni modeli analize učinili infinitezimale legitimnim objektima matematičkoga proučavanja dovelo, kao što sam pokazao u Odjeljku [2.1], do druge i, historiografski promatrano, jednako problematične krajnosti. Naime, čitav je niz starijih teorija infinitezimala sada na silu naknadno „racionalno rekonstruiran" posredstvom različitih robinsonovskih, odnosno NSA-motiviranih tumačenja. Čak su i vrlo ugledni suvremeni povjesničari matematike poput Josepha Daubena u novije vrijeme sugerirali da bi se jedan takav u biti anakronistički pristup mogao, barem u pojedinim slučajevima, opravdati kao historiografski legitiman: „ovdje je stvar jednostavna – ništa u korištenju nestandardne analize za istraživanje učinkovitosti ranijih pozivanja na infinitezimale nije suprotno temeljnim intuicijama tih prethodnika." (Dauben 2021: 314; v. i str. 327, kao i §11.4, str. 348ff.)[561]

> einwandfreie arithmetische Begründung neuer unendlichkleiner Zahlen gäbe, die sich als mathematisch brauchbar erweisen und ihrerseits vielleicht einen einfachen Zugang zur Infinitesimalrechnung eröffnen könnten. **Solange das aber nicht der Fall ist, wird man weder die (in vieler Hinsicht interessanten) Veroneseschen noch andere unendlichkleine Zahlen in Parallele zu den Cantorschen setzen dürfen, sondern sich auf den Standpunkt stellen müssen, dass von der mathematischen und damit logischen Existenz des Unendlichkleinen in einem gleichen oder ähnlichen Sinn wie beim Unendlichgrossen in keiner Weise gesprochen werden kann**." (citirano prema Robinson 1966: 279, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Kao što se vidi, Fraenkel je smatrao da se novi, nekantorovski shvaćeni beskonačni i beskonačno mali brojevi ne mogu smatrati matematički uporabljivima (*als mathematisch brauchbar*) sve dok im se ne pruži „čvrsta aritmetička osnova". Budući da su infinitezimali, prema njegovu mišljenju, na tom testu „potpuno podbacili", između Veroneseovih i drugih infinitezimalnih brojeva, ma koliko oni bili zanimljivi, i Cantorovih transfinitnih brojeva nije se mogla uspostaviti nikakva stvarna analogija. Stoga je zaključio da se „o matematičkom i logičkom postojanju beskonačno maloga ne može govoriti u istom, pa čak ni u sličnom smislu kao o postojanju beskonačno velikoga". Drugim riječima, Fraenkel je beskonačne i infinitezimalne brojeve nekantorovskoga tipa smatrao *drugorazrednim matematičkim objektima*. Usp. i gore navedena mjesta iz Fraenkelove *Abstract Set Theory*.

[561] Premda se na temelju toga ulomka može steći dojam da je Dauben spreman prihvatiti robinsonovska tumačenja ne samo *fin-de-siècle* nego i starije, sedamnaestostoljetne i osamnaestostoljetne nearhimedovske matematike, sljedeći ulomak iz njegove analize anakronizama u povijesti matematike pokazuje da je njegovo stajalište ipak znatno nijansiranije te ga stoga vrijedi navesti *in extenso*:

> „Možemo zaključiti da su neke uporabe anakronizama samjerljive (*commensurable*) s prošlim matematičkim praksama ili načinima razmišljanja. […] S druge strane, postoje i uporabe anakronizma koje su očito nesamjerljive (*incommensurable*) s načinom matematičkog razmišljanja iz prošlosti. […] Ako je ono čemu zapravo težimo razumijevanje namjera i onoga što su matematičari iz prošlosti uspjeli postići posredstvom njima dostupnih resursa, anakronističke rekonstrukcije ili objašnjenja matematike često će nas odvesti u pogrešnom smjeru. Anakrona ideja iz sadašnjosti ponekad može pomoći rasvijetliti i razjasniti prošlost – ali, ako nisu pažljivo odabrani i vješto iskorišteni, anakronizmi u matematici češće su nego ne *nametljive zapreke* (*intrusive spoilers*) koje nas sprečavaju da prepoznamo, u pravilu krivudave,

Takva stajališta nisu ostala ograničena na prvu polovicu 20. stoljeća. Naprotiv, čak i na prijelazu iz 20. u 21. stoljeće među filozofima matematike možemo pronaći rasprave koje u određenoj mjeri odražavaju vivantijevski skepticizam prema perspektivama i istraživačkom potencijalu nearhimedovske matematike. Dobar primjer predstavlja panel-rasprava na godišnjem skupu Asocijacije za simboličku logiku (ASL) iz 2000. godine na temu „Does mathematics need new axioms?". U raspravi su sudjelovali filozofi matematike i matematičari Solomon Feferman, Harvey M. Friedman, Penelope Maddy i John R. Steel, a njihovi su prilozi poslije objavljeni u *The Bulletin of Symbolic Logic* (v. Feferman *et al.* 2000). Osobito je zanimljivo da je Feferman u polemici s Maddy zastupao stajališta koja u velikoj mjeri podsjećaju na Kleinova razmišljanja o potrebi određene metodološke suzdržanosti pri usmjeravanju matematičkih istraživanja, pritom izrijekom spominjući upravo infinitezimale (usp. Feferman *et al.* 2000: 409–410).[562] U odgovoru na Fefermanov prilog Maddy, koja mu je prethodno prigovorila da zagovara svojevrsno ograničavanje matematičke slobode, pozivajući se pritom na Cantorovu poznatu tvrdnju da bit matematike leži u njezinoj slobodi, ističe sljedeće:

> „Naravno da je istina kako će se naša racionalna procjena o tome koji su matematički principi i metode najbolji mijenjati kako budemo stjecali nova saznanja: *sada imamo manje razloga prihvatiti infinitezimale nego što smo ih imali prije Cauchyja i Weierstraßa*." (Feferman *et al.* 2000: 420, moj kurziv)

Sve to, kao i primjeri koje sam prethodno izložio i analizirao u ovom odjeljku, potvrđuje da je du Bois-Reymond bio u pravu kada je u svojoj *Allgemeine Functionentheorie* zapisao kako „vjerovanje u beskonačno malo ne trijumfira bez muke" (*nicht mühelos siegt der Glauben an das Unendlichkleine*) (du Bois-Reymond 1882: 73).[563] Za kraj ovoga odjeljka navest ću jedan osobito zanimljiv ulomak iz Fisherovih razmatranja o statusu infinitezimala krajem 19. i početkom 20. stoljeća:

> „Možda će neke iznenaditi kada uvide da se matematičari ne slažu, a da se ponekad čak ni ne mogu složiti oko tako temeljnoga pitanja kao što je status infinitezimala. Cantor je odlučno tvrdio da logički neproturječni infinitezimali ne postoje. Du Bois-Reymond i Hausdorff jednako su odlučno tvrdili da postoje. Neki matematičari, poput Borela, neodlučni su po tom pitanju; neki, poput Dedekinda, suzdržani; neki, poput Thomaea, promjenjivoga [su mišljenja]; neki, poput Stolza, [imaju] deflatoran [stav]; neki, poput du Bois-Reymonda, oduševljeno su ih podupirali; neki, poput Peana, smatrali su da je [pitanje] razlike između aktualnih infinitezimala i onih dobivenih posredstvom limesa (tzv. potencijalnih infinitezimala) samo jezično pitanje; neki, poput Hausdorffa, Kleina i Fraenkela, kažu da, premda logička neproturječnost infinitezimala nije upitna, ipak ostaje vidjeti jesu li [infinitezimali] od ikakve vrijednosti. Neki matematičari kažu da su infinitezimali „korisne fikcije", „puki simboli" ili nešto slično. Isto se govorilo i za Diracovu delta funkciju,

putove koji vode prema sadašnjosti, često na posve iznenađujuće načine." (Dauben 2021: 348–349, 352)

[562] Feferman *ad loc.* kaže: „ona [sc. Maddy] zasigurno ne misli da baš bilo što prolazi (*anything goes*) u matematici."

[563] U francuskom prijevodu *Allgemeine Functionentheorie* formulacija je blago izmijenjena: „ce n'est pas sans peine que la croyance à l'infiniment petit s'impose" (du Bois-Reymond 1887: 74).

> imaginarne brojeve i (još mnogo ranije) za negativne brojeve; i to, dakako, u određenom smislu može biti točno. Ali filozofi su ti koji na vlastitu odgovornost takve izjave tretiraju kao duboke ontološke obveze, premda je vjerojatnije riječ tek o različitim načinima izbjegavanja problema (*ways of dodging the issue*). […] Neki matematičari […] možda su bili hendikepirani zato što *nisu* koristili infinitezimale […] dok su neki drugi bili hendikepirani zato što *jesu* koristili infinitezimale te su tako bili odvedeni u pogreške ili nejasnoće." (Fisher 1981: 157–158)

Smatram da prethodno provedena rekonstrukcija svih relevantnih filozofsko-matematičkih aspekata Veroneseova pothvata zasnivanja nearhimedovske geometrije jasno pokazuje da infinitezimali i, općenito uzevši, nestandardne, odnosno nearhimedovske metode *nisu bili hendikep* za samoga Veronesea.

[3.2] Poincaréova dvostruka pogreška i njezine manifestacije u suvremenoj historiografiji matematike

U prethodnim odjeljcima susreli smo se s nizom primjera koji potvrđuju ono što je Veronese u svom posljednjem prilogu nearhimedovskoj matematici, plenarnom predavanju „La geometria non-Archimedea" na Međunarodnom kongresu matematičara održanom u Rimu 1908. godine, rekao o recepciji novih matematičkih ideja, istaknuvši prije svega negativan utjecaj „protivljenja s kojim su [nove] ideje inicijalno dočekane i suočene" pri „sudaru sa starim, već duboko ukorijenjenim uvjerenjima koja su pojačana *autoritetom eminentnih matematičara*" (Veronese 1909: 204, moj kurziv). I doista, kao što sam pokazao, autoritet matematičara poput Cantora i Peana, čak i onda kada su dogmatski ustrajavali u nečemu što je bilo pogrešno (kao u slučaju navodnih „dokaza" o proturječnosti infinitezimala ili infinitezimalnih dužina), uvelike je pridonio stvaranju neutemeljenoga negativnog dojma i iskrivljene slike o stvarnom značenju i implikacijama Veroneseovih novih ideja o infinitezimalima obogaćenima kontinuumima te s njima povezanih ideja o zasnivanju nove nearhimedovske, odnosno infinitezimalne geometrije. Najveći je doprinos stvaranju takve iskrivljene slike, nažalost, pružio Henri Poincaré.

Poincaré je već krajem 19. stoljeća slovio za „univerzalnoga matematičkog genija" koji je „zapanjio svoje suvremenike neprekidnim nizom znanstvenih postignuća"[564], a u historiografiji matematike, kao i u historiografiji suvremene filozofije i znanosti, postalo je uobičajeno o Poincaréu govoriti kao o posljednjem pravom polihistoru i univerzalistu koji je dao fundamentalne doprinose gotovo svim područjima čiste i primijenjene matematike početkom 20. stoljeća.[565] Osim što se bavio matematikom, mehanikom i fizikom, Poincaré

[564] Primjerice, na skupu koji su zajednički organizirali Francuska akademija znanosti (*Académie des sciences*) i Institut Francuske (*Institut de France*) povodom smrti Sophusa Liea 1899. godine. Usp. Gray 2012: 491.

[565] S tim u vezi v., primjerice, reprezentativni tematski svezak *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré* u ediciji *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics of the AMS*, Vol. 39 (Browder 1983), kao i Dieudonnéov djelovanja skupine Bourbaki, u kojem je Poincaré istaknut kao „najznamenitiji predstavnik matematičkog univerzalizma" (Dieudonné 1982). Također v. i zbornik *The Scientific Legacy of Poincaré*, koji su 2010. godine zajednički objavili American Mathematical Society i London Mathematical Society (Charpentier *et al.* 2010).

je krajem 19. stoljeća bio i „središnja figura francuske filozofske scene“ (usp. Heinzmann & Stump 2024) te jedan od najutjecajnijih *fin-de-siècle* filozofa matematike i znanosti. Poincaréovi filozofski uvidi uvelike su bili oblikovani pod utjecajem Kantove i neokantovske filozofije.[566] U nizu radova objavljenih u *Revue de Métaphysique et de Morale* i kasnije objedinjenih u njegovim trima utjecajnim filozofskim knjigama (*La Science et l'Hypothèse*, 1902; *La Valeur de la Science*, 1905; *Science et Méthode*, 1908), Poincaré je, nalik Russellu u anglofonom svijetu, filozofskoj publici približio najnovije matematičke rezultate i istodobno ukazao na njihov filozofski značaj i implikacije, potičući na taj način zanimanje među filozofima za pitanja u vezi sa zasnivanjem matematike i znanosti, kako u Francuskoj tako i diljem Europe. O razmjerima Poincaréova filozofskog utjecaja svjedoči i manifest Bečkoga kruga, *Wissenschaftliche Weltauffassung*, u kojem se Poincaréovo stajalište ističe kao jedno od najvažnijih u kontekstu proučavanja *Grundlagen, Ziele und Methoden der Mathematik und Physik* (usp. Neurath, Hahn & Carnap 1929).[567]

Zahvaljujući svojim rezultatima, Poincaré je 1881. primljen u članstvo *Association française pour l'avancement des sciences*, a iste je godine počeo predavati na Sorboni. Ondje je 1886. postao redoviti profesor te preuzeo Katedru za teoriju vjerojatnosti i matematičku fiziku (*La Chaire de Calcul des Probabilités et Physique Mathématique*), a od 1896. i Katedru za nebesku mehaniku (*La Chaire de Mécanique Céleste*). Od 1883. do 1897. godine također je predavao i analizu na *École polytechnique*. Iste, 1886. godine izabran je za predsjednika *Société Mathématique de France*, a već 1887., na prijedlog Hermitea i Jordana, postao je član Francuske akademije znanosti kao tridesetdvogodišnjak. Zbog univerzalnosti svojega opusa bio je jedini akademik koji je bio član svih pet sekcija Odjela za matematičke znanosti (*la division des sciences mathématiques*) unutar Akademije: za geometriju, mehaniku, astronomiju, opću fiziku te geografiju s navigacijom. Početkom 20. stoljeća Poincaré je izabran i za predsjednika *Société astronomique de France* i *Société française de physique*, 1901. odnosno 1902. godine. Povrh toga, 1906. godine postao je i predsjednik Akademije, a već 1908., zahvaljujući svojim filozofskim radovima, izabran je za „besmrtnika“ (*l'immortel*), odnosno za jednoga od četrdeset članova Francuske akademije (*Académie française*), gdje je zauzimao sjedište broj 24.

Poincaré je bio dobitnik niza međunarodnih priznanja za svoj matematički i znanstveni rad te član brojnih inozemnih učenih i matematičkih društava: *Circolo Matematico di Palermo* (član savjetodavnog odbora od 1884.), *London Mathematical Society* (počasni član od

[566] Poincaréa su tako doživljavali i njegovi suvremenici. Primjerice, Cantor je u pismu Russellu od 19. rujna 1911., nakon što je ustvrdio da je „stari Kant“ prema njegovu mišljenju „*sofistički filistar* i *veoma loš matematičar* […] koji je nanio mnogo štete i počinio mnoga nedjela filozofiji“, dodao kako je Poincaré, nažalost, „očito potpuno zaljubljen, ako ne i opčinjen Kantom“ (navedeno prema Russellovoj autobiografiji, Russell 2009: 211–212). Većina Poincaréovih kantovskih stajališta jasno dolazi do izražaja u raspravama koje je vodio s Russellom, počevši od rada „Des Fondements de la Géométrie: A propos d'un Livre de M. Russell“ iz 1899. (*Revue de Métaphysique et de Morale*, T. 7, str. 251–279). V. i sljedeću fusnotu. Prema Heinzmannu, Poincaré se može promatrati kao jedan od neokantovskih preteča logičkog pozitivizma ili empirizma (Heinzmann & Stump 2024, §3.2).

[567] V. i Carnapovu disertaciju „Der Raum: Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre“ (Universität Jena, 1921), koja obiluje ne samo referencama na Poincaréa nego i, osobito, na njemački prijevod *Fondamenti*, odnosno na Veroneseove *Grundzüge der Geometrie* iz 1894. godine (Carnap 1922, *passim*; navedeno prema *The Collected Works of Rudolf Carnap*, Vol. I: *Early Writings* (prir. A. Carus *et al.* 2019), str. 21–208; v. i popratne napomene M. Friedmana).

1892.), *Royal Society* (inozemni član od 1894.), *Royal Society of Edinburgh* (počasni član od 1895.) i tako dalje. Bio je inozemni član brojnih akademija znanosti: u Göttingenu (dopisni član od 1884., redoviti član od 1892.), Kraljevske akademije u Rimu (*Reale Accademia dei Lincei*, od 1888.), Ruske (od 1895.), Pruske, odnosno Berlinske (od 1896.), Kraljevske nizozemske (od 1897.), obiju američkih akademija (član *National Academy of Sciences* od 1898., a *American Academy of Arts and Sciences* od 1901.), Kraljevske belgijske (od 1902.), Mađarske (inozemni član od 1906.) i tako dalje. Do 1912. godine, kada je iznenada preminuo u 58. godini života, Poincaré je bio plenarni predavač na sva četiri dotad održana ICM-a (Zürich 1897., Pariz 1900., Heidelberg 1904., Rim 1908.), a još od 1889. bio je predsjednik Stalne međunarodne komisije za izradu bibliografskog repozitorija matematičkih znanosti (*Commission permanente internationale du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*), najznačajnijega međunarodnog bibliografskog kataloga *fin-de-siècle* matematike (do Poincaréove smrti obrađeno je više od 20 000 bibliografskih jedinica).[568] Štoviše, do 1910. godine u znanstvenoj zajednici oblikovao se konsenzus da bi Poincaré trebao dobiti i Nobelovu nagradu za fiziku: među predlagateljima bili su, između ostalih, nobelovci Maria Skłodowska-Curie, Henri Becquerel, Guglielmo Marconi, Pieter Zeeman, Hendrik Lorentz, Gabriel Lippmann, Albert Michelson i rekordnih gotovo trideset drugih znanstvenika i matematičara diljem svijeta; međutim, Poincaré nije dobio nagradu jer je Nobelov odbor imao tendenciju favorizirati konkretna otkrića i eksperimentalno potvrđene rezultate, a ne toliko čisto teorijski rad kakav je bio Poincaréov (usp. Gray 2012, Ch. 2, odjeljak „The Nobel Prize", str. 192ff).[569] O Poincaréovu ugledu među fizičarima možda najbolje svjedoči činjenica da je, po pozivu, bio jedan od sudionika prve Solvayeve konferencije posvećene problemima teorije radijacije i kvantne teorije – v. *Sl. 31* i usp. Straumann 2011.

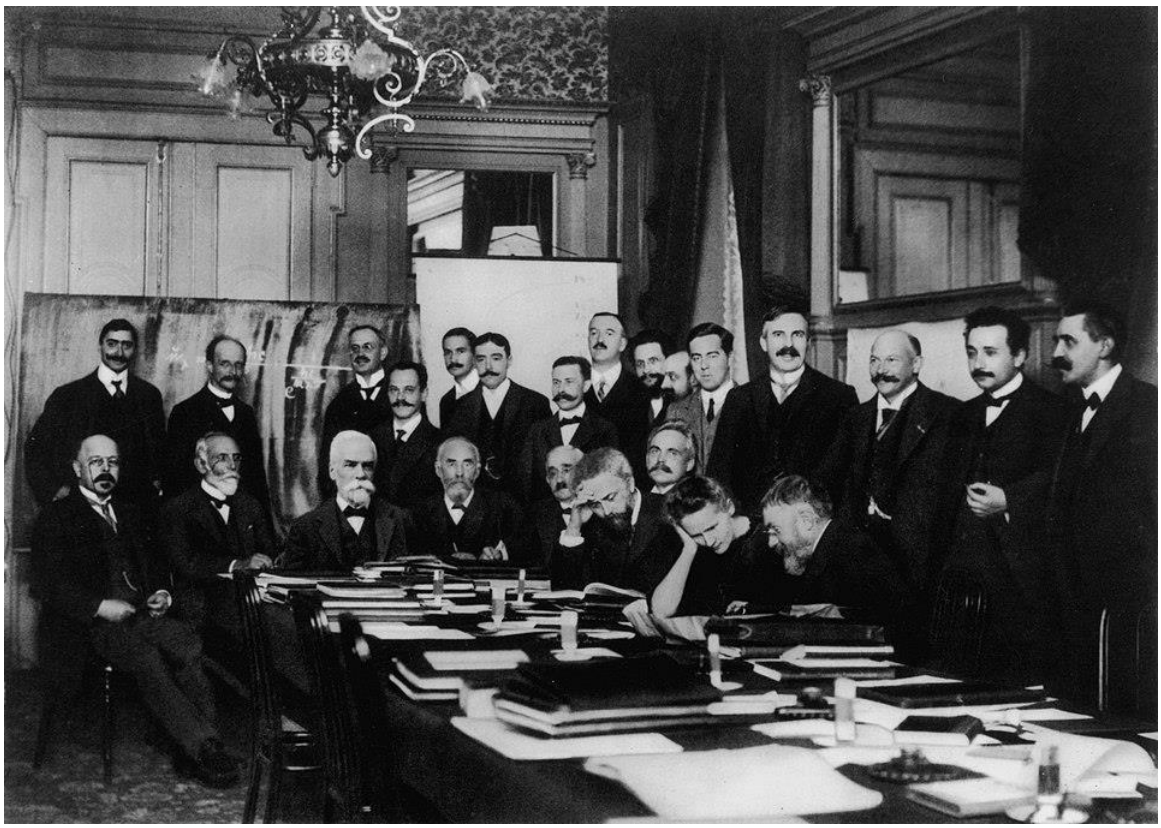
Poanta ovog kratkog prikaza Poincaréove intelektualne biografije u neposrednoj je vezi s Veroneseovom opaskom o utjecaju „autoriteta eminentnih matematičara" na recepciju novih matematičkih teorija. Naime, za razliku od Cantora, čiji je utjecaj inicijalno bio ograničen uslijed pretežno slabe recepcije teorije skupova krajem 19. stoljeća, i Peana, čiji je utjecaj više bio ograničen na Italiju i članove njegove škole (s izuzetkom Russella u Velikoj Britaniji), Poincaréov je autoritet još od početka 1880-ih bio neupitan i neprikosnoven u najširim mogućim međunarodnim matematičkim i filozofskim okvirima. Do te mjere da je u osmrtnicama objavljenima 1912. stajalo da je svijet izgubio ne samo jednoga od najeminentnijih matematičara i mislilaca (*The Times*, 17.7.1912.), *maître incomparable*,[570] nego i „najveći autoritet ovoga vremena" (*die erste Autorität von dieser Zeit*) (usp. Smith 1912). Pojednostavljeno rečeno: kada je Poincaré govorio, cijeli je znanstveni svijet pomno slušao. Upravo me ta činjenica potaknula da istražim kakva je bila Poincaréova uloga u povijesti

[568] Za više pojedinosti o *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques* v. Rollet & Nabonnand 2003.

[569] Usp. i arhivu nominacija za Nobelovu nagradu za fiziku, The Nobel Prize Nomination Archive, dostupno na poveznici: https://www.nobelprize.org/nomination/archive/show_people.php?id=7313.

[570] Ovu sam karakterizaciju preuzeo iz Appellova predgovora prvom tomu Poincaréovih *Œuvres*, objavljenih u izdanju Francuske akademije znanosti (Pariz, Gauthier-Villars, 1928).

recepcije Veroneseove nearhimedovske geometrije.[571] Prvo pitanje koje se prirodno nameće u takvu istraživanju jest je li Poincaré objavio neki rad o Veroneseu i/ili o nearhimedovskoj geometriji ili ih je, alternativno, barem spominjao u sačuvanoj korespondenciji.



Sl. 31. Skupna fotografija sudionika prve Solvayeve konferencije (Bruxelles, 1911.; fotograf: Benjamin Couprie). Uz M. Curie i Poincaréa, koji sjede prvi zdesna, na fotografiji se nalaze i neki od najistaknutijih fizičara 20. stoljeća, među njima Planck, Lorentz, de Broglie, Rutherford i mladi Einstein.

Pretragom Poincaréovih *Œuvres* i uvidom u njegovu bogatu bibliografiju (koja broji više od 700 bibliografskih jedinica)[572] utvrdio sam da se već ranih 1880-ih zanimao za moguće primjene neeuklidskih geometrija u teoriji kvadratnih formi i teoriji Fuchsovih grupa, u okviru koje već 1882. formulira poznati disk-model neeuklidske geometrije (v. nap. 358), kao i da se već krajem 1880-ih počinje zanimati za probleme zasnivanja geometrije, o čemu, primjerice, svjedoči rad „Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie“ iz 1887. godine.[573] U godini objavljivanja *Fondamenti*, Poincaré se i dalje intenzivno bavio neeuklidskim

[571] Ovdje svakako valja napomenuti da je Poincaré u određenoj mjeri pratio zbivanja u talijanskoj matematici, barem kada je riječ o djelovanju *Circolo Matematico di Palermo*, čiji je član bio od njegova osnutka 1884. godine.

[572] Izradu ovoga dijela rada uvelike je olakšalo postojanje odgovarajućih digitalnih repozitorija na Sveučilištu u Nantesu (Henri Poincaré Papers, ur. Scott A. Walter, Faculté des sciences et des techniques de Nantes) te u Archives Henri Poincaré (CNRS–Université de Lorraine–Université de Strasbourg).

[573] Već se u ovom i drugim Poincaréovim radovima iz toga razdoblja može uočiti da geometriju, u duhu Lieova i Kleinova programa, promatra kao proučavanje formalnih svojstava (neprekidnih) grupa. Ujedno su jasno prepoznatljive i temeljne odrednice njegova *geometrijskog konvencionalizma*, prema kojem geometrijski aksiomi nisu ni analitički ni sintetički sudovi *a priori*, niti eksperimentalne istine, nego *prigodne konvencije*. Pitanje

geometrijama, o čemu svjedoči rad „Sur les géométries non euclidiennes“, objavljen u *Revue générale des sciences pures et appliquées*, a ubrzo potom, u engleskom prijevodu, i u časopisu *Nature*. Međutim, ni u njegovoj bibliografiji ni u sačuvanoj korespondenciji od 1890. godine nadalje ne može se pronaći nijedan rad ili naslov koji bi bio izrijekom posvećen Veroneseu ili nearhimedovskoj geometriji. Počevši od 1902. godine, međutim, moguće je pronaći nekoliko Poincaréovih publikacija posvećenih Hilbertovim *Grundlagen der Geometrie* i, općenitije uzevši, Hilbertovim doprinosima zasnivanju geometrije. Riječ je o sljedećim radovima:

1. „**Les fondements de la géométrie – *Grundlagen der Geometrie* par M. Hilbert**“: Poincaréov detaljan prikaz *Grundlagen*, objavljen u *Bulletin des sciences mathématiques* (francuski ekvivalent njemačkoga referativnog časopisa *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*), S. 2, T. 26, str. 249–272 (Poincaré 1902b). Prikaz je iste godine, u neznatno izmijenjenom obliku, pretiskan i u svibanjskom broju *Journal des savants*, str. 252–271 (Poincaré 1902c);
2. „**Poincaré's review of Hilbert's *Foundations of Geometry***“: Huntingtonov engleski prijevod Poincaréova prikaza *Grundlagen*, objavljen u *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 10, Iss. 1, str. 1–23 (Poincaré 1903a);
3. „**Rapport sur les travaux de M. Hilbert**“: Poincaréov opsežan referat o Hilbertovim matematičkim doprinosima, podnesen na natječaj za Prix Lobatschefsky i objavljen u *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan*, T. 14, str. 10–48 (Poincaré 1904);
4. „**Prix Bolyai: procès verbal des Séances de la Commission internationale de 1910. Rapport de M. Henri Poincaré**“: Poincaréov opsežan referat o Hilbertovim matematičkim doprinosima, podnesen na natječaj za *Prix Bolyai* i objavljen kao separat u izdanju Mađarske akademije znanosti, Budimpešta: Magyar Tudományos Akadémia/Imprimerie de la Société Franklin, str. 1–39 (Poincaré 1911a). Referat je iste godine, u neizmijenjenom obliku, objavljen i u *Bulletin des sciences mathématiques*, S. 2, T. 31, str. 67–100 (Poincaré 1911b), u *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, S. 1, Vol. 31, str. 109–132 (Poincaré 1911c), a sljedeće godine i u *Acta Mathematica*, Bd. 35, str. 1–28 (Poincaré 1912).

Sama činjenica da su gotovo svi navedeni radovi pretiskivani, nerijetko i po nekoliko puta u različitim utjecajnim časopisima, svjedoči o Poincaréovu utjecaju, ali i objašnjava zašto je povjesničar Klaus Volkert u kritičkom izdanju *Grundlagen* istaknuo da su *najvažniji dokumenti* (*die wichtigsten Dokumente*) za recepciju Hilbertove knjige bili upravo Poincaréovi detaljni

ontološkoga statusa ove ili one geometrije, odnosno pitanje koji od mogućih alternativnih geometrijskih sustava odgovara fizičkom prostoru, tako se ne svodi na pitanje istinitosti, nego na pitanje *prigodnosti* određene geometrije: „biramo ovu prije nego onu geometriju ne zato što je *istinitija* nego zato što je *prigodnija*“ (Poincaré 1898a: 42, Poincaréov izvorni kurziv). Drugim riječima, prema Poincaréu biramo onu geometriju koja, u kombinaciji s fizikalnim zakonima i eksperimentalno utvrđenim činjenicama, pruža *najjednostavniji* opis stvarnosti koji je ujedno u skladu s našim dotadašnjim iskustvom, osobito s percepcijom ponašanja i gibanja krutih tijela. Polazeći od tih kriterija, Poincaré je smatrao da ćemo uvijek biti skloni odabrati standardnu euklidsku geometriju. Za podrobniji prikaz Poincaréova konvencionalizma v. *La Science et l'Hypothèse* (Poincaré 1902a), osobito drugi dio, „L'espace“, poglavlja III–V, str. 49ff.

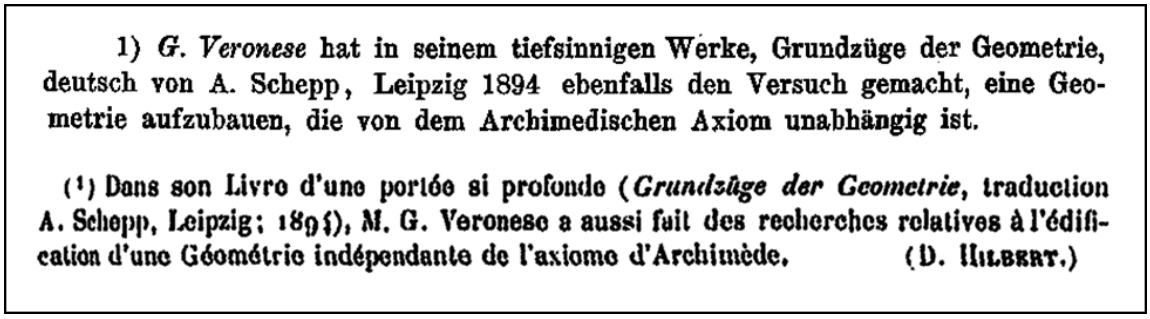
prikazi (Volkert 2015: 208). Međutim, ono što je za nas osobito važno jest sadržaj tih radova. Već u prvom prikazu *Grundlagen* nalazimo odjeljak „La géométrie non archimédienne“, u kojem Poincaré kaže sljedeće:

> „**Najoriginalnija koncepcija gospodina Hilberta jest nearhimedovska geometrija** (*la conception la plus originale de M. Hilbert, c'est celle de la Géométrie non archimédienne*), u kojoj svi [drugi] aksiomi ostaju istiniti, osim Arhimedova. **Za to je trebalo konstruirati *sustav nearhimedovskih brojeva*, odnosno sustav elemenata između kojih se mogu zamisliti relacije jednakosti i nejednakosti te na koje je moguće primijeniti operacije koje odgovaraju** [**uobičajenom**] **aritmetičkom zbrajanju i množenju**. […] Naši standardni brojevi pojavljuju se kao posebni slučajevi tih nearhimedovskih brojeva. **Novi su brojevi takoreći umetnuti** (*les nouveaux nombres viennent s'intercaler*) **u niz uobičajenih brojeva** na takav način da, primjerice, postoji beskonačno mnogo novih brojeva manjih od bilo kojega zadanog broja A, a većih od svih uobičajenih brojeva manjih od A. […]
>
> Na prvi pogled duh se opire takvim [novim] koncepcijama jer, po staroj navici, traži neku osjetilnu predodžbu (*une représentation sensible*) [nove geometrije]. Međutim, treba se osloboditi takve predrasude ako se želi razumjeti, a ovdje je to nužno još više nego u slučaju neeuklidskih geometrija. Gospodin Hilbert imao je samo jedan cilj: konstruirati sustav elemenata podložnih određenim logičkim relacijama. Za njega je potom bilo dovoljno pokazati da te relacije ne impliciraju nikakvu unutarnju proturječnost (*contradiction interne*).
>
> Napomenimo, međutim, i ovo: neeuklidska geometrija je, takoreći, još uvijek poštovala našu kvalitativnu koncepciju geometrijskog kontinuuma, uznemirujući samo naše ideje o mjeri toga kontinuuma (*nos idées sur la mesure de ce continu*). Nasuprot tomu, nearhimedovska geometrija u potpunosti ruši (*détruit*) tu koncepciju i secira kontinuum kako bi u njega uvela nove elemente (*elle dissèque le continu pour y introduire des éléments nouveaux*). Kako god bilo, **gospodin Hilbert slijedio je implikacije svojih premisa i nastojao pokazati kako se geometrija može preoblikovati bez oslanjanja na Arhimedov aksiom**.“ (Poincaré 1902b: 258–260, Poincaréov izvorni kurziv, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Dakle, *nota bene*, prema Poincaréu, u tom trenutku najuglednijem i najutjecajnijem matematičaru na svijetu, nearhimedovska geometrija predstavlja Hilbertovu najoriginalniju koncepciju u *Grundlagen*. U tekstu se na više mjesta javlja formulacija *sa géométrie non archimédienne*, „njegova“, odnosno „Hilbertova nearhimedovska geometrija“. Prema Poincaréovu mišljenju, Hilbertov rad na zasnivanju geometrije, u kojem se osobito ističe rad na nearhimedovskoj geometriji, „učinio je da filozofija matematike ostvari značajan i velik napredak, usporediv s onima koje dugujemo Lobačevskom, Riemannu, Helmholtzu i Lieu.“ (Poincaré 1902: 272) Veronese se, kao što se može vidjeti, pritom uopće ne spominje, čime se neminovno stvara dojam da je upravo Hilbert prvi konstruirao nearhimedovsku geometriju, zajedno s njezinim odgovarajućim modelom zasnovanim na „sustavu nearhimedovskih brojeva“.[574] To je neobično i teško je povjerovati da je moglo biti učinjeno

[574] Na jednom mjestu u tekstu Poincaré postavlja pitanje „trebam li spomenuti i radove Talijana koji su nastojali stvoriti univerzalni logički simbolizam i svesti matematičko rasuđivanje na čisto mehanička pravila?“ (Poincaré 1902b: 251). Nešto dalje, u istome kontekstu, napominje da su Peano i Padoa pokušali ostvariti takav program

nesvjesno jer se i u prvom, odnosno izvornom njemačkom izdanju *Grundlagen* iz 1899., kao i u Laugelovu francuskom prijevodu *Grundlagen* iz 1900. godine (koji su Poincaréu pri pisanju prikaza mogli biti na raspolaganju, premda je jasno da nije čitao prijevod nego izvornik), još uvijek mogla pronaći Hilbertova fusnota uz §12 – v. *Sl. 32*:



1) *G. Veronese* hat in seinem tiefsinnigen Werke, Grundzüge der Geometrie, deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894 ebenfalls den Versuch gemacht, eine Geometrie aufzubauen, die von dem Archimedischen Axiom unabhängig ist.

(1) Dans son Livre d'une portée si profonde (*Grundzüge der Geometrie*, traduction A. Schepp, Leipzig; 1894), M. G. Veronese a aussi fait des recherches relatives à l'édification d'une Géométrie indépendante de l'axiome d'Archimède. (D. HILBERT.)

Sl. 32. Faksimil Hilbertove fusnote uz §12 *Grundlagen* (njemački izvornik (1899) i francuski prijevod (1900))

Primijetimo, međutim, Hilbertovu formulaciju: Veronese je „također pokušao (*ebenfalls den Versuch gemacht*) uspostaviti geometriju neovisnu o Arhimedovu aksiomu", dok se u francuskom prijevodu kaže da je Veronese „također proveo istraživanja (*a aussi fait des recherches*) u vezi sa uspostavljanjem geometrije neovisne o Arhimedovu aksiomu". Nigdje se, međutim, jasno i eksplicitno ne kaže da Veronese *nije samo pokušavao konstruirati* nego i *da je doista konstruirao nearhimedovsku geometriju* te da je, štoviše, bio *prvi matematičar* kojemu je to uspjelo.[575] Podsjetimo, u Odjeljku [2.5] pokazao sam da su *Fondamenti* ostvarili presudan i formativan utjecaj na Hilbertovo bavljenje zasnivanjem geometrije; v. i nap. 486 uz Odjeljak [3] za raspravu o Hilbertovoj praksi nenavođenja rezultata prethodnika, premda se na njih očito oslanjao. Ehrlich je dobro sažeo osnovni problem u vezi s *Grundlagen* i Poincaréovim prikazom:

> „Kao ni same [Hilbertove] *Grundlagen*, ni Poincaréov prikaz ne odaje dovoljno priznanja, a u nekim slučajevima druge važne doprinose čak ni ne spominje, što je poanta koju su brojni autori već u to vrijeme istaknuli, bilo eksplicitno bilo implicitno." (Ehrlich 1994a: xxv)

Drugim riječima, Poincaré je Veroneseu naprosto uskratio *prava prvenstva* kada je riječ o otkriću nearhimedovske geometrije, novih nearhimedovskih brojevnih sustava i, općenitije uzevši, sustavnom proučavanju posljedica nezavisnosti Arhimedova aksioma. Međutim, to nije bilo jedino Poincaréovo ogrješenje o Veronesea. U referatima o Hilbertovim doprinosima koje je pisao za natječaje za Prix Lobatschefsky i Prix Bolyai 1904., odnosno

---

te, u skladu sa svojim *antialogicističkim stajalištem*, dodaje da mu se takav pristup čini izvještačenim i djetinjastim (*artificielle et puérile*):

> „[I]l est inutile de faire observer combien elle serait funeste dans l'enseignement et nuisible au développement des esprits; combien elle serait desséchante pour les chercheurs, dont elle tarirait promptement l'originalité." (*op. cit*, str. 253)

[575] I u radu „Mathematische Probleme" s pariškog ICM-a Hilbert će tek neodređeno reći da su Veronese i on „istraživali nearhimedovske geometrije" (*die Nicht-Archimedischen Geometrien, die von Veronese und mir untersucht worden sind*) (usp. Hilbert 1900: 267).

1910/11. godine, možemo pronaći i sljedeće navode u kojima se ponavlja dio stajališta iz prikaza *Grundlagen*:

> „**Najoriginalnija koncepcija gospodina Hilberta jest nearhimedovska geometrija** (*la conception la plus originale de M. Hilbert, c'est celle de la Géométrie non archimédienne*), u kojoj svi [drugi] aksiomi ostaju istiniti, osim Arhimedova. **Za to je trebalo konstruirati *sustav nearhimedovskih brojeva*.**" (Poincaré 1904: 23; usp. i Poincaré 1911a: 16; isto se mjesto javlja i u Poincaré 1911b, 1911c i 1912; moja emfaza dodana podebljanim slovima)

> „**Možemo vidjeti kolike su razmjere i implikacije ovog** [**Hilbertova**] **otkrića i da ono predstavlja, u razvoju naših ideja, korak gotovo jednako smion kao onaj na koji nas je naveo Lobačevski**. […] **U toj tako odvažnoj koncepciji Hilbert je imao prethodnika. U svojim *Osnovama geometrije* Veronese je imao analognu ideju** (*Veronese avait eu une idée analogue*) […] **u kojoj Cantorovi transfinitni brojevi igraju presudnu ulogu** (*où les nombres transfinis de Cantor jouent un rôle prépondérant*). Međutim, **elegancijom i jednostavnošću svojega izlaganja, dubinom svojih filozofskih uvida i s obzirom na to kako je razradio** [**tu**] **temeljnu ideju, Hilbert je doista učinio novu geometriju svojom** (*Hilbert a bien fait sa chose de la nouvelle géométrie*)." (Poincaré 1904: 25; usp. i Poincaré 1911a: 18; isto se mjesto javlja i u Poincaré 1911b, 1911c i 1912; moja emfaza dodana podebljanim slovima)

> „**Moram još spomenuti knjigu gospodina Veronesea o osnovama geometrije, u kojoj je autor prvi put primijenio Cantorove transfinitne brojeve u geometriji**." (Poincaré 1904: 13)

Dakle, iako je Poincaré ovdje pokušao ispraviti prethodni veliki propust iz prikaza objavljenog u *Bulletin* time što je istaknuo da je Veronese bio Hilbertov prethodnik, njegov je doprinos ipak umanjio opaskom da je Veronese imao tek „analognu ideju", sasvim u skladu s formulacijom iz Hilbertove fusnote. I ne samo to: premda spominje „knjigu gospodina Veronesea", Poincaré nigdje ne navodi relevantne bibliografske podatke – ni naslov knjige, ni izdavača, ni godinu izdanja. Doduše, radi povijesne korektnosti valja istaknuti da je Darboux u *Bulletin des sciences mathématiques*, S. 2, Vol. 27, objavio kratak izvadak iz pisma koje mu je poslao Poincaré (jednu i pol rečenicu, odnosno svega šest redaka), u kojem, osvrćući se na svoj prikaz *Grundlagen* objavljen u prethodnom broju *Bulletina*, Poincaré kaže da je, kada je riječ o „novoj geometriji koju on [sc. Hilbert] naziva nearhimedovskom", trebao dodati kako „prvotna ideja pripada gospodinu Veroneseu" (*que l'idée première appartient a M. Veronese*). Ni ovdje, međutim, ne navodi nikakve podatke o tome gdje je Veronese iznio tu ideju, nego samo dodaje da je Hilbert nearhimedovskoj geometriji dao „izvanredno elegantan oblik" te da je „zapravo on pokazao njezine stvarne implikacije" (Poincaré 1903b: 115).

Da stvar bude gora, zbog nepažljiva čitanja *Fondamenti* Poincaré je u gore navedenim ulomcima paušalno iznio potpuno neutemeljenu i netočnu tvrdnju da su u Veroneseovu pristupu zasnivanju nearhimedovske geometrije i konstrukciji nearhimedovskih brojeva ključnu ulogu imali Cantorovi transfinitni brojevi. Time je zapravo počinio istu pogrešku kao i sâm Cantor, koji je u pismu Peanu od 27.7.1895. sugerirao da su Veroneseovi beskonačni brojevi održivi samo ako se poistovjete s Cantorovim transfinitnim ordinalima. Cantor pritom dodaje da je Veronese pod ∞_1 morao imati na umu upravo Cantorovo ω te da je, po

svoj prilici, naprosto preuzeo sve ideje o beskonačnim brojevima iznesene u *Fondamenti* iz Cantorova spisa „Zur Lehre vom Transfiniten“ iz 1890. godine, „koji je imao pred sobom kada je pisao vlastitu knjigu“, ili pak iz Vivantijeva rada „Fondamenti della teoria dei tipi ordinati“ (*Annali di Matematica*, Vol. 17, 1888/89), „s kojim je morao biti upoznat“ (Cod. Ms. G. Cantor 17, № 189).[576] Drugim riječima, Cantor je Veronesea praktički optužio za *plagijat*: „Veronese izbjegava spomenuti vezu između svojih, priznajem, veoma nejasnih ideja i moje [teorije].“ (ibid.) Jesu li Cantor i Poincaré uopće pročitali *Fondamenti*?

Treći paragraf šestoga poglavlja uvoda u *Fondamenti* Veronese je naslovio „Numeri transfiniti di Cantor – Perchè non possono applicarsi al confronto dei segmenti limitati della forma fondamentale“, odnosno: Cantorovi transfinitni brojevi – zašto se *ne mogu koristiti* za uspoređivanje ograničenih dužina fundamentalne forme (Veronese 1891, Intr., Cap. VI, §3, str. 102). Povrh toga, Veronese je uz taj paragraf dodao i sljedeću napomenu u fusnoti:

> „**Ovaj odjeljak označavamo zvjezdicom jer Cantorove brojeve ni na koji način ne koristimo u zasnivanju geometrije** (*dei numeri di G. Cantor non facciamo alcun uso nei fondamenti della geometria*), **niti igdje drugdje u ovom uvodu, osim radi usporedbe s našim beskonačnim brojevima** (*salvo il confronto coi nostri numeri infiniti*).“ (Veronese 1891: 102, nap. *, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Veronese nije mogao biti jasniji ni izričitiji. Teško je razumjeti kako bi itko tko je pročitao ta mjesta u *Fondamenti* mogao tvrditi da je Veronese „po prvi put primijenio Cantorove transfinitne brojeve u geometriji“ ili pak da „Cantorovi transfinitni brojevi igraju presudnu ulogu“ u Veroneseovu projektu zasnivanja geometrije. Nakon što je doznao za Poincaréove referate, Veronese je smatrao da je nužno javno reagirati. Već 1905. godine, dakle prije nego što je Poincaré predložio Hilberta i za Prix Bolyai, Veronese je objavio rad „La geometria non-Archimedea. Una questione di priorità“ u *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*. Međutim, Veronese sebi nije učinio uslugu time što je rad objavio na talijanskom jeziku i u izdanju Rimske akademije; to je već u početku znatno smanjilo njegov potencijalni doseg i ograničilo *impact factor* onoga što je ondje napisao. A napisao je, između ostaloga, sljedeće:

> „**Napominjem da sam u uvodu svojih *Fondamenti di geometria*, objavljenih 1891. godine, slijedeći apstraktnu sintetičku metodu, razvio teoriju linearnoga kontinuuma koja ne zadovoljava Arhimedov postulat. Ta mi je teorija potom poslužila da u istim tim *Fondamenti* zasnujem i nearhimedovsku geometriju. Tako sam razriješio stoljetno pitanje aktualno beskonačnih i infinitezimalnih dužina koje je zaokupljalo pozornost eminentnih filozofa i matematičara**, ali koje nikada nije bilo razriješeno jer nikada nije ni bilo dobro postavljeno. **Pokazao sam da se Cantorovim transfinitnim brojevima ne može konstruirati nearhimedovska geometrija** i da, samim time, nije moguće konstruirati aktualno infinitezimalne dužine posredstvom tih brojeva. **U više sam navrata eksplicitno istaknuo** (*ho esplicitamente rilevato*), **kako u samom uvodu** [***Fondamenti***], **tako i u drugim publikacijama, da su moji aktualno**

[576] „Herr Veronese hat, als er sein Buch schrieb, jenes Schriftchen (1890) vor sich gehabt. Auch des Herrn Vivanti Aufsatz: ‘Fondamenti delle [*sic*] teoria dei tipi ordinati’ (1888) muß ihm bekannt gewesen sein.“ (navedeno prema Meschkowski & Nilson 1991, № 143, str. 359)

> **beskonačni i infinitezimalni brojevi potpuno drukčije prirode od onih** [sc. **transfinitnih brojeva**] **gospodina Cantora** (*di natura affatto diversa da quelli del sig. Cantor*). […] Poincaré u jednom osvrtu na Hilbertov spis *Grundlagen der Geometrie*, objavljen 1899., napisanom povodom dodjele Prix Lobatschewsky, iznosi sudove o mojoj teoriji i o prvenstvu [u vezi s otkrićem] nearhimedovske geometrije koji nisu točni (*non sono esatti*). Premda se [dosad] nisam osvrtao na pojedine kritike i prikaze [koji se tiču moje teorije], ipak gajim toliko divljenje prema slavnom francuskom matematičaru, članu naše Akademije, i **toliki je njegov autoritet da ne mogu šutjeti** (*non posso tacere*), pogotovo zato što je iste te sudove već iznio i Halsted, američki matematičar dobro poznat po svojim radovima o principima geometrije. Stoga **ne mogu dopustiti da se takvi sudovi dalje šire i štete mojem radu** (*che tali giudizi si divulghino e danneggino l'opera mia*), ma koliko on bio skroman. […]
>
> Već iz onoga što sam prethodno rekao slijedi da Cantorovi brojevi ne samo da ne igraju pretežitu ulogu u mojoj teoriji (*non hanno un ufficio preponderante nella mia teoria*), nego su moji brojevi zapravo potpuno drukčije prirode. U mom uvodu, istina je, postoji jedan odjeljak u kojem raspravljam o Cantorovim brojevima, ali sam ga napisao upravo kako bih istaknuo razliku između naših dviju teorija i pogrešku u koju je Cantor upao kada je tvrdio da su aktualno infinitezimalne dužine nemoguće. **Kada je pak riječ o prvenstvu u pogledu nearhimedovske geometrije, moram inzistirati da na njega u cijelosti polažem pravo** (*debbo reclamarla intera*). **Moja je geometrija potpunija od Hilbertove** […] **i, štoviše, *Hilbertova geometrija predstavlja samo dio moje*** [**geometrije**]." (Veronese 1905: 347–49, Veroneseov izvorni kurziv, moja emfaza dodana podebljanim slovima)

Veronese je, dakle, u svojoj reakciji u osnovi istaknuo isto ono što tvrdim i ja u ovom odjeljku, dodavši pritom, u izrazito kolegijalnom tonu, kako u potpunosti priznaje „ne samo vrijednost nego i eleganciju i jednostavnost Hilbertova izlaganja" (*op. cit.*, str. 349). Nažalost, čini se da je njegova reakcija ostala gotovo nezapažena. Naime, Poincaré je svoju dvostruku pogrešku gotovo *ad verbum* ponovio i u referatu kojim je Hilberta predložio za prestižnu *Prix Bolyai* za 1910. godinu.[577] Unatoč Veroneseovu prosvjedu, George Bruce Halsted (1853–1922) odmah je nakon objavljivanja Poincaréova referata u Francuskoj (u *Bulletin*) i u Italiji (u *Rendiconti*), preveo taj tekst na engleski jezik i objavio ga, ni manje ni više, nego u časopisu *Science* (N.S., Vol. 33, No. 855, 19.5.1911.). Jedino mjesto na kojem se ovaj put uopće spominjao Veronese bilo je ono o „analognoj ideji" (usp. Poincaré 1911a: 18, Halsted 1911: 761), čime je, nažalost, utjecaj *Fondamenti* na razvoj i samu koncepciju Hilbertovih *Grundlagen* praktički u cijelosti marginaliziran. Drugim riječima, Veronese nije uspio spriječiti da se takvi sudovi, pogubni za recepciju njegovih doprinosa nearhimedovskoj matematici i, općenitije uzevši, zasnivanju matematike, prošire ne samo europskom nego i svjetskom matematičkom zajednicom.[578]

---

[577] Sâm Poincaré dobio je prvu Prix Bolyai 1905. godine, čime se ostvarilo Halstedovo proročanstvo (usp. Halsted 1905). Međunarodno povjerenstvo koje mu je dodijelilo nagradu činili su Gaston Darboux, Felix Klein, Gyula Kőnig (germanizirano Julius König, 1849–1913) i Gusztáv Rados (1862–1942). Za više pojedinosti o povijesti Prix Bolyai v. Szénássy 1995.

[578] U tom kontekstu očito nije pomogla ni Scheppova eksplicitna napomena iz predgovora njemačkom prijevodu *Fondamenti*: „Veroneseovo djelo nesumnjivo je prvo (*ist wohl das erste*) u kojem je geometrija sintetički razvijena na potpuno uopćen način i, prema onome što znamo, zasad *jedino* u kojem Arhimedov aksiom nije

Kada je pak riječ o slučaju „nestajuće fusnote“, odnosno izostanka reference na Veroneseove *Fondamenti* u kasnijim izdanjima *Grundlagen*, koji sam spomenuo još u uvodu, može se spekulisati da je, nakon što je Hilbert dobio i Prix Lobatschefsky (za 1903. godinu) i Prix Bolyai (za 1910. godinu) za, ponajprije za svoje doprinose zasnivanju nearhimedovske geometrije, i to na temelju Poincaréovih referata koji su *de facto* izbrisali vezu s Veroneseom, Paul Bernays (1888–1977), kao glavni urednik kasnijih izmijenjenih i dopunjenih izdanja *Grundlagen* te izvršitelj Hilbertove oporuke (*Testamentsvollstrecker*), pri korekturi novih prijeloma naprosto previdio da je referenca na Veronesea izostavljena. Čak i ako je to primijetio, moguće je da tome nije pridavao osobitu važnost, naročito ako se ima na umu Hilbertova krajnje škrta formulacija izvorne fusnote.

Problemi se tu nisu zaustavili. Pogreška poistovjećivanja Cantorovih transfinitnih i Veroneseovih beskonačnih i infinitezimalnih brojeva, koju su, uz Cantora i Poincaréa, počinili i drugi matematičari poput Vivantija, Killinga i Schönfliesa, ubrzo se počela pojavljivati i u filozofskoj literaturi, već na samom početku filozofskog zanimanja za nearhimedovsku geometriju. Jedan od najupečatljivijih primjera nalazimo u knjizi *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften* neokantovca Paula Natorpa (1854–1924), pripadnika Marburške škole, u kojoj se tvrdi da je Veronese bio „najvažniji sljedbenik kojega je Cantor mogao pronaći“ (*den bedeutendsten Nachfolger, den Cantor gefunden hat*) (Natorp 1910: 171). Povijesno je važno napomenuti da prvi filozof koji je detaljno komparativno proučavao Cantorovu i Veroneseovu teoriju, Branislav Petronijević, nije upao u tu pogrešku. U studiji *Die typischen Geometrien und das Unendliche* eksplicitno je naglasio da „beskonačno veliki broj prvoga reda, prema Veroneseu, ne […] predstavlja cjelokupnost svih konačnih brojeva (*nicht die Gesamtheit aller endlichen Zahlen darstellen soll*), dakle, ∞_1 (tako Veronese označava svoj beskonačno veliki broj prvoga reda) ne treba biti jednak Cantorovu ω (*daß also* ∞_1 *nicht gleich Cantors* ω *sein soll*)“ (Petronievics 1907: 50). U Petronijevićevoj autobiografskoj skici „Iz mojih sjećanja na matematičare“ pronašao sam sljedeći zanimljiv detalj. Petronijević je u više navrata boravio u Parizu, gdje je držao predavanja na Sorboni. Jednom prilikom, 1907. godine, upoznao je i Poincaréa, a tema njihovih razgovora bile su nestandardne geometrije – Petronijevićeva diskretna geometrija, formulirana još 1904. godine, i nearhimedovska geometrija, čiji je, kako Petronijević ispravno ističe, „prvi osnivač bio Veronese, a drugi kasniji osnivač David Hilbert“. Petronijević je tada zamolio Poincaréa da mu „izloži smisao nearhimedovske geometrije“, no Poincaréovo objašnjenje ostalo je potpuno nerazumljivo. Samom Petronijeviću tada još uvijek nije bila jasna veza između Veroneseovih brojeva i nearhimedovske geometrije, a „ni Poincaré nije uspio mi [sc. mu] na tu vezu ukazati“ (navedeno prema *Izabrana dela B. Petronijevića*, T. 12, Petronijević 1998: 37–38). Imajući u vidu Poincaréovu dvostruku pogrešku, čini mi se da je razlog tome očit. Poincaré nije mogao razjasniti ta pitanja Petronijeviću jer ni njemu samomu ona nisu bila do kraja jasna. Štoviše, za razliku od Petronijevića, Poincaré nije ni uočio da Veroneseovi beskonačni brojevi nemaju nikakve veze s Cantorovim transfinitnim ordinalima.

implicitno pretpostavljen (*das einzige, in dem das fünfte Axiom des Archimedes nicht durchgängig vorausgesetzt ist*).“ (v. *Vorwort* u Veronese 1894: iii, moj kurziv)

Ranije sam već istaknuo da je Poincaréova pogreška pridonijela tomu da se Veronese počeo percipirati kao Cantorov epigon, a Cantorova aritmetičko-skupovnoteorijska koncepcija kao jedina ozbiljna koncepcija kontinuuma i beskonačnosti, praktički bez stvarne alternative (usp. Popović 2017: 94). Taj moj uvid potvrđuje i jedna Poincaréova opaska iz rada „Le continu mathématique", objavljenog u *Revue de métaphysique et de morale* još 1893. godine (koji je poslije uvršten u četvrto poglavlje *La Science et l'Hypothèse*). Naime, Poincaré ondje poistovjećuje matematički kontinuum s Cantor-Dedekindovim kontinuumom, a potom, govoreći o mogućnosti „kontinuuma trećega reda" (*le continu du troisième ordre*), odnosno nearhimedovskog, infinitezimalima obogaćenog kontinuuma (koji je prvi uveo Veronese, premda to Poincaré ne spominje), kaže:

> „Kontinuum trećega reda do kojega nas vodi razmatranje različitih redova infinitezimalnosti sam je po sebi odveć beznačajan da bi stekao široko prihvaćanje (*est lui-même trop peu utile pour avoir conquis droit de cité*), a i geometri ga smatraju tek pukim kuriozitetom (*les géomètres ne le regardent que comme une simple curiosité*). […] Bilo bi lako ići dalje, ali to bi bila uzaludna igra duha (*un vain jeu de l'esprit*); samo bismo zamišljali simbole bez ikakve moguće primjene (*sans application possible*), a nitko ih nikada ne bi ni uzeo u razmatranje." (Poincaré 1893: 34; Poincaré 1902a: 43)

Dakle, iako Poincaré smatra da je nearhimedovski kontinuum u načelu zamisliv[579], pa samim tim i moguć, ipak ga odbacuje kao puku i praktično neostvarivu apstraktnu mogućnost, i to na sličan način na koji su infinitezimale odbacivali Russell, Peano ili Fraenkel (v. prethodni odjeljak). Zanimljivo je i to da Poincaré, posve u skladu sa svojim kvazikantovskim pristupom filozofiji matematike, odnosno s programom aritmetizacije ili, preciznije, degeometrizacije (usp. Odjeljak [1.3]), ističe kako „ako želimo znati što matematičari podrazumijevaju pod kontinuumom, onda to pitanje ne treba postavljati geometriji" (Poincaré 1893: 26; 1902a: 29). U svjetlu prethodno navedenoga taj se iskaz može pročitati i ovako: ako želimo znati što matematičari podrazumijevaju pod kontinuumom, odgovor ne treba tražiti u Veroneseovoj infinitezimalnoj, odnosno nearhimedovskoj geometriji.

Kao što je Volkert smatrao da je Poincaréov prikaz *Grundlagen* najvažniji dokument za razumijevanje recepcije Hilbertovih ideja, tako smatram da su Poincaréov prikaz i njegovi referati o Hilbertovim doprinosima zasnivanju geometrije jednako važni, ako ne i važniji, za razumijevanje povijesti recepcije *Fondamenti* i Veroneseova *Nachlebena*. Zahvaljujući Poincaréovu autoritetu i utjecaju te brzini transmisije njegovih publikacija o Hilbertu u svim vodećim matematičkim i znanstvenim časopisima, Hilbertovi *Grundlagen* učinili su Veroneseove *Fondamenti* suvišnima[580] i irelevantnima za većinu matematičara, ali i povjesničara i filozofa matematike (usp. Popović 2017: 95). . O tome vrlo ilustrativno svjedoče i sljedeći ulomci iz suvremene literature:

---

[579] U navedenome radu Poincaré na više mjesta koristi glagol *imaginer* i formulacije poput „il n'est pas difficile d'imaginer".

[580] Gordon Fisher bio je nešto blaži kada je rekao da su *Grundlagen* „učinili da [*Fondamenti*] *djeluju* izlišno" (*seem superfluous*) (usp. Fisher 1994: 128, kurziv u izvorniku).

„Giuseppe Veronese, profesor matematike iz Padove, kojem se u literaturi pripisuje uvođenje beskonačno malih brojeva, ograničio se pri formuliranju svojih koncepcija na geometriju. […] Veroneseov pristup nije ostvario nikakav supstantivan utjecaj […] zbog činjenice da je Giuseppe Peano u oštroj recenziji iz 1892. dokazao da je autor [sc. Veronese] zapao u temeljne proturječnosti u svojim definicijama i hipotezama. U drugom radu Peano je, na temelju [argumenata] Cantora i Vivantija, pokazao da su konstantne aktualno beskonačne dužine samoproturječne. […] Dugo je postojala razvojna faza u kojoj je geometrija bila područje na kojem su se nearhimedovske veličine mogle učiniti konkretnima. Impresivan primjer toga jest Hilbert […] i njegove znamenite *Grundlagen der Geometrie*. I doista, upravo ondje raspravlja o nezavisnosti aksioma neprekidnosti od drugih [geometrijskih] aksioma, konstruirajući u tu svrhu nearhimedovske geometrije." (Schubring 2005: 613–14)

„Veronese je pokušao, premda s malo uspjeha, promovirati nearhimedovsku geometriju. […] Ipak, krajnje je dvojbeno da je Hilbert mogao biti uvjeren čudnom mješavinom apstraktne matematike i ontoloških tvrdnji u prilog novoj geometriji kakve su bile iznesene u *Fondamenti*." (Gray 2008: 178, 340)

„Može se reći da moderna geometrija potječe iz Njemačke i Italije, ali se u tim dvjema zemljama proučavala i razvijala s različitim ciljevima. To objašnjava i različite sudbine tih dviju škola: Hilbert je postao slavan, dok su nakon Prvoga svjetskog rata doprinosi talijanskih matematičara najvećim dijelom pali u zaborav. […] Radovi Talijana bili su dvostruko ograničeni: nisu iskoristili potencijal za stvaranje novih geometrija, a uz to nisu uvidjeli ni širi značaj aksiomatske metode. […] Talijani su previdjeli kreativni aspekt aksiomatske metode. […] Nove geometrije i istraživanja u tome području nisu bili dio njihove agende. S Hilbertom je, međutim, bilo posve drukčije. Nove geometrije bile su mu osobito zanimljive. […] Do novih je rezultata došao pronicljivom uporabom onoga što je nazivao aritmetikom dužina, geometrijskim računom s dužinama koji omogućuje njihovo zbrajanje i množenje. Različiti sustavi aksioma generiraju različite aritmetike dužina, a one zatim određuju vrste brojeva koje se mogu prihvatiti kao koordinate [točaka]. […] Hilbert je posebno mjesto posvetio istraživanju Arhimedova aksioma. […] Prije Hilberta postojanje nearhimedovske geometrije osporavala je mala skupina talijanskih matematičara, među kojima je Giuseppe Veronese bio jedini kojega je Hilbert citirao. Njegov je rad bilo teško pratiti, a rad Rodolfa Bettazzija bio je, općenito uzevši, znatno precizniji. No jedino je Hilbert ozbiljno shvatio pitanje kako bi izgledala geometrija u prisutnosti ili odsutnosti Arhimedova aksioma, a to je pitanje potom maestralno razradio njegov student Max Dehn, povezujući ga s neeuklidskim geometrijama." (Gray 2009b: 675–77)

„Veronese (1891, u svojim *Obrisima geometrije* (*sic!*) [* nažalost, ta manjkava knjiga bila je jedini od talijanskih doprinosa zasnivanju geometrije koji je brzo preveden na njemački jezik]) i drugi skrenuli su pozornost na neobičnu ulogu Arhimedova aksioma u izvođenju različitih geometrijskih dokaza. […] Budući da Arhimedov aksiom na čisto aritmetički način osigurava komutativnost množenja, a kako je to [sc. komutativnost], kao što je pokazao Hilbert, ekvivalentno Papusovu teoremu, mogao je konstruirati model nearhimedovske geometrije pomoću nearhimedovske uređene koordinatne domene, kao i model u kojem Papusov teorem ne vrijedi pomoću nekomutativnog koordinatnog prstena. Sve su to plodovi posve novoga

> razumijevanja odnosa između aksiomatsko-sintetičke i analitičke geometrije koje je Hilbert uveo u svojim *Grundlagen*. […] Hilbertu dugujemo uvid i otkriće da odgovarajući koordinatni sustav uvijek proizlazi iz golemoga bogatstva iznimnih međusobnih analogija između određenih geometrijskih teorema i određenih algebarskih svojstava. […] Schur je [u svojim *Grundlagen* – prim. S. P.] referirao na Veroneseovu knjigu, […] međutim, ta je veoma razvučena knjiga praktički nečitljiva (*nearly indigestible*). […] O njoj su se negativno izrazili i Hilbert, Peano te, nekoliko desetljeća poslije, Freudenthal." (Scriba & Schreiber 2015: 504–5, 508)[581]

I tako dalje. Ovo su samo neki od najreprezentativnijih primjera manifestacije Poincaréove dvostruke pogreške u suvremenoj historiografiji matematike, koju su potom preuzeli i ponavljali neki od najutjecajnijih suvremenih povjesničara matematike.[582] Slično kao i u Poincaréovu slučaju, njihov je autoritet pridonio tomu da se prethodno citirani navodi počnu doživljavati kao svojevrsna službena povijest *fin-de-siècle* nearhimedovske matematike, na štetu Veronesea i ranih dvadesetostoljetnih pionira poput Levi-Civite ili Hahna, koji su se nadovezali na njegove rezultate. Stoga ne bi trebalo čuditi što u suvremenoj literaturi možemo pronaći sve više robinsonovskih[583] čitanja povijesnih teorija infinitezimala, ali i na ocjene poput sljedećih:

> „Veroneseov pristup nije ostvario nikakav supstantivan utjecaj." (Schubring 2005: 614)

> „Njegov [sc. Veroneseov] utjecaj čini se da je bio minimalan (*sein Einfluss scheint gering gewesen zu sein*)." (Volkert 2015: 26)

Vjerujem da rekonstrukcija inicijalne faze povijesti recepcije Veroneseovih *Fondamenti*, koju sam proveo u odjeljcima [2.5], [2.6], [2.6.2] i [3], dovoljno jasno pokazuje neutemeljenost takvih ocjena te razloge zbog kojih ih je nužno kritički preispitati i revidirati. Kao što ćemo vidjeti u sljedeća dva odjeljka, njihovu paušalnost najuvjerljivije razotkrivaju upravo dvije najutjecajnije suvremene nearhimedovske teorije – Robinsonova nestandardna analiza i Conway-Ehrlichova teorija nadrealnih brojeva – koje se, u nekim važnim aspektima, mogu promatrati kao realizacije Veroneseovih pionirskih ideja iz *Fondamenti*. Drugim riječima i *pace*

---

[581] Knjiga *5000 Jahre Geometrie* izvorno je objavljena 2000. godine. Ovdje je citiram prema njezinu proširenom engleskom izdanju.

[582] Primjerice, Gert Schubring, koji se ponosi svojom „sofisticiranom historiografskom analizom" (usp. Schubring 2016: 532), glavni je urednik uglednog *International Journal for the History of Mathematics Education* i dobitnik medalje „Hans Freudenthal", koju dodjeljuje ICMI–IMU, za svoje doprinose historiografiji i didaktici matematike; Jeremy Gray glavni je urednik glasovitog *Archive for History of Exact Sciences* i dobitnik nagrade „Otto Neugebauer" Europskoga matematičkog društva (EMS) za doprinose historiografiji matematike; Christoph J. Scriba (1929–2013) bio je predsjednik Međunarodne komisije za povijest matematike (ICHM–IMU/IUHPST), dobitnik nagrade „Kenneth O. May" za doprinose historiografiji matematike te međunarodnoj promidžbi proučavanja povijesti matematike.

[583] Kada kažem „robinsonovskih", ne mislim isključivo na sve i samo one rekonstrukcije devetnaestostoljetne ili još starije infinitezimalne matematike koje se oslanjaju na nestandardnu analizu, nego i na druge suvremene nearhimedovske i/ili nestandardne teorije, poput Schmieden-Laugwitzova Ω-računa, Vopěnkine alternativne teorije skupova, Nelsonove internalne teorije skupova, Lawvere-Bellove glatke infinitezimalne analize, Conway-Ehrlichove teorije nadrealnih brojeva ili pak sasvim novih pristupa, kakav je *teorija brojnosti* (it. *la teoria delle numerosità*, eng. *numerosity theory*), koju od druge polovice 1990-ih razvija Vieri Benci.

Ehrlichu, vidjet ćemo da Veroneseovi doprinosi ipak nisu u potpunosti pali u zaborav (Ehrlich 2006: 67).[584]

[584] Sadržaj ovoga odjeljka u najvećoj se mjeri temelji na predavanju „Poincaré's Double Mistake and the Reception History of Veronese's *Fondamenti di Geometria*", koje sam održao na godišnjoj konferenciji Britanskoga društva za povijest matematike (BSHM) na Sveučilištu u Oxfordu 2.3.2024., kao i na predavanju „Kritičko preispitivanje Poincaréove uloge u istoriji recepcije infinitarne matematike", koje sam, na prijedlog prof. Miodraga Raškovića, održao na Seminaru za vjerojatnosne logike Matematičkog instituta SANU 18.4.2024.

ČETVRTI DIO

[4] Uvod: recepcija Veroneseovih ideja u suvremenoj nearhimedovskoj matematici

Analiza inicijalne faze recepcije Veroneseovih rezultata u vezi sa zasnivanjem nearhimedovske geometrije i, općenitije uzevši, nearhimedovskih uređenih geometrijskih i algebarskih struktura, koju sam proveo u prethodna dva dijela disertacije (usp. naročito Odjeljak [3]), trebala je uvjeriti čitatelja u opravdanost Ehrlichove ocjene kojom sam započeo izlaganje u uvodu, naime, da mnoge Veroneseove koncepcije, ideje i uvidi u biti prožimaju ono što je Bernd Arnold još 1988. godine nazvao *Kontinuitätsprogramm* 20. stoljeća (Arnold 1988) – dugi niz alternativnih ili nestandardnih teorija kontinuuma ili, riječima Hourye Sinaceur, „algebarskih tretmana kontinuuma" (*traitements algébriques du continu*) (Sinaceur 1994: 191) – koji je naposljetku rezultirao dvjema najutjecajnijim suvremenim nearhimedovskim teorijama: Robinsonovom nestandardnom analizom i teorijom hiperrealnih brojeva iz 1960-ih te Conwayevom teorijom nadrealnih brojeva iz 1970-ih, koju je sâm Ehrlich, počevši od ranih 1990-ih pa sve do danas, razvio u takozvanu teoriju apsolutnoga kontinuuma, čiji sam naziv očito upućuje upravo na Veroneseovu teoriju apsolutnoga kontinuuma zasnovanu u razdoblju između 1889. i 1891. godine. Glavni cilj u sljedeća dva odjeljka bit će objasniti kako su nastale te dvije nove vrste brojeva – hiperrealni i nadrealni – u kakvu su međusobnom odnosu njima pripadajuća polja $^*\mathbb{R}$ i $\mathbf{No}$, te kako se polja $^*\mathbb{R}$ i $\mathbf{No}$ odnose prema standardnom Cantor-Dedekindovu aritmetičkom kontinuumu, odnosno prema uređenom polju $\mathbb{R}$ realnih brojeva. Čisto ontološki promatrano, vidjet ćemo da infinitezimali Robinsonova sustava ne postoje *na isti način* na koji postoje infinitezimali Conway-Ehrlichova sustava, odnosno, drugim riječima, da imaju *bitno različit ontološki status*.

[4.1] *Leibniz vindicatus*. Robinsonova nestandardna analiza (NSA) i teorija hiperrealnih brojeva

Činjenica je da su tvorci nestandardnoga pristupa analizi (Schmieden, Laugwitz i Robinson) smatrali kako njihov rad na Ω-računu i nestandardnoj analizi ne otvara samo nove mogućnosti za razumijevanje povijesnoga razvoja analize, nego pruža i temelj za kritičku reevaluaciju i reviziju dotadašnje službene historiografije nearhimedovske matematike (usp. Laugwitz 2001: 128 i Robinson 1966: 4; usp. i Ch. X, §10.1; v. i Odjeljak [2.1]). Međutim, mnogi matematičari te povjesničari i filozofi matematike tu su okolnost protumačili odveć pojednostavljeno, kao da su tvorci novoga pristupa analizi tek u drugoj polovici 20. stoljeća konačno pokazali da je infinitezimale moguće uvesti na konzistentan način te da bi se, u svjetlu toga rezultata, *ex post facto* eventualno mogle – a prema nekima i morale – „retrospektivno opravdati" i reinterpretirati „dubiozne i nekonzistentne prakse naslijeđene iz prošlosti" (sec. Urquhart 2008: 425). Na problematičnost takvoga pristupa već sam upozorio u prethodnim poglavljima. No, povijesno je zanimljivo da još od Robinsonova

mentora, već spomenutoga Abrahama Fraenkela, prevladava svojevrsna predrasuda prema kojoj nam je tek nestandardna analiza „otvorila oči“ u pogledu mogućnosti neproturječnoga i rigoroznoga uvođenja infinitezimala. Na jednome mjestu u svojoj autobiografiji *Lebenskreise. Aus den Erinnerungen eines jüdischen Mathematikers* (1967) Fraenkel se prisjeća studentskih dana u Njemačkoj i, s tim u vezi, susreta s početka 1910. godine s marburškim neokantovcima okupljenima oko Cohenove knjige *Das Prinzip der Infinitesimal-Methode* iz 1883. godine. Ta epizoda otkriva da je Fraenkel već tada zauzeo antiinfinitezimalističko stajalište koje će poslije zastupati i u svojoj *Einleitung in die Mengenlehre* (usp. Odjeljak [3.1.2]), kao i kantorovsko uvjerenje da infinitezimali ne mogu imati nikakve veze s Cantorovim transfinitnim ordinalima (usp. Fraenkel 2016: 82–85). Doduše, na istome je mjestu Fraenkel također istaknuo i sljedeće: „sasvim nedavno, 1960. godine, moj nekadašnji student Abraham Robinson na krajnje je nevjerojatan, ali legitiman način uspio *obraniti čast aktualnih infinitezimala*“ (*op. cit.*, str. 85, moj kurziv). Upravo se taj Fraenkelov stav danas može pronaći u velikome broju povijesno-filozofskih radova, kao i u udžbenicima posvećenima nestandardnoj analizi. Tako, primjerice, Wilhelmus A. J. Luxemburg (1929–2018) i Keith Stroyan u uvodu poznatoga udžbenika *Introduction to the Theory of Infinitesimals* (1976) ističu da je tek Robinson konstruiranjem hiperrealnih brojeva pružio prvo „potpuno i zadovoljavajuće rješenje Leibnizova problema“, pokazavši da se pojmovi „beskonačno malo“ i „beskonačno veliko“ mogu precizno razjasniti (Stroyan & Luxemburg 1976: 3, 5), a istoga je stajališta bio i H. Jerome Keisler kada je u predgovoru svojemu popularnom udžbeniku *Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach* (prvo izdanje, 1976) napisao da je „Robinson 1960. godine pronašao način da učini infinitezimale rigoroznima“ (citirano prema trećem, revidiranom izdanju, Keisler 2012: iv). U istome je duhu Luxemburg u radu „Robinson's Nonstandard Analysis and its Influence on Mathematics“ napisao:

> „Leibnizov cilj [uspostavljanja] matematički neproturječne teorije infinitezimala ostvaren je 1960. godine kada je Abraham Robinson pokazao da se Leibnizov program može realizirati na matematički valjan način u terminima nestandardnih modela teorije realnih brojeva.“ (Luxemburg 1990: 13–14)

Slična se tvrdnja može pronaći i u filozofskoj literaturi. Tako je, primjerice, Graham Priest u natuknici „Numbers“ u *Routledge Encyclopedia of Philosophy* napisao je da su „infinitezimali rehabilitirani kao savršeno valjani brojevi“ zahvaljujući Robinsonovoj NSA te da je tek „postojanje nestandardnih modela analize učinilo infinitezimale legitimnim“ matematičkim entitetima (navedeno prema Ehrlich 2006: 3, nap. 5).[585] Slična sugestija može se pronaći i u nedavnoj natuknici „Infinity“ u *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Easwaran *et al.* 2025), gdje se u §3.4 („Infinitesimals and hyperreals“) navodi da su, „iako su se te veličine [sc. infinitezimali] stoljećima smatrale problematičnima, *tek posljednjih desetljeća* rigorozno proučeni neki matematički entiteti koji posjeduju svojstva [infinitezimala].“ (moj kurziv) Štoviše, u §3.4.2 („Non-standard analysis and smooth infinitesimal analysis“) eksplicitno se tvrdi da je „sredinom 20. stoljeća Robinson (1966) pokazao kako je moguće rigorozno definirati infinitezimale“. Mogli bi se navesti i brojni drugi primjeri iste vrste. Problem s

[585] Povijesno promatrano, to naprosto nije točno – infinitezimali su rigorozno definirani već krajem 19. i početkom 20. stoljeća.

takvim opaskama jest opasnost da ih, prije svega oni čitatelji koji nisu upoznati s *fin-de-siècle* nearhimedovskom matematikom, shvate doslovno i tako pomisle ili steknu dojam da se u razdoblju između (a) Leibnizove i Eulerove infinitezimalne analize te vajerštrasovske ε, δ reforme analize i eliminacije infinitezimala u drugoj polovici 19. stoljeća i (b) nastanka nestandardne analize krajem 1950-ih i početkom 1960-ih nije dogodio nikakav povijesno ili filozofski relevantan pomak u shvaćanju nearhimedovskih veličina te da je tek zahvaljujući NSA pojam infinitezimala učinjen matematički smislenim. Drugim riječima, postoji stvarna opasnost da se zanemari upravo ono formativno razdoblje između kasnih 1880-ih i ranih 1900-ih, kada su u geometriji i algebri ostvareni fundamentalni rezultati u vezi s nearhimedovskim strukturama, na koje će se poslije nadovezati Schmieden, Laugwitz i Robinson, kao i matematičari i filozofi koji su nakon objavljivanja NSA preuzeli na sebe popularizaciju Robinsonove nove metode (Luxemburg, Keisler, Stroyan, Lakatos i mnogi drugi).[586] Dakle, povijesno gledano, takva slika naprosto nije točna. Infinitezimali nisu prvi put konzistentno i rigorozno uvedeni ili definirani tek 1960-ih. Naprotiv, matematičari poput Veronesea i Levi-Civite to su učini već potkraj 19. stoljeća. To je ispravno primijetio i na to upozorio i sâm Luxemburg kada je u uvodu drugoga sveska Robinsonovih sabranih djela, posvećenoga nestandardnoj analizi i filozofiji, napisao:

> „Jedan veoma važan aspekt nestandardne analize […] tiče se [činjenice] da se ova nova metoda [sc. **NSA**] **ne sastoji samo u neproturječnom pridodavanju infinitezimala realnim brojevima**. **To je već uspješno učinjeno**. **Tullio Levi-Civita**, **odgovarajući na pitanje koje je Veronese postavio u vezi s** [**nearhimedovskom**] **geometrijom**, **1890-ih je konstruirao nearhimedovsko totalno uređeno polje** čiji su elementi formalni redovi potencija. U veoma ranoj fazi razvoja nestandardne analize **Robinson je smatrao da mora postojati definitivna veza između njegovih nestandardnih brojčanih sustava i sustava Veronesea**, Levi-**Civite i drugih**." (citirano prema *Collected Works*, Vol. 2: *Nonstandard Analysis and Philosophy*, Luxemburg & Körner 1979: xli, moja emfaza dodata podebljanim slovima)

Dakle, pojam infinitezimala kao elementa nekog nearhimedovskog uređenog polja koji susrećemo kod Robinsona upravo je *isti onaj pojam* kojim su već uspješno operirali Veronese, Levi-Civita, Hahn i drugi pioniri nearhimedovske matematike s kraja 19. i početka 20. stoljeća (usp. odjeljke [2.6], [2.6.1] i [2.6.2]). Samim time to znači da, povijesno gledano, Robinsonova opaska iz uvoda u *Non-Standard Analysis* (1966), prema kojoj je „razvoj teorije

[586] Na to je upozorio i Arnold još 1980-ih, istaknuvši da između Cantorove teorije skupova iz 1870-ih i „renesanse infinitezimala" 1960-ih postoje brojni radovi koji se u širem smislu mogu podvesti pod gore navedeni *Kontinuitätsprogramm*. Podsjećanja radi (v. Odjeljak [3]), riječ je, primjerice, o radovima: Stolz (1883, 1885), Veronese (1889, 1891/1894), Levi-Civita (1892/93, 1898), Hölder (1901), Geissler (1904), Bernstein (1904), Schoenflies (1906), Vahlen (1907), itd. Arnold je u svojoj potrazi za „nedostajućim karikama" između Cantora i Robinsona osobito isticao značaj Norberta Wienera (1894–1964), koji se bavio teorijom mjere (v. posebno njegov rad „A New Theory of Measurement: A Study in the Logic of Mathematics", Wiener 1921), Ludwiga Nedera (1890–1960), koji je još 1940-ih pokušao „obraniti čast diferencijala" (*ungewöhnlichen Versuch zur Ehrenrettung der Differentiale* – v. njegov rad „Modell einer Leibnizischen Differentialrechnung mit aktual unendlich kleinen Größen sämtlicher Ordnungen", Neder 1941/43), i poljskog filozofa i logičara Leona Chwisteka (1884–1944) (Arnold 1988, §1 „Infinitesimalen zwischen Cantor und der Nonstandard-Analysis", str. 250–51; v. također §§3–5 za rekonstrukciju Chwistekovih, Wienerovih i Nederovih doprinosa).

infinitezimala gotovo tapkao u mjestu tijekom prethodnih sto pedeset godina", odnosno od početka 19. stoljeća, naprosto nije opravdana (usp. Robinson 1966: 4).

Robinsonov ključni doprinos sastoji se u rješenju jednog od najstarijih otvorenih matematičkih problema, Leibnizova problema konzistentnog zasnivanja infinitezimalnog računa (usp. Mijajlović *et al.* 2014: 9). Podsjećanja radi, Russell je još u *Principles of Mathematics* iz 1903. trijumfalno istaknuo da je „pokazano da infinitezimalni račun više ni na koji način nije povezan s infinitezimalima" (Russell 1903, §249). Tek je Robinson pokazao kako se s infinitezimalima koje su prethodno uveli Veronese, Levi-Civita i Hahn može uspješno, egzaktno i neproturječno provesti cjelokupna matematička analiza, čime je dokazao i korisnost nove nestandardne metode, uspješno odgovorivši na Fraenkelov test (usp. Odjeljak [3.1], nap. 560). Pojednostavljeno rečeno, Robinsonov glavni cilj nije bio razjasniti pojam beskonačno maloga niti uvesti infinitezimale na neproturječan način, nego pokazati kako je moguć *stvarni infinitezimalni račun*, odnosno analiza zasnovana na Veroneseovoj, to jest *fin-de-siècle* teoriji infinitezimala. Pogledajmo kako je Robinson u tome uspio i zašto se njegov rezultat s pravom može smatrati jednim od najznačajnijih rezultata u logici 20. stoljeća. O tome možda najbolje svjedoči sljedeća Gödelova ocjena:

> „Abrahama Robinsona iznimno cijenim kao matematičkoga logičara. Zapravo, u području primjene matematičke logike u samoj matematici, izuzme li se apstraktna teorija skupova, on je vjerojatno najistaknutiji među živućim logičarima. Čini mi se da je osobito njegova teorija infinitezimala i njezina primjena u rješavanju problema iz analize od najveće moguće važnosti. Vjerujem da će ta teorija [sc. NSA], kada bude potpunije razvijena, imati vrlo važnu ulogu u matematici." (Gödelov odgovor na pismo Michaela Atiyaha u vezi s mogućim izborom Robinsona za člana Kraljevskog društva; Gödelov *Nachlass*, dokument br. 011948, citirano prema *Collected Works*, Vol. V, Feferman *et al.* 2003: 192)[587]

Kao što je i sam istaknuo, Robinsonu je u jesen 1960. godine prvi put sinula ideja da bi oslanjanjem na pojedine „koncepcije i metode suvremene matematičke logike" mogao uspostaviti „odgovarajući [konceptualno-logički] okvir za razvoj diferencijalnog i integralnog računa s beskonačno malim i beskonačno velikim brojevima" (Robinson 1966: vii). O toj je ideji već u studenome 1960. održao predavanje u Princetonu, zatim u siječnju 1961. na godišnjem skupu Asocijacije za simboličku logiku (ASL), a iste se godine ubrzo pojavio i njegov prvi, programatski rad, naslovljen jednostavno „Non-Standard Analysis" (*Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.*, Ser. A, Vol. 64). Robinsonovo zanimanje za logiku i njegovo kasnije intenzivno bavljenje tom disciplinom uvelike su potaknuta Fraenkelovim predavanjima na Hebrejskom sveučilištu u Jeruzalemu, kao i Fraenkelovim zanimanjem za probleme zasnivanja matematike, osobito teorije skupova (usp. Dauben 1995: 46). Međutim, za razliku od većine matematičara s početka 20. stoljeća, koji su logiku promatrali isključivo *instrumentalno* – i to, u pravilu, samo onda kada su smatrali da bi im mogla pomoći izbjeći neke od paradoksa Cantorove naivne teorije skupova – Robinsonovo zanimanje za logiku, kako je istaknuo Dauben, nadilazilo je tradicionalna metamatematička pitanja, poput

[587] Gödel je čak smatrao da bi upravo Robinson trebao biti njegov nasljednik u IAS-u u Princetonu. Za više pojedinosti o njihovu međusobnom odnosu i korespondenciji v. Gödelove *Collected Works*, Vol. V, Feferman *et al.* 2003: 191–206. Također v. i Daubenovu biografiju A. Robinsona, Dauben 1995, osobito poglavlja 8–9.

neproturječnosti ili potpunosti formalnih teorija. Njega je prije svega zanimalo na koje se sve načine logika može izravno primijeniti u matematici, radi rješavanja sasvim konkretnih matematičkih problema (*op. cit.*, Ch. 5, odjeljak „Robinson's 'Amazing' Return to Mathematical Logic", str. 156). Tijekom druge polovice 1940-ih Robinsonov je istraživački interes bio usmjeren ponajprije na metamatematiku algebre, odnosno na analizu algebarskih struktura i njihovih uzajamnih odnosa te na, njegovim riječima, „razvijanju algebre sredstvima simboličke logike".

Robinson je već u toj ranoj fazi, dok je radio na svojoj disertaciji *The Metamathematics of Algebraic Systems*[588], imao priliku proučavati algebarske strukture poput grupa, prstenova i polja kojima su se, kao što smo vidjeli u drugom dijelu, još 1890-ih i početkom 20. stoljeća bavili Stolz, Veronese, Levi-Civita, Hölder i Hahn. Nakon obrane disertacije Robinson je poslao sažetak njezina dijela Programskom odboru Sekcije za logiku, filozofiju i zasnivanje matematike Međunarodnoga kongresa matematičara, koji je u ljeto 1950. godine organiziran na Harvardu. Impresionirani sadržajem njegova rada, organizatori su ga pozvali da održi plenarno tridesetominutno predavanje na kongresu.[589] Uz Robinsona, u okviru Sekcije za logiku, filozofiju i zasnivanje matematike, kojom je predsjedao Alfred Tarski (1901–1983), dok je L. E. J. Brouwer bio izabran za počasnoga predsjednika, pozvana su predavanja održali još Thoralf Skolem (1887–1963), Stephen Cole Kleene (1909–1994) i sâm Tarski. Robinsonovo je predavanje izvorno bilo najavljeno pod naslovom „Applied Symbolic Logic", no u kongresnom je zborniku naslov dodatno preciziran u „On the Application of Symbolic Logic to Algebra" (usp. *Collected Works*, Vol. 1, Keisler 1979: 3–11). Prema Seligmanovu mišljenju, Robinson se upravo u to vrijeme definitivno opredijelio za logiku – „logika će dominirati njegovim istraživanjima" (*op. cit.*, *ad loc.*). Robinsonova je disertacija ubrzo potom objavljena kao knjiga pod naslovom *On the Metamathematics of Algebra* (1951). U predgovoru drugom, znatno prerađenom i proširenom izdanju, objavljenom pod naslovom *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra* (1963), Robinson je istaknuo da se metamatematika algebre bavi „analizom metoda apstraktne algebre", odnosno, preciznije, „analizom i razvojem algebre metodama matematičke logike" (usp. §1.1), među kojima se osobito ističu *modelnoteorijske metode*:

> „Teorija modela bavi se odnosima između svojstava rečenica ili skupova rečenica specificiranih nekim formalnim jezikom, s jedne strane, i matematičkih struktura ili skupova struktura koje zadovoljavaju te rečenice, s druge strane. Budući da su metode kojima se služi teorija modela često algebarske naravi […] te da su algebarske teorije polja, prstenova, grupa itd. zbog svoje transparentne strukture osobito prikladne za detaljnu logičku analizu, teorija modela i metamatematika algebre prirodno se međusobno nadopunjuju." (Robinson 1963, §1.1, str. 1)

Štoviše, posljednja tri odjeljka ove Robinsonove knjige posvećena su razradi rezultata iz prethodno spomenutoga rada iz 1961., u kojem je Robinson već primijenio teoriju modela

[588] Obranjena na Birkbeck Collegeu u Londonu 1949. godine pred povjerenstvom koje su činili Paul (Pál) Dienes (1882–1952) (mentor), Max Newman (1897–1984) i George A. Barnard (1915–2002).

[589] V. Seligmanovu „Biography of A. Robinson" u Robinsonovim *Collected Works*, Vol. 1: *Model Theory and Algebra*, Keisler 1979: xxi, kao i Dauben 1995, poglavlje 5, odjeljak „The International Congress of Mathematicians: Cambridge 1950", str. 168–173.

za uvođenje nestandardne analize: „ovo je nova primjena teorije modela koja pruža operativan račun s infinitezimalima i koja, čini se, ima znatan potencijal.“ (*op. cit.*, str. vi) Robinsonov pristup, dakle, nije bio geometrijski poput Veroneseova (v. odjeljke [2.6] i [2.6.1]), niti pak čisto algebarski poput, primjerice, Levi-Civitina ili Hahnova (usp. Odjeljak [2.6.2]), nego algebarsko-logički ili, bolje rečeno, izrazito modelnoteorijski. Što je to točno podrazumijevalo i u čemu se sastojala ta nova metodologija?

Osnovna je zamisao sljedeća: *proširiti* univerzum klasične (realne) analize do takozvanoga *nestandardnog* ili *Leibnizova univerzuma* koji sadrži infinitezimale i nekantorovski shvaćene beskonačne brojeve (Mijajlović *et al.* 2014: 12). Evo kako je Luxemburg okarakterizirao Robinsonov pristup nestandardnim proširenjima:

> „Grubo govoreći, nestandardni model neke dane matematičke strukture predstavlja odgovarajuće proširenje te strukture dobiveno dodavanjem novih (idealnih) objekata […] koji u modelnoteorijskom smislu imaju ista svojstva kao [i objekti] danoga sustava [odnosno polazne strukture]. Kada to primijenimo na sustav realnih brojeva, takva proširenja, koja imaju ista svojstva kao i realni brojevi, predstavljaju proširenja [uređenoga] polja [realnih brojeva]. Ta su proširenja po svojoj naravi i biti nearhimedovska te stoga sadrže i entitete koji se mogu smatrati beskonačno malima [sc. infinitezimalnima] i one koji se mogu smatrati beskonačno velikima. Budući da ta proširenja predstavljaju modele teorije realnih brojeva, ona (uz odgovarajuću interpretaciju objekata i relacijskih simbola) imaju ista svojstva kao i realni brojevi. Iz toga slijedi da je problem definiranja pravila za kombiniranje tih [novih infinitezimalnih i beskonačnih] brojeva automatski riješen zahvaljujući takvu modelnoteorijskom pristupu. Robinson je upravo takva proširenja [uređenoga] polja [$\mathbb{R}$ realnih brojeva] koristio kako bi zasnovao račun s infinitezimalima.“ (Luxemburg 1990, §II, str. 14)

Dakle, Robinsonova je ideja posve nalik onoj s kojom smo se već susreli u raspravi o Veroneseovim brojevima i o principima permanencije (Odjeljak [2.6.1]): proširiti uređeno polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva do nekoga nearhimedovskog polja koje, pored standardnih odnosno konačnih realnih brojeva, sadrži i neke nove, nestandardne infinitezimalne i beskonačne brojeve, i to tako da se nad svim tim brojevima bez ograničenja mogu provoditi iste algebarske operacije uz očuvanje svih standardnih zakona računanja koji vrijede u $\mathbb{R}$. U tome smislu, ključna razlika između *fin-de-siècle* matematičara i Robinsona ne tiče se toliko samoga cilja koliko metodologije, odnosno načina na koji bi to proširenje trebalo izvesti. No, kako je to rekao Keisler, rigorozna i matematički precizna konstrukcija hiperrealnih brojeva morala je pričekati razvoj moderne logike (Keisler 1994: 208). U literaturi se danas uobičajeno razlikuju dva temeljna pristupa konstrukciji nestandardnih modela analize: Robinsonov izvorni modelnoteorijski pristup, inspiriran Skolemovim rezultatima u vezi s nestandardnim modelima aritmetike, te takozvana skupovnoteorijska konstrukcija pomoću ultraprodukata, koju je 1955. uveo Jerzy Łoś (1920–1998).[590] U nastavku ću slijediti Robinsonov pristup,

[590] Skolem je još 1927. uveo konstrukciju pomoću ultraprodukata radi dobivanja nestandardnog modela aritmetike prvoga reda, a Edwin Hewitt (1920–1999) već se 1948. u radu „Rings of real-valued continuous functions“ oslonio na ultraprodukte kako bi konstruirao hiperrealne brojeve; Hewittu dugujemo i sam naziv

onako kako je izložen u *Non-Standard Analysis* (Robinson 1966)[591]; za alternativni pristup koji se temelji na ultraproduktima v. klasični Luxemburgov udžbenik *Non-Standard Analysis: Lectures on A. Robinson's Theory of Infinitesimals and Infinitely Large Numbers* (Luxemburg 1962).

Ključni rezultat na koji se Robinson oslanja jest takozvani princip konačnosti predikatne logike (odnosno, Robinsonovim riječima, „osnovnoga formalizma matematičke logike"), poznatije kao *teorem kompaktnosti* (usp. Robinson 1966, §1.2, str. 2). Jezik $\mathcal{L}$ logike prvoga reda (ili, jednostavnije rečeno, jezik prvoga reda) sastoji se, kao što je dobro poznato, od sljedećih atomarnih simbola: (i) skupa individualnih konstanti (simboli za individue ili objekte), (ii) skupa individualnih varijabli, (iii) skupa n-arnih relacijskih simbola ($n \geq 1$) tipa $S(_)$ ili $R(_,_,_)$ (gdje n označava broj praznih mjesta u zagradama), (iv) logičkih veznika $(\neg,\vee,\wedge,\Rightarrow,\Leftrightarrow)$, (v) kvantifikatora ili kvantora $(\exists,\forall)$ i (vi) zagrada. Ako je $\mathcal{L}$ neki dani jezik, onda pod teorijom T toga jezika podrazumijevamo svaki skup formula jezika $\mathcal{L}$.[592] Naravno, da bismo T mogli smatrati formalnom ili deduktivnom teorijom u strogome smislu, pored jasno definiranoga jezika $\mathcal{L}$ moraju biti jasno definirani i aksiomi na kojima teorija počiva, kao i pravila izvođenja. Tada, kao što je istaknuo Luxemburg, imamo posla s čistim formalizmom, odnosno s teorijom svedenom na svoje čisto sintaktičke aspekte (Luxemburg 1990: 14–15). To znači da se sredstvima samoga jezika ne može izraziti je li neka dana rečenica, odnosno formula istinita – unutar formalizma može biti riječi samo o *neproturječnosti* T, ne i o *istinitosti* T. Za neku danu teoriju T kažemo da je neproturječna ako se iz nje ne može izvesti ili dokazati eksplicitna proturječnost, $T \nvdash \perp$; nasuprot tomu, iz proturječnih teorija može se izvesti bilo koja formula, po principu *ex falso quodlibet*. Kao što ističe i Robinson (1966, §2.12, str. 48), teorem kompaktnosti usko je povezan s Gödelovim *teoremom potpunosti* (Gödel 1930), koji predstavlja fundamentalni rezultat u vezi s metamatematičkim svojstvom konzistentnosti, odnosno neproturječnosti deduktivnih ili formalnih teorija. Pojednostavljeno, teorem potpunosti tvrdi da pravila zaključivanja iz zadanih aksioma omogućuju izvođenje upravo svih njihovih logičkih posljedica. Preciznije:

(**TEOREM POTPUNOSTI**) Ako je T teorija prvoga reda, onda vrijedi $\underbrace{T \vdash \varphi}_{\text{sint.}}$ AKKO $\underbrace{T \vDash \varphi}_{\text{semant.}}$.

Iz ove se formulacije lijepo vidi kako Gödelov teorem povezuje sintaksu i semantiku, odnosno teoriju dokaza i teoriju modela. Ključna je poanta da se o neproturječnosti formalne teorije može govoriti u dvama međusobno ekvivalentnim smislovima – *sintaktičkom* i *semantičkom*. Sintaktički, teorija T je neproturječna ako ne postoji neka formula φ teorije T takva da je u T moguće dokazati i φ i $\neg\varphi$. Semantički, teorija T je neproturječna ako postoji

„hiperrealni brojevi". Usp. Robinson 1963: 245, Keisler 1994: 208. Luxemburg je počevši od 1962. prvi popularizirao pristup NSA zasnovan na ultraproduktima – v. Stroyan & Luxemburg 1976.

[591] Također ću se oslanjati i na Robinson 1961 i 1963, kao i na Luxemburg 1990 i Keisler 1994. Za jedan od najboljih uvoda u NSA upućujem čitatelja na Mijajlović *et al.* 2014.

[592] Atomarne formule formiramo od atomarnih simbola tako što prazna mjesta u relacijskim simbolima popunjavamo individualnim konstantama ili individualnim varijablama (primjerice, $S(a)$ ili $R(x,y,z)$). Od atomarnih formula potom formiramo takozvane dobro formirane formule primjenom veznika i kvantifikatora (primjera radi, ako su X i Y dobro formirane formule, onda je i $(X \wedge Y)$ također dobro formirana formula).

interpretacija koja aksiome teorije T čini istinitima. Zbog toga se Gödelov teorem potpunosti često formulira i u sljedećem, popularnijem obliku koji dugujemo Leonu Henkinu (1921–2006):

(**TEOREM O EGZISTENCIJI MODELA**) Teorija T sintaktički je neproturječna ($T \nvdash \bot$) AKKO T ima model ($T \nvDash \bot$) (Henkin 1949, usp. i Robinson 1966, §2.5).[593]

„Model" je osnovni pojam teorije modela, a sinonim za riječ „model" jest „relacijsko-operacijska struktura". Drugim riječima, *model* je svaka uređena četvorka, to jest struktura $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{R}, \mathcal{F}, C \rangle$ gdje je M neprazan skup koji nazivamo domenom, $\mathcal{R}$ skup relacija na M, $\mathcal{F}$ familija operacija na M, a C skup konstanti domena M, $C \subseteq M$ (možemo reći da su elementi skupa C konstante strukture $\mathfrak{M}$). Naravno, svaki je model uvijek model nekoga jezika $\mathcal{L}$, odnosno njegova *interpretacija*.[594] Teorem kompaktnosti neposredna je posljedica teorema potpunosti:

(**TEOREM KOMPAKTNOSTI**) Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$. Ako svaki konačni podskup teorije T ima model, tada i sama teorija T ima model (Mijalović *et al.* 2014, TEOREMA 6.3, str. 109).[595]

Da bi bilo jasnije na koji je način teorem kompaktnosti omogućio Robinsonu zasnivanje NSA, potrebno je najprije uočiti važnu razliku između dviju vrsta formalnih odnosno deduktivnih teorija (aksiomatskih sustava). Naime, možemo razlikovati *one-model theories* i *many-model theories* (sec. Fraenkel, Bar-Hillel & Levy 1973: 298), odnosno teorije koje *jedinstveno određuju* (opisuju, definiraju ili karakteriziraju) *jednu* matematičku strukturu od onih teorija koje određuju *više* struktura ili čitavu klasu struktura tako što karakteriziraju svojstva zajednička različitim matematičkim strukturama. Teorije prve vrste za krajnji cilj imaju dokazivanje svih istina o toj jednoj strukturi, dok teorije druge vrste za krajnji cilj imaju dokazivanje svih onih istina koje vrijede u svim strukturama dane klase struktura. Primjerice, aksiomatski sustavi za teoriju grupa ili teoriju polja, kojima smo se bavili u odjeljcima [2.6] i

---

[593] U Robinson 1963, §1.5.4. nalazimo sljedeću formulaciju: svaki neproturječan skup rečenica K jezika $\mathcal{L}$ ima model.

[594] Kao što smo već vidjeli, jezik $\mathcal{L}$ predstavlja uniju triju međusobno disjunktnih skupova – skupa relacijskih simbola, skupa operacijskih (ili funkcijskih) simbola i skupa simbola konstanti, $\mathcal{L} = \mathrm{Rel}_{\mathcal{L}} \cup \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}} \cup \mathrm{Con}_{\mathcal{L}}$. Za svaki jezik $\mathcal{L}$, na skupu $\mathrm{Rel}_{\mathcal{L}} \cup \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}}$ definirana je funkcija $\mathrm{ar} : \mathrm{Rel}_{\mathcal{L}} \cup \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$ koja svakom znaku $S \in \mathrm{Rel}_{\mathcal{L}} \cup \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}}$ pridružuje neki prirodan broj $\mathrm{ar}(S)$, takozvanu duljinu ili arnost znaka S. Neka je zadan neki jezik $\mathcal{L}$ i neka je M neki neprazan skup. Tada je interpretacija jezika $\mathcal{L}$ na skupu M svaka funkcija (preslikavanje) $\mathcal{I}_M$ s domenom $\mathcal{L}$ koja svakom relacijskom simbolu $R \in \mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}$ pridružuje jednu $\mathrm{ar}(R)$-arnu relaciju skupa M ($\mathcal{I}_M(R) \subseteq M^{\mathrm{ar}(R)}$), svakom funkcijskom simbolu $F \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}}$ pridružuje jednu $\mathrm{ar}(F)$-arnu operaciju skupa M ($\mathcal{I}_M(F) \colon M^{\mathrm{ar}(F)} \to M$) i svakoj konstanti $c \in \mathrm{Con}_{\mathcal{L}}$ jedan element skupa M ($\mathcal{I}_M(c) \in M$). Model jezika $\mathcal{L}$ nad nepraznim skupom M jest struktura $\mathfrak{M} = (M, \{\mathcal{I}_M(R) | R \in \mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}\}, \{\mathcal{I}_M(F) | F \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}}\}, \{\mathcal{I}_M(c)\} | c \in \mathrm{Con}_{\mathcal{L}})$, gdje je $\mathcal{I}_M$ neka interpretacija jezika $\mathcal{L}$ na skupu M. Kao što možemo vidjeti, svaki model nekog jezika jednoznačno je određen skupom M i interpretacijom $\mathcal{I}_M$ toga jezika na zadanom skupu (usp. Mijajlović *et al.* 2014, §5.1, str. 90).

[595] U *Non-Standard Analysis*, Robinson je teorem kompaktnosti formulirao preko pojma neproturječnosti: ako je K skup rečenica takvih da je svaki konačni podskup od K neproturječan, tada je i skup K neproturječan (Robinson 1966, §2.5.1). Dakle, skup rečenica formalnoga jezika konzistentan je ako i samo ako je konzistentan svaki njegov konačni podskup (usp. Luxemburg 1990: 15).

[2.6.3], imaju mnoge *neizomorfne modele*. S druge strane, Dedekind-Peanovi aksiomi za elementarnu aritmetiku (teoriju prirodnih brojeva)[596] ili sustavi aksioma za elementarnu euklidsku geometriju jedinstveno određuju te matematičke teorije, odnosno *imaju jedinstvene modele do na izomorfizam*. Takvi aksiomatski sustavi, odnosno formalne (deduktivne) teorije čiji su svi modeli izomorfni nazivaju se *kategoričkima* ili *monomorfnima*.[597] Kategoričnost, zajedno s neproturječnošću i potpunošću, predstavlja jedno od triju metamatematičkih svojstava koja bi, prema Hilbertovu programu, u idealnom slučaju trebala posjedovati svaka formalna teorija (usp. Fraenkel, Bar-Hillel & Levy 1973, Ch. V, §§1, 4).

Kada su krajem 19. stoljeća otkriveni aksiomatski sustavi poput Dedekind-Peanove aritmetike, matematičari poput Hilberta vjerovali su da će (apsolutna) kategoričnost poslužiti kao osnova za definitivnu klasifikaciju teorija na jednomodelne i višemodelne. Međutim, Leopold Löwenheim (1878–1957) i Thoralf Skolem već su početkom 20. stoljeća pokazali da je kategoričnost neke dane formalne teorije presudno ovisi o *prirodi njezine formalizacije* (usp. Luxemburg 1990: 16). Naime, kao što je poznato, pri aksiomatizaciji određenih matematičkih teorija možemo se služiti ili *jezikom prvoga reda* ili pak *jezikom višega reda*, ovisno o tome dopuštamo li kvantificiranje samo nad individuama ili pak i nad skupovima individua, familijama tih skupova i tako dalje. Primjerice, svi aksiomi teorije grupa iz Odjeljka [2.6] su formulirani jezikom prvoga reda. Nasuprot tomu, Dedekind-Peanova aksiomatizacija prirodnih brojeva, kao i aksiomatizacija uređenoga polja $\mathbb{R}$ realnih brojeva iz Odjeljka [2.6.3], sadržavaju aksiome koji se ne mogu formulirati jezikom prvoga reda. To primjerice vrijedi za aksiom indukcije, Arhimedov aksiom ili Dedekindov aksiom potpunosti (i sve njemu ekvivalentne formulacije) koji očito nisu prvoga reda budući da njihovo iskazivanje zahtijeva kvantificiranje nad skupovima (v. nap. 596; usp. Robinson 1966, §2.6). Temeljni rezultat Löwenheima i Skolema pokazuje da se svaki sustav aksioma koji se može formulirati jezikom prvoga reda[598], a kojim želimo okarakterizirati neku strukturu koja se sastoji od beskonačno mnogo objekata poput, primjerice, prirodnih ili realnih brojeva, nužno odnosi i na mnoge druge neintendirane strukture, koje su bitno različite od strukture koju smo inicijalno željeli okarakterizirati (v. Löwenheim 1915 te Skolem 1922 i 1934). Drugim riječima, teorije prirodnih ili realnih brojeva prvoga reda *nisu kategoričke*, što znači da imaju modele čiji univerzum, uz standardne prirodne odnosno realne brojeve, sadrži i neke druge, *nestandardne* prirodne odnosno realne brojeve (Fraenkel, Bar-Hillel & Levy 1973: 299; usp. i Luxemburg 1990, *ad loc.*). Jednostavnije rečeno, postojanje *nestandardnih modela* elementarne aritmetike i

---

[596] Pod ovime mislim na sve aksiome osim aksioma indukcije, koji je jedini formuliran jezikom drugoga reda budući da je za njegovu formulaciju potrebno kvantificirati ne samo nad individuama nego i nad skupovima, $(\forall A \subseteq \mathbb{N})[(0 \in A \wedge (\forall n)(\dots]$. Kako bismo ostali na razini jezika prvoga reda, aksiom indukcije možemo zamijeniti slabijom verzijom, takozvanom *shemom aksioma indukcije*: $[\varphi(0) \wedge (\forall n)(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(s(n)))] \Rightarrow (\forall n)\varphi(n)$, gdje je φ proizvoljna formula s jednom slobodnom varijablom.

[597] Ovaj naziv dugujemo Veblenu (Veblen 1904, usp. Luxemburg 1990: 16).

[598] Arsenijević je ispravno primijetio da je u trenutku kada je Löwenheim prvi put formulirao teorem koji danas nosi njegovo i Skolemovo ime jedan od glavnih ciljeva matematičara bio formulirati, kao formalne teorije prvoga reda, teoriju skupova, teoriju elementarne aritmetike i teoriju realnih brojeva, odnosno, općenitije uzev, teoriju aritmetičkoga kontinuuma (i to ili u okviru formalizirane teorije skupova ili pak neovisno o njoj). U skladu s Hilbertovim programom, od svih se tih teorija očekivalo da budu konzistentne, potpune i kategoričke (usp. Arsenijević 2012, §4.3.1, str. 66).

elementarne teorije kontinuuma, neizomorfnih intendiranim modelima, počiva na nekategoričnosti tih formalnih teorija (usp. Popović 2016, §4.4). Značajna i za naše potrebe u ovom odjeljku veoma zanimljiva posljedica Löwenheim-Skolemova teorema[599] upućuje na nemogućnost formalne teorije prvoga reda da formalno razluči ono što je inače razlučivo u metateoriji[600], primjerice nearhimedovsku od arhimedovske strukture koja predstavlja intendirani model teorije realnih brojeva (usp. Arsenijević 2012: 67).[601]

I sâm je Robinson, naravno, bio svjestan te i drugih posljedica Löwenheim-Skolemova teorema, koje su se od 1930-ih povezivale sa slabošću (ograničenom izražajnom snagom) ili neadekvatnošću jezika prvoga reda za formalizaciju teorije skupova, teorije brojeva i analize, odnosno teorije kontinuuma.[602] U *Non-Standard Analysis* istaknuo je da se, premda se aksiomi kojima se opisuju pojedine algebarske strukture, poput grupa ili polja, mogu formulirati jezikom prvoga reda, „velik dio zanimljivih dijelova teorije [tih struktura] u velikoj mjeri proteže izvan [onoga što je moguće iskazati] resursima jezika prvoga reda" (Robinson 1966, §2.6, str. 19). Upravo zato što mnogi zanimljivi dijelovi matematike, poput teorija prirodnih ili realnih brojeva, podrazumijevaju ne samo kvantificiranje nad individuama nego i nad skupovima, relacijama i funkcijama te stoga zahtijevaju resurse jezika drugoga reda, Robinson se opredijelio da i strukture $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ promatra kao strukture višega reda. Pogledajmo kako je to učinio i kako mu je to omogućilo da okarakterizira sustav $^*\mathbb{R}$ hiperrealnih brojeva.

---

599 Löwenheim-Skolemov teorem jedan je od najvažnijih ranih rezultata teorije modela jer se upravo njime utvrđuju svojstva modela formalnih teorija i njihove kardinalnosti (pri čemu se pod kardinalnošću nekog modela $\mathfrak{M}$, naravno, podrazumijeva kardinalnost njegove domene, odnosno skupa M). Löwenheim-Skolemov teorem predstavlja posljedicu teorema kompaktnosti, a samim time i teorema potpunosti. Moguće ga je formulirati na nekoliko različitih načina (a te se formulacije u pravilu razlikuju po jačini). Jedna od standardnih, općih formulacija glasi:

(LÖWENHEIM-SKOLEMOV TEOREM) Ako teorija T jezika $\mathcal{L}$ prvog reda reda ima beskonačan model, onda teorija T ima modele proizvoljno velike kardinalnosti (Mijajlović *et al.* 2014, TEOR. 6.5, str. 110).

U literaturi se najčešće razlikuju dvije inačice teorema, takozvani *upward* i *downward* Löwenheim-Skolemov teorem (v. Fraenkel, Bar-Hillel & Levy 1973, Ch. V, §5). Ono što je za nas ovdje najrelevantnije jest da iz Löwenheim-Skolemova teorema slijedi da nijedna teorija prvoga reda koja ima beskonačan model ne može imati jedinstven model (do na izomorfizam), odnosno, ne može biti kategorička. Prethodno navedena formulacija predstavlja poseban slučaj ovoga općenitijega teorema:

(LÖWENHEIM-SKOLEM-TARSKIJEV TEOREM): svaka teorija prvoga reda T koja ima beskonačan model također ima modele čija je kardinalnost veća od $|\mathcal{L}|$, gdje je $|\mathcal{L}|$ kardinalni broj formula jezika $\mathcal{L}$ (usp. Mijajlović *et al.* 2014: 110).

600 Pritom se u pravilu pretpostavlja da je metajezik kojim se koristimo zadan ZFC teorijom skupova (usp. Luxemburg 1990: 17).

601 Drugim riječima, premda bi iz perspektive Hilbertova programa bilo idealno da sama formalna teorija elementarne aritmetike ili elementarne teorije kontinuuma vlastitim formalnim resursima nekako može razlučiti veoma važnu razliku između arhimedovskih i nearhimedovskih struktura, i to tako da, ako su one prve model formalne teorije, ove druge to nisu, to nije moguće ako je teorija formulirana jezikom prvoga reda.

602 „[M]oglo bi se reći da navodno paradoksalne posljedice Löwenheim-Skolemova teorema ne predstavljaju ništa drugo nego samo upečatljiv primjer slabosti jezikâ prvoga reda za opisivanje struktura u kojima se [ti jezici] interpretiraju." (Arsenijević 2012: 71). Za više pojedinosti o logičko-filozofskim posljedicama Löwenheim-Skolemova teorema v. Arsenijević 2012, §4.4ff.

Neka je $\langle \mathbb{R}, S : S \in \mathfrak{F} \rangle$ model, odnosno relacijsko-operacijska struktura nad poljem realnih brojeva, pri čemu $\mathfrak{F}$ označuje skup svih (konačnoarnih) relacija i funkcija definiranih na $\mathbb{R}$. Neka je nadalje $^*\mathbb{R}$ proširenje polja $\mathbb{R}$, a za svaku n-arnu relaciju ili funkciju $S \in \mathfrak{F}$ neka $^*S$ označuje n-arnu relaciju (funkciju) na $^*\mathbb{R}$ koja predstavlja odgovarajuće proširenje od S. Tada se struktura $\langle {}^*\mathbb{R}, \mathbb{R}, {}^*S : S \in \mathfrak{F} \rangle$ naziva sustavom hiperrealnih brojeva ako zadovoljava *princip transfera*: svaka n-torka realnih brojeva zadovoljava iste formule prvoga reda u $\langle \mathbb{R}, S : S \in \mathfrak{F} \rangle$ koje zadovoljava i u $\langle {}^*\mathbb{R}, \mathbb{R}, {}^*S : S \in \mathfrak{F} \rangle$.[603] Egzistencija sustava $^*\mathbb{R}$ hiperrealnih brojeva posljedica je teorema kompaktnosti. Valja pritom naglasiti da se hiperrealni brojevi mogu uvesti na dva različita načina. Prvi je *aksiomatski*, pri čemu se najprije navode svojstva koja željena struktura treba zadovoljavati, a zatim se dokazuje postojanje strukture s tim svojstvima. Drugi je konstruktivni, pri čemu se hiperrealni brojevi eksplicitno i izravno konstruiraju, najčešće kao ultraprodukt (odnosno, u ovom slučaju, ultrapotencija) polja realnih brojeva, premda postoje i druge algebarske i skupovnoteorijske konstrukcije $^*\mathbb{R}$ (usp. Ehrlich 2012, §9, str. 34). Aksiomatski je pristup, međutim, prirodniji i intuitivniji. Prije nego što izložim Keislerovu poznatu aksiomatizaciju sustava $^*\mathbb{R}$ iz *Foundations of Infinitesimal Calculus* (1976), pogledajmo kako je sâm Robinson u *Non-Standard Analysis* okarakterizirao hiperrealne brojeve. Neka je $^*\mathbb{R}$ nestandardni model realne analize. Tada je $^*\mathbb{R}$ matematička struktura višega reda koja posjeduje sljedeća svojstva (sve prema Robinson 1966, §§3.1–3.2):

(i) Svaki matematički pojam koji je smislen u sustavu realnih brojeva $\mathbb{R}$, također je smislen i u $^*\mathbb{R}$; drugim riječima, standardne operacije i relacija uređaja definirani su analogno, te se proširuju na hiperrealne brojeve: $\langle {}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, {}^*0, {}^*1 \rangle$.

(ii) Svaka matematička tvrdnja koja je smisleno formulirana i istinita u sustavu realnih brojeva vrijedi i u $^*\mathbb{R}$, pod uvjetom da referiranje na skupove, relacije ili funkcije u $^*\mathbb{R}$ interpretira ne u terminima svih entiteta tog tipa već samo u terminima *unutarnjih* (*internalnih*) *entiteta*. To ograničenje ne vrijedi za referiranje na individue, odnosno brojeve – prije proširenja izraz „svi brojevi" se odnosi na sve brojeve odnosno sve elemente sustava $\mathbb{R}$, dok se nakon proširenja odnosni na sve elemente sustava $^*\mathbb{R}$.

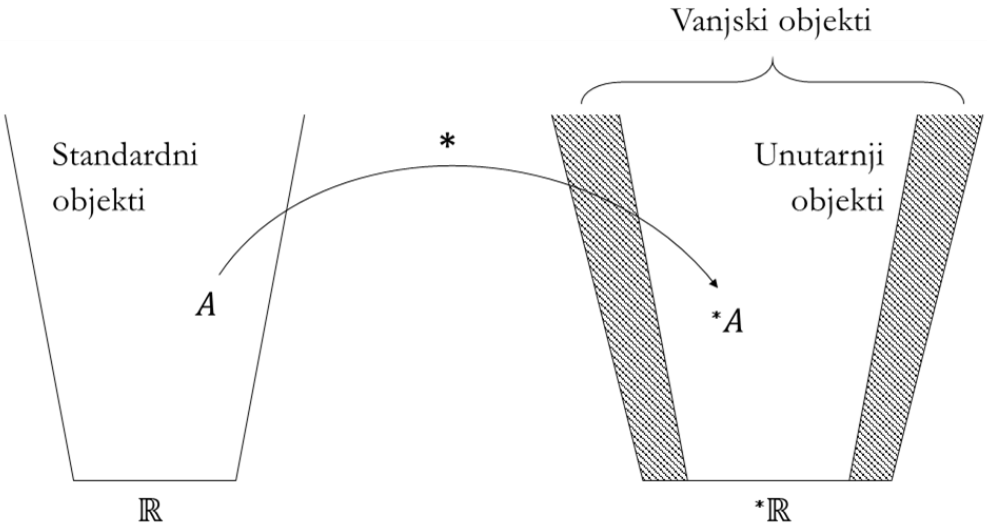
(iii) Sustav hiperrealnih brojeva $^*\mathbb{R}$ predstavlja uređeno polje jer je i polazni sustav $\mathbb{R}$ realnih brojeva također uređeno polje; štoviše, $^*\mathbb{R}$ sadrži $\mathbb{R}$ kao *potpolje*.

(iv) Uređeno polje $^*\mathbb{R}$ je *nearhimedovsko* jer sadrži brojeve koji su veći, odnosno manji, od svakog realnog broja. Drugim riječima, za hiperrealne brojeve ne vrijedi

[603] Prije Robinsona, Schmieden i Laugwitz također su u okviru Ω-računa nastojali implementirati i konkretizirati princip transfera. Njihov je pristup, međutim, bio bitno drukčiji od Robinsonova (usp. Laugwitz 1973/74, §0, str. 66–68). Polazili su od ideje da se polju $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva pridruži beskonačno velik prirodan broj Ω, tako da vrijedi svojevrsni princip transfera: svaka tvrdnja koje je istinito za sve veoma velike konačne prirodne brojeve, po definiciji će biti istinita i za Ω. Preciznije, ako je $A(n)$ formula koja je istinita za svaki dovoljno veliki konačan prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, onda je istinito i $A(\Omega)$. Primjerice, budući da za svaki veliki prirodan broj n vrijedi $n > 10^{100}$, slijedi da vrijedi i $\Omega > 10^{100}$, i analogno za sve ostale formule koje zadovoljavaju navedeni uvjet. O Ω-računu podrobnije v. Laugwitz 1983, 1992 i 2001, §2, str. 128–29. Za raspravu o Leibnizovu zakonu u terminima NSA, v. Robinson 1966, §10.2 i str. 266–67, Keisler 1994: 207, Katz & Sherry 2012 i Błaszczyk *et al.* 2013: 27–28.

arhimedovsko svojstvo koje važi za svaki realni broj r: $(\forall r \in \mathbb{R})\left[r > 0 \rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\left(\frac{1}{n} < r\right)\right]$.[604]

Svojstva (i) i (ii) zajedno izražavaju princip transfera i predstavljaju izravnu implementaciju Leibnizova zakona kontinuiteta: sve što vrijedi za standardne realne brojeve vrijedi i za nestandardne hiperrealne brojeve. U Odjeljku [2.6.2] vidjeli smo da je do vrlo sličnoga uvida došao i Levi-Civita, premda iz perspektive teorije realno zatvorenih polja. Ograničenje sadržano u (ii) predstavlja elegantan mehanizam kojim se osigurava da se uvijek bez proturječnosti očuva istinitosti svih rečenica u *ℝ koje su istinite u ℝ. Naime, princip transfera primjenjuje se samo na *unutarnje* (*internalne*) *entitete*, odnosno na objekte dobivene funkcijom hiperekstenzije * iz sustava ℝ (riječ je, dakle, o entitetima koji „nasljeđuju" svojstva realnih brojeva), dok se princip transfera ne proteže na takozvane *vanjske* (*eksternalne*) *skupove* kakvi su, primjerice, skup $\mu(0)$ svih infinitezimala u *ℝ, skup $^*\mathbb{R}_{\mathbf{Fin}}$ svih konačnih hiperrealnih brojeva u *ℝ te skup $^*\mathbb{R}_{\mathbf{Inf}}$ svih beskonačnih hiperrealnih brojeva u *ℝ (Robinson 1966: 42). To se može prikazati i shematski, kao na *Sl. 33*.



Sl. 33. Transfer iz ℝ u *ℝ

Drugim riječima, *unutarnje* (*internalne*) *skupove* možemo promatrati kao one skupove hiperrealnih brojeva koji nasljeđuju svojstva prvoga reda odgovarajućih skupova realnih brojeva. Upravo zato što u proširenom sustavu *ℝ očuvavaju mnoga „dobra" svojstva iz ℝ, internalni skupovi zauzimaju središnje mjesto u nestandardnoj analizi. Sa svojstvom (iii) već smo se susreli prilikom razmatranja konstrukcije Veroneseova polja $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ (odjeljci [2.6] i [2.6.1]), kao i Levi-Civitina polja $\mathcal{R}$ koje se pojavljuje kao potpolje polja $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ (v. Odjeljak [2.6.2] te usp. Odjeljak [2.6.3]). Svojstvo (iv), međutim, otvara jedno zanimljivo pitanje o statusu Arhimedova aksioma u sustavu *ℝ. Na jednom mjestu, komentirajući Leibnizovu formulaciju *les règles du fini réussissent dans l'infini et vice versa*, Robinson kaže: „u našoj vlastitoj

[604] Za Skolemov nestandardni model aritmetike, odnosno sistem *ℕ v. Robinson 1966, Ch. III, §3.1, str. 49ff.

teoriji odgovor na pitanje je li Arhimedov aksiom istinit ne samo u $\mathbb{R}$ nego i u $^*\mathbb{R}$ jeste da je istodobno i potvrdan i niječan!“ (Robinson 1966: 266). Kako treba razumjeti ovu naizgled paradoksalnu tvrdnju? Premda se na prvi pogled može činiti krajnje neobičnim i neintuitivnim da se za jednu te istu strukturu može reći da je i arhimedovska i nearhimedovska, situacija nije bez presedana. Prisjetimo se da je Veronese došao do vrlo sličnoga zaključka pri raspravi o statusu svojega Principa V (P5), odnosno poopćenja Arhimedova aksioma u polju $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ (usp. Odjeljak [2.6]). Poanta je u sljedećem. Naime, iako je $^*\mathbb{R}$ nearhimedovsko uređeno polje, rečenica kojom je Arhimedov aksiom izražen u $\mathbb{R}$ – „za svaki par realnih brojeva a i b takav da $0 < a < b$ postoji prirodan broj n takav da $na > b$“) – ostaje istinita i u $^*\mathbb{R}$ zahvaljujući principu transfera, što znači da je Arhimedov aksiom očuvan i u sistemu hiperrealnih brojeva. Međutim, treba naglasiti da je Arhimedov aksiom na ovaj način u $^*\mathbb{R}$ očuvan *samo čisto formalno*, budući da je s obzirom na izvorno intendirano značenje *de facto* negiran proširivanjem $\mathbb{R}$ do $^*\mathbb{R}$. Podsjetimo da je u klasičnoj interpretaciji Arhimedov aksiom podrazumijevao dosezivost *u konačnom broju koraka*. U sustavu $^*\mathbb{R}$, međutim, tvrđenje da bi moglo da vrijedi $na > b$ za svako $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ $(0 < a < b)$, čak i kada je a konačno, a b beskonačno utoliko što bi n jednostavno mogao da bude dovoljno velik beskonačni broj postaje *izveštačeno* jer se ona prvobitna intencija Arhimedova aksioma prema kojoj

$$\underbrace{a + a + a + a + \cdots + a}_{\text{konačan broj } n \text{ puta}} > b$$

u $^*\mathbb{R}$ naprosto izgubila, iako je njegova istinitost formalno očuvana. Upravo je u tome smislu Robinson mogao ustvrditi da Arhimedov aksiom u $^*\mathbb{R}$ istodobno i vrijedi i ne vrijedi (usp. Robinson 1966: 267). Stroyan i Luxemburg saželi su tu ideju vrlo precizno kada su opisivali način na koji sustav hiperrealnih brojeva „nasljeđuje“ svojstva realnih brojeva:

> „Ako pažljivije ispitamo Robinsonove ideje, vidjet ćemo da se tvrdnja ‘$^*\mathbb{R}$ ima ista svojstva kao $\mathbb{R}$’ odnosi na točno određen skup svojstava polja $\mathbb{R}$, uključujući i Arhimedovo svojstvo, formuliranih u točno određenom formalnom jeziku. Iskazi toga jezika imaju svoje interpretacije i u $\mathbb{R}$ i u $^*\mathbb{R}$, ali reinterpretacije [tvrdnji o] svojstvima višega reda, poput Arhimedova svojstva, ne zadržavaju svoju punu metamatematičku snagu. Takvo oslabljeno tumačenje u proširenju [sc. u proširenomu sustavu, odnosno strukturi] dovodi do izdvajanja povlaštene klase skupova, takozvanih ‘internalnih skupova’, i upravo o njima formalni jezik ‘zna’ (*knows about*). Ti imaju ‘ista svojstva’, dok ih eksternalni skupovi nemaju. Drugim riječima, samo su svojstva prvoga reda zapravo ista.“ (Stroyan & Luxemburg 1976: 5)[605]

Ovdje ponovno nailazimo na uvid s kojim smo se već susreli u raspravi o Veroneseovu i Levi-Civitinu polju: s obzirom na svojstva prvoga reda, nearhimedovska realno zatvorena uređena polja nerazlučiva su od uređenog polja realnih brojeva.[606]

---

[605] Hourya Sinaceur bi rekla da logika, odnosno jezik prvoga reda „neutralizira“ svojstva višega reda (Sinaceur 1994: 192).

[606] Za polje $\mathbb{F}$ kažemo da je realno zatvoreno ako je formalno realno, odnosno ako u tom polju -1 nije suma kvadrata njegovih elemenata; drugim riječima, ne postoje elementi $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ takvi da vrijedi $a_1^2 + \cdots +$

Pogledajmo sada aksiome koje je H. Jerome Keisler formulirao kako bi aksiomatski okarakterizirao uređeno polje hiperrealnih brojeva:

(**AKSIOM A**) Uređeno polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva potpuno je uređeno polje.

(**AKSIOM B**) Uređeno polje $^*\mathbb{R}$ hiperrealnih brojeva pravo je proširenje uređenog polja $\mathbb{R}$ realnih brojeva.

(**AKSIOM C**) Uređeno polje $^*\mathbb{R}$ hiperrealnih brojeva sadrži barem jedan pozitivan infinitezimal, odnosno element ε takav da vrijedi $0 < \varepsilon$ i $\varepsilon < r$ za svaki pozitivan realan broj $r \in \mathbb{R}$. (Keisler 1976, Ch. I, §§1.4–1.5)[607]

$a_n^2 = -1$. Budući da su u svakom uređenom polju svi kvadrati nenegativni, svako je uređeno polje formalno realno. Osim toga, realno zatvoreno polje ne smije imati nijedno pravo formalno realno algebarsko proširenje. Uređeno polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva je realno zatvoreno polje jer je polje $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva njegovo jedino pravo algebarsko proširenje (koje više nije formalno realno). Teoriju realno zatvorenih polja zasnovali su Artin i Schreier u okviru onoga što su nazivali *realnom algebrom*, a njezine su glavne rezultate razvili između 1924. i 1927. godine. Realno zatvorena polja aksiomatski su okarakterizirali na sljedeći način. Realno zatvoreno polje $\mathbb{F}$ je komutativno polje koje zadovoljava sljedeće uvjete: (i) -1 nije suma kvadrata elemenata polja $\mathbb{F}$; (ii) svaki pozitivan element polja $\mathbb{F}$ ima kvadratni korijen; (iii) za svaki element $a \in \mathbb{F}$, ili je a kvadrat ili je $-a$ kvadrat te svaki polinom neparnog stupnja ima bar jedan korijen u $\mathbb{F}$ (usp. Sinaceur 1994: 192). Artin i Schreier pokazali su da su uvjeti (i) i (ii) ekvivalentni tvrdnji da na polju $\mathbb{F}$ postoji totalni (linearni) uređaj kompatibilan s operacijama polja. Drugim riječima, polje $\mathbb{F}$ je uređivo: postoji linearni uređaj $<$ na $\mathbb{F}$ takav da je $\langle F, +, \cdot, 0, 1, < \rangle$ uređeno polje. Konjunkcija uslova (ii) i (iii) je pak ekvivalentna takozvanom svojstvu *maksimalnosti*. U slučaju polja $\mathbb{R}$ to znači da ne postoji pravo algebarsko proširenje od $\mathbb{R}$ koje se može urediti tako da proširuje i standardni uređaj na $\mathbb{R}$ (isto vrijedi i za polje $\mathbb{R}_{\mathbb{A}}$ realnih algebarskih brojeva koje je potpolje polja $\mathbb{R}$). Nasuprot tomu, uređeno polje $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva ima prava algebarska proširenja koja čuvaju standardni ili prirodni uređaj, primjerice polje $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Za pojedinosti v. van der Waerden 1953, Ch. IX („Real Fields“), osobito §70 („Algebraic Theory of Real Fields“, str. 225 ff.); usp. i Sinaceur 1994.

[607] U odjeljku „Epilogue“ knjige Foundations of Infinitesimal Calculus Keisler je dodao još dva aksioma koja su potrebna za potpuniju karakterizaciju sustava hiperrealnih brojeva, napominjući pritom da su oni ponajprije motivirani potrebama zasnivanja računa. Neformalno govoreći, oba se aksioma odnose na već spomenutu funkciju hiperekstenzije * koja povezuje sustave $\mathbb{R}$ i $^*\mathbb{R}$. Ona mora zadovoljiti dva temeljna zahtjeva: (i) za svaku relaciju X na $\mathbb{R}$ postoji njoj odgovarajuća relacija $^*X$ na $^*\mathbb{R}$ koja se naziva *prirodnim proširenjem* X i (ii) relacije na $\mathbb{R}$ imaju ista *elementarna svojstva* kao i njihova prirodna proširenja na $^*\mathbb{R}$ (Keisler 1976, Odeljak 1C, „Axioms for the Hyperreal Numbers“, str. 7). Pod elementarnim svojstvima ovdje treba razumjeti *svojstva prvog reda* poput „X je funkcija“, „$X \subseteq Y$“ ili „X je simetrična binarna relacija“. Nasuprot tomu, arhimedovsko svojstvo ili Dedekind-potpunost nisu elementarna svojstva (zato što, primjerice, nijedno pravo proširenje uređenog polja $\mathbb{R}$ realnih brojeva nije arhimedovsko već, naprotiv, uvijek nearhimedovsko uređeno polje). Preostala dva aksioma kojima Keisler opisuje sustav hiperrealnih brojeva, odnosno uređenu trojku $\langle *, \mathbb{R}, ^*\mathbb{R} \rangle$, gdje je $\mathbb{R}$ uređeno polje realnih brojeva, $^*\mathbb{R}$ uređeno polje hiperrealnih brojeva, a * funkcija hiperekstenzije, odnosno preslikavanje kojim se dobiva prirodno proširenje, Keisler formulira ovako:

(**AKSIOM D**) (FUNKCIJSKI AKSIOM) Za svaku realnu funkciju f od n varijabli postoji njoj odgovarajuća hiperrealna funkcija $^*f$ od n varijabli koja se naziva prirodnim proširenjem f. Operacije polja $^*\mathbb{R}$ prirodna su proširenja operacija polja $\mathbb{R}$.

(**AKSIOM E**) (AKSIOM TRANSFERA) Neka su zadana dva sustava formula S i T s istim varijablama [sc. konačni skupovi jednakosti ili nejednakosti između termina]. Ako je svako realno rješenje sustava S ujedno i rješenje sustava T, tada je i svako hiperrealno rješenje sustava S ujedno i rješenje sustava T. Pritom se pod *hiperrealnim rješenjem* sustava formula S s varijablama $x_1, \ldots, x_n$ podrazumijeva n-torka hiperrealnih brojeva $(c_1, \ldots, c_n)$ za koju su sve formule iz sustava S istinite nakon što se svaka funkcija zamijeni svojim prirodnim proširenjem, a svaka varijabla x_i odgovarajućim c_i. (Keisler, *op. cit*, str. 9)

U popratnom komentaru tih aksioma Keisler ističe da se „algebarske činjenice o beskonačno malim brojevima“ mogu izvesti već iz aksioma A–C. Na temelju njih možemo uvesti i nekoliko temeljnih pojmova nestandardne analize (prema Keisler, op. cit., te Robinson 1966, §3.2). Tako se *apsolutna vrijednost* elementa $a \in {}^*\mathbb{R}$, $|a|$, definira na uobičajen način:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ako } a \geq 0 \\ -a, \text{ako } a < 0 \end{cases}.$$

Hiperrealan broj $a \in {}^*\mathbb{R}$ *konačan* je ako postoji standardni realan broj $m \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $|a| \leq m$. Svi hiperrealni koji ne zadovoljavaju taj uvjet nazivaju se *beskonačnima*.[608] Očito je da su prema ovoj definiciji i infinitezimali konačni hiperrealni brojevi. Skup svih konačnih hiperrealnih brojeva konstituira prsten M_0 u $\mathbb{R}$. Hiperrealan broj $a \in {}^*\mathbb{R}$ *infinitezimalan* je ako za svaki realan broj $m \in \mathbb{R}$ vrijedi $|a| < m$. Drugim riječima, za hiperrealan broj $a \in {}^*\mathbb{R}$, pri čemu $a \neq 0$, kažemo da je infinitezimal AKKO je njegov recipročni element a^{-1} odnosno $\frac{1}{a}$ beskonačan broj.[609] Naravno, i broj 0 jest infinitezimal prema ovoj definiciji. Skup svih infinitezimala konstituira prsten M_1 u $\mathbb{R}$, koji je potprsten prstena M_0. Upravo je kvocijentni prsten M_0/M_1 izomorfan standardnim realnim brojevima (Robinson 1966: 56).

Robinson dalje definira Leibnizovu relaciju *infinitezimalne udaljenosti* (*beskonačne blizine*) na sljedeći način: za dva hiperrealna broja $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ kažemo da su beskonačno blizu, u oznaci $x \approx y$, ako je njihova razlika $x - y$ infinitezimalna. Iz toga neposredno slijedi da je hiperrealan broj $a \in {}^*\mathbb{R}$ infinitezimal ako i samo ako vrijedi $a \approx 0$ (usp. Keisler 1976, §§1.4–1.5). Primijetimo da je svaki pozitivan infinitezimal hiperrealan broj, dok je 0 jedini realan infinitezimal. Kako slikovito primjećuje Keisler, skup svih infinitezimala u ${}^*\mathbb{R}$, odnosno prsten M_1, može se zamisliti kao mali oblak sa središtem u nuli (Keisler 1994: 211). Analogno tomu, skup svih konačnih hiperrealnih brojeva, odnosno prsten M_0, može se promatrati kao veliki oblak sa središtem u nuli. Na temelju relacije beskonačne blizine definira se i *monada* $\mu(a)$ svakoga konačnog hiperrealnog broja $a \in {}^*\mathbb{R}$ kao skup svih hiperrealnih brojeva koji su mu beskonačno blizu, $\mu(a) = \{b \in {}^*\mathbb{R} : a \approx b\}$ (Robinson 1966: 57). Uz svaki konačni hiperrealni broj $a \in {}^*\mathbb{R}$ definira se i njegova galaksija $\gamma(a)$, odnosno skup svih hiperrealnih brojeva koji se od njega nalaze na konačnoj udaljenosti, $\gamma(a) = \{b \in {}^*\mathbb{R} : a - b$ je konačno$\}$ (Keisler 1976, *ad loc.* i 1994: 211). Svaka se galaksija može promatrati kao unija monada. Poseban slučaj predstavlja monada nule $\mu(0)$, koja se podudara sa skupom svih infinitezimala, dok je galaksija nule $\gamma(0)$ upravo skup svih konačnih hiperrealnih brojeva. Drugim riječima, $\mu(0) = M_1$ i $\gamma(0) = M_0$. Kada je riječ o algebri hiperrealnih brojeva, iz prethodnih definicija neposredno slijede sljedeća svojstva:

Za detaljniju analizu Keislerove aksiomatizacije, uključujući njegova kasnija razmišljanja o aksiomima A–E, v. Ehrlich 2012, §9, str. 33ff.

[608] Drugim riječima, hiperrealan broj $a \in {}^*\mathbb{R}$ beskonačan je AKKO za svaki realan broj $m \in \mathbb{R}$ vrijedi $|a| \geq m$.

[609] Hiperrealan broj $a \in {}^*\mathbb{R}$ infinitezimalan je AKKO za svaki realan broj $m \in \mathbb{R}$ vrijedi $|a| \leq \frac{1}{m}$.

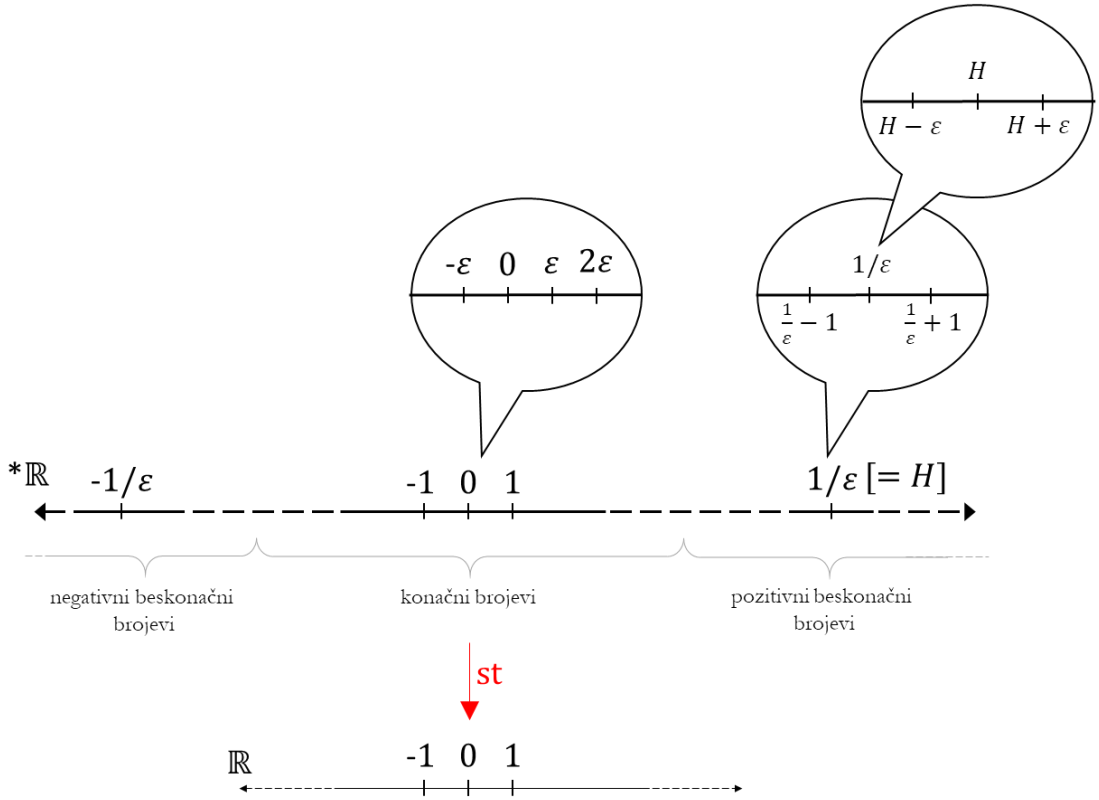
(i) Budući da konačni elementi u $^*\mathbb{R}$ čine konveksni prsten, zbrojevi, razlike i produkti konačnih elemenata također su konačni, a svaki element između dvaju konačnih elemenata je i sâm uvijek konačan;

(ii) Budući da infinitezimalni elementi u $^*\mathbb{R}$ čine konveksni ideal u prstenu konačnih elemenata, zbrojevi, razlike i produkti infinitezimala su infinitezimali, produkt infinitezimale i konačnoga elementa također je infinitezimal, a svaki element koji se nalazi između dvaju infinitezimala je i sâm uvijek infinitezimalan;

(iii) Ako je H pozitivan beskonačan hiperrealni broj, tada je i svaki $K \geq H$ također beskonačan, $H + x$ pozitivan je beskonačan broj za svaki konačan hiperrealan broj x, a $H \cdot y$ pozitivan je beskonačan broj za svaki pozitivan neinfinitezimalan hiperrealan broj y;

(iv) Ako je x nenulti infinitezimal, tada je $1/x$ beskonačan hiperrealan broj, a ako je y beskonačan hiperrealan broj, tada je $1/y$ infinitezimal. (Keisler 1976, TEOR. 1.3, 1.5 i 1.7; usp. i Keisler 1994, PROP. 1, str. 210–11)

Sada, kada smo definirali hiperrealne brojeve, možemo pokušati razviti intuitivnu predodžbu o nestandardnom kontinuumu koji oni tvore i o njegovu odnosu prema standardnom, Cantor-Dedekindovu aritmetičkom kontinuumu, odnosno realnom pravcu. Kako izgleda hiperrealni pravac? U već spomenutoj knjizi *Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach* (1976) Keisler je uveo vrlo koristan „slikovni alat" koji pomaže odgovoriti na to pitanje (usp. Keisler 2012, §1.4, str. 24–25). Pogledajmo *Sl. 34*.



Sl. 34. Realni i hiperrealni pravac

Robinson je Leibnizov transcendentalni zakon homogenosti[610] u okviru nestandardne analize matematički konkretizirao *funkcijom standardnoga dijela*, poznatom i pod nazivom „sjena“ (eng. *shadow*). Naime, za svaki konačan hiperrealan broj $a \in {}^*\mathbb{R}$ postoji jedinstveno određen standardni realni broj $r \in \mathbb{R}$ koji mu je beskonačno blizu. Taj broj nazivamo standardnim dijelom broja a te ga označujemo s $r = \mathrm{st}(a)$, odnosno s $r = {}^0a$ (Robinson 1966: 57). Intuitivno promatrano, budući da sustav *ℝ sadrži i infinitezimalne i beskonačne brojeve, prirodno je očekivati da je hiperrealni pravac na neki način „deblji“ od standardnoga, „tankoga“ realnog pravca (usp. Błaszczyk *et al.* 2013: 3), otprilike onako kako je prikazano na *Sl. 34*. Međutim, bez odgovarajućeg povećanja nearhimedovski pravac izgleda potpuno jednako kao i svaki drugi pravac, pa tako i kao standardni, odnosno arhimedovski realni pravac. Situacija se bitno mijenja kada *Keislerov mikroskop* usmjerimo na bilo koji konačan, odnosno kada njegov *Keislerov teleskop* usmjerimo na bilo koji beskonačan element hiperrealnoga pravca *ℝ. Primjerice, mikroskop nam omogućuje da „zavirimo“ u monadu $\mu(0)$, koja, kao što smo već vidjeli, sadrži infinitezimale poput ε. Teleskop nam, s druge strane, omogućuje da promatramo beskonačne elemente sustava *ℝ, primjerice hiperrealan broj $H = 1/\varepsilon$. Vrijedi primijetiti da je u nestandardnoj analizi, za razliku od Cantorove teorije skupova, recipročna vrijednost svakoga nenultoga infinitezimala uvijek beskonačan hiperrealan broj, dok u Cantorovoj teoriji izraz $1/\omega$ uopće nije definiran (v. Odjeljak [3.1] i Dodatak D). Kao što pokazuje *Sl. 34*, nestandardna analiza dopušta čak i svojevrsnu „mikroskopiju teleskopskih slika“, pri čemu se mogu promatrati i monade beskonačnih hiperrealnih brojeva, primjerice $\mu(H)$.[611]

Primijetimo da je hiperrealni pravac u određenom smislu sličan Veroneseovoj fundamentalnoj formi, odnosno apsolutnom kontinuumu. Naime, kao i $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, i *ℝ sastoji se ne samo od standardnih točaka (koje odgovaraju standardnim realnim brojevima) nego i od nestandardnih točaka (koje odgovaraju brojevima oblika $x = r + \varepsilon$, gdje je $r \in \mathbb{R}$, a ε je infinitezimal) ili, općenitije rečeno, od monada (kojima bi kod Veronesea odgovarali *trattini*, odnosno infinitezimalne dužine). Međutim, to ne treba shvatiti kao da je kardinalnost hiperrealnih brojeva veća od kardinalnosti standardnih realnih brojeva. Naprotiv, vrijedi $|{}^*\mathbb{R}| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.[612] Međutim, postavlja se pitanje mogu li se, i na koji način, nestandardne

[610] V. Odjeljak [1.3]. Taj je Leibnizov princip imao ključnu ulogu u razvoju diferencijalnoga računa jer je omogućavao uniformizaciju diferencijalnih jednadžbi s obzirom na red beskonačnosti termina koji se u njima pojavljuju. Najjednostavnije rečeno, tijekom računanja možemo zanemariti diferencijal odnosno derivacije (kao i derivacije višega reda). Primjerice, ako je a konačan broj, a dx derivacija (infinitezimal), tada prema Leibnizu vrijedi $a + dx \sqcap a$, pri čemu simbol „⊓” označava relaciju koju je Leibniz nazivao *ekvipolencijom* (*aequipollentia*), a koja se može shvatiti kao svojevrsna *pseudojednakost* (*adaequalitas*), odnosno jednakost do na infinitezimal. Leibniz je eliminaciju (svih suvišnih) derivacija *via lex homogenitatis* smatrao važnim postupkom infinitezimalnoga računa te ju je čak nazivao *fundamentum calculi* (v. spis *Nova methodus pro maximis et minimis etc.* u GM V, 220–226). Za više pojedinosti v. Popović 2016, §2.3.

[611] Beskonačni hiperrealni brojevi poput H nemaju standardne delove. Ako je H beskonačno, $\mathrm{st}(H)$ nije definirano. Usp. Keisler 1976, §1.6 (v. posebno DEF. 10).

[612] Premda se to na prvi pogled može činiti protuintuitivnim, budući da *ℝ predstavlja bogatiju strukturu koja, za razliku od ℝ, osim konačnih sadrži i beskonačne te infinitezimalne elemente, ta dodatna strukturna složenost

točke, odnosno monade, uopće *individuirati* na hiperrealnom pravcu. Ako imamo na umu prethodno definiranu funkciju standardnoga dijela, vidimo da svakomu nestandardnom broju odgovara jedinstveno određen standardni realan broj koji mu je beskonačno blizu. Drugim riječima, svaka monada „kolabira" u svoj standardni dio. To, međutim, znači da na hiperrealnom pravcu možemo fiksirati, odnosno individuirati, samo realne ili standardne točke, dok se uopće ne vidi kako bismo mogli fiksirati ijednu nestandardnu točku. A to bi onda značilo da i u nestandardnoj analizi Cantorov punktiformni kontinuum ostaje osnovni kontinuum, odnosno da je Zenonov aksiom, po principu transfera iz $\mathbb{R}$, negiran i u $^*\mathbb{R}$ (Arsenijević & Kapetanović 2008a: 40; Katz & Sherry 2013, §5.5, str. 589ff.).[613] Raspravu o *ontološkom statusu* Veroneseovih infinitezimalnih dužina i Robinsonovih monada zaključit ću u sljedećem odjeljku, jer će njezina poanta biti znatno jasnija i upečatljivija u širem komparativnom kontekstu, odnosno u usporedbi s Conway-Ehrlichovim sustavom nadrealnih brojeva **No**. Prije nego što izložim konstrukciju nadrealnih brojeva, želio bih iznijeti još nekoliko napomena o Robinsonovu pristupu filozofiji i zasnivanju matematike.

U predgovoru drugom svesku Robinsonovih sabranih djela Stephan Körner (1913–2000) okarakterizirao je Robinsona kao „kreativnog filozofa matematike", dodajući sljedeće:

> „*Vjerujem da se doprinos Abrahama Robinsona filozofiji matematike može najbolje razumjeti ako ga promatramo kao nasljednika Leibniza i Hilberta*. Bio je njihov nasljednik ne samo u smislu da je njihove ideje smatrao srodnima vlastitima nego i u dubljem smislu razvijanja i nadopunjavanja njihovih matematičkih uvida, kao i promišljanja njihovih i vlastitih matematičkih otkrića te razvijanja filozofije matematike u svjetlu tih promišljanja." (citirano prema *Collected Works, Vol. 2. Nonstandard Analysis and Philosophy*, Luxemburg & Körner 1979: xli, moj kurziv)

Ako imamo na umu da su Körner i Robinson zajedno držali kolegij iz filozofije matematike na Sveučilištu Yale tijekom jesenskoga semestra 1973. godine, dakle manje od godinu dana prije Robinsonove smrti, nema razloga sumnjati u Körnerovu ocjenu Robinsonova poznoga, odnosno zreloga pristupa filozofiji i zasnivanju matematike kao lajbnicovsko-hilbertovskoga, odnosno kao svojevrsnoga spoja *antiinfinitizma* i *formalizma*. Povijesno je, međutim, zanimljivo da je Robinson tijekom 1950-ih godina, pod Fraenkelovim utjecajem (usp. Odjeljak [3.1.2]), zastupao platonističko stajalište o matematičkoj ontologiji (usp. Dauben 1988: 186), što bi, prevedeno na problematiku koja nas ovdje ponajprije zanima, značilo da je vjerovao u objektivnu egzistenciju infinitezimala. Sredinom 1960-ih

---

ne utječe na kardinalnost. To se jasno vidi već iz standardnih konstrukcija polja $^*\mathbb{R}$ kao ultraprodukta polja realnih brojeva. Za više pojedinosti v. Ehrlich 2012: 36.

[613] Doduše, kada bismo, slijedeći Cantora (v. Odjeljak [2.4.1]), pretpostavili da su standardne točke izolirane, to bi značilo da se u infinitezimalnoj okolini nijedne od njih ne nalazi nijedna druga standardna točka. Međutim, tada nije jasno kako bi se nestandardni hiperrealni pravac $^*\mathbb{R}$ uopće mogao sastojati od takvih točaka, budući da nijedna standardna točka nema ni s lijeve ni s desne strane neposredno susjednu točku (usp. Arsenijević 2007, §87). Upravo je zato Veronese, u Leibnizovu duhu, inzistirao na tome da se linearni kontinuum ne sastoji od točaka, nego od infinitezimalnih dužina (*trattini*) koje povezuju, odnosno „užljebljuju", parove točaka i time ih čine kontinuiranima: „Il continuo rettilineo non è mai composto dai suoi punti ma dai *tratti cheli congiungono due a due e che sono pur essi continui*." (Veronese 1891: 48, nap. 1, moj kurziv)

godina, kada je već formulirao prve važne rezultate iz područja nestandardne analize, Robinson je u potpunosti napustio platonizam. O tome svjedoči njegovo priopćenje pod naslovom „Formalism 64“, pripremljeno za Međunarodni kongres logike, metodologije i filozofije znanosti, održan 1964. godine u Jeruzalemu (Robinson 1966a). Osnovne postavke svojega shvaćanja zasnivanja matematike Robinson je sažeo na sljedeći način:

> „[Ono] se može sažeti na sljedeći način: (1) beskonačni totaliteti ne postoje i svako navodno referiranje na njih, doslovno shvaćeno, besmisleno je; (2) to nas ipak ne bi trebalo spriječiti da nastavimo razvijati matematiku u klasičnom duhu, što podrazumijeva slobodnu uporabu infinitarnih pojmova; (3) premda se infinitarni okviri, poput teorije skupova, pa čak ni sama Peanova teorija brojeva, ne mogu smatrati konačnim temeljima matematike, čini se da ipak moramo prihvatiti barem neki rudimentarni oblik logike i aritmetike kao zajedničku osnovu svakoga matematičkog rasuđivanja. Sve zajedno, ove se tri točke mogu smatrati dobrim sažetkom formalističkoga gledišta (*the formalist point of view*).“ (citirano prema Robinson 1969, §0, str. 45)

U radu „From a Formalist's Point of View“ Robinson je dodatno pojasnio što točno podrazumijeva pod drugom od navedenih teza:

> „Dio je svjesne i namjerne politike formalista da postupa sa svim vrstama beskonačnih totaliteta *kao da* su stvarni (*as if they were real*), pa se njegova svakodnevna matematička [praksa] stoga ne razlikuje od matematičke [prakse] platonističkog realista. […] S druge strane, formalist s različitim vrstama konstruktivista dijeli temeljno nepovjerenje prema beskonačnosti te je, zapravo, veći finitist od većine [konstruktivista]. Premda se opredijelio za klasičan način bavljenja matematikom, [formalist] se ne mora protiviti pojedinim konstruktivnim verzijama aritmetike i analize te može priznati da su one konkretnije i da posjeduju neposredniji empirijski sadržaj.“ (Robinson 1969, §2, str. 47, Robinsonov izvorni kurziv)

Ovi ulomci doista pokazuju da je Robinsonovo stajalište u mnogočemu blisko Leibnizovu, osobito kada je riječ o ontološkom statusu infinitezimala. Kao što je dobro poznato, Leibniz je u finalnoj verziji diferencijalnoga računa s početka 18. stoljeća infinitezimale smatrao „korisnim fikcijama“ (*fictions utiles*), odnosno *idealnim elementima* (*comme des choses idéales*), koji su iznimno prikladni u kontekstu otkrića i za *ars inveniendi*, budući da se, u skladu s Leibnizovim zakonom kontinuiteta, odnosno principom transfera, ponašaju poput običnih konačnih brojeva te podliježu istim pravilima i računskim operacijama.[614] Istodobno, oni se mogu u potpunosti eliminirati iz konačnoga rezultata izračuna, odnosno iz konteksta opravdanja, u skladu s Leibnizovim transcendentalnim zakonom homogenosti, odnosno funkcijom standardnoga dijela (v. Leibnizovu prepisku s Varignonom s početka 1700-ih u

[614] Arhimedov spis *Metoda* (Ἔφοδος), koji je Heiberg otkrio 1906. godine, pokazuje da je već i Arhimed dopuštao *heurističku uporabu infinitezimala*, premda je inzistirao na tome da argumenti utemeljeni na infinitezimalima ne predstavljaju dokaze (οὐκ ἀποδέδεικται) u strogom smislu u kojem to jesu čisto geometrijski dokazi (γεωμετρουμένην ἀπόδειξιν), u Arhimedovu slučaju zasnovani na metodi dvostrukoga svođenja na apsurd. Međutim, u popratnom komentaru uz prvi stavak *Metode* (M.1) Arhimed iznosi tvrdnju koja donekle otežava „formalističku“ interpretaciju toga spisa: „Uvjeren sam da je [ta metoda] jednako korisna i za dokazivanje [samih] teorema“ (τοῦτο δὲ πέπεισμαι χρήσιμον εἶναι οὐδὲν ἧσσον καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῶν θεωρημάτων; usp. Heiberg: *quod mihi persuasum est etiam ad ipsas propositiones demonstrandas aeque utile esse*) (citirano prema Heibergovu izdanju *Archimedis Opera*). Za više pojedinosti v. Popović 2016, §2.1.

GM IV, 91ff.). Citirajući ta i slična mjesta iz Leibnizova opusa u *Non-Standard Analysis*, Robinson će gotovo tri stoljeća poslije ponovno ustvrditi da s infinitezimalima možemo posve slobodno računati kao da su stvarni, tretirajući ih ne samo kao „korisne fikcije" nego i, kako je i sâm Leibniz na jednome mjestu naglasio, kao „dobro utemeljene fikcije" (*fictiones bene fundatae*, *comme des fictions bien fondées*) (usp. Robinson 1966, §10.2, osobito str. 263ff.). Jedan od ciljeva prethodne rasprave o sustavu $^*\mathbb{R}$ hiperrealnih brojeva upravo je pokazati da je, *pace* Leibniz, tek Robinson doista razjasnio u kojem su smislu infinitezimali *bene fundati*.

Kao što sam pokazao u Odjeljku [2.5], i Veronese je, unatoč svojim simpatijama prema umjereno realističkoj, odnosno naturaliziranoj aristotelovskoj filozofiji matematike, prije svega bio protoformalist. U tom je pogledu ostvario presudan utjecaj na Hilberta, čije je stajalište Robinson smatrao najsrodnijim vlastitom shvaćanju filozofije matematike.[615] To potvrđuje i činjenica da je Veronese, premda je u *Fondamenti* konstruirao prvo nearhimedovsko uređeno polje $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, čime je još početkom 1890-ih na proturječan način uveo infinitezimale u matematiku, ipak zapisao kako „nemamo nikakve potrebe vjerovati u konkretnu realnost aktualne beskonačnosti i aktualnih infinitezimala" (*non abbiamo bisogno di credere alla realtà concreta dell'infinito e dell'infinitesimo attuale*) (Veronese 1891: xii). Pogledajmo sada kako izgleda pravi aritmetički analogon Veroneseova maksimalno inkluzivnog apsolutnog geometrijskog kontinuuma. Budući da hiperrealni brojevi to nisu, preostaje nam apsolutni aritmetički kontinuum koji obuhvaća „sve velike i male brojeve" što ih je uopće moguće konstruirati: sustav $\mathbf{No}$.

[4.2] Conway-Ehrlichov apsolutni aritmetički kontinuum i teorija nadrealnih brojeva

Samo deset godina nakon objavljivanja Robinsonove knjige *Non-Standard Analysis* britanski je matematičar John Horton Conway (1937–2020) u knjizi *On Numbers and Games* (ONAG[616]) iz 1976. formulirao posve opću konstrukciju realno zatvorenoga uređenog polja $\mathbf{No}$ nadrealnih brojeva. Ono, uz standardne realne brojeve poput 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ ili π, sadrži i transfinitne ordinale poput ω, dotad nepoznate brojeve poput $-\omega$, $\frac{\omega}{2}$, $\sqrt{\omega}$, $\sqrt[3]{\omega+1}-\frac{\pi}{\omega}$, kao i infinitezimale poput $\frac{1}{\omega}$. To je osobito zanimljivo u kontekstu Kerryjeve sugestije o jednom mogućem načinu definiranja infinitezimala te, općenitije, rasprave o statusu Cantorova „dokaza" protiv mogućnosti infinitezimala iz trećega dijela disertacije (usp. Odjeljak [3.1]). U radu „The Surreals and the Reals", napisanom dvadesetak godina nakon objavljivanja ONAG, Conway je naglasio da *ratio essendi* nadrealnih brojeva proizlazi iz činjenice da oni „nisu ništa manje nego *jedino ispravno proširenje pojma realnoga broja na beskonačno*

[615] Robinson na jednome mjestu Hilberta naziva „utemeljiteljem formalizma" (Robinson 1969: 48). U svjetlu analize iz Odjeljka [2.5], čini mi se da bi taj epitet prikladnije pristajao Veroneseu.

[616] Kraticu ONAG uveo je sam Conway. Što se tiče samoga naziva „nadrealni brojevi" (*surreal numbers*), njega je uveo Donald E. Knuth u dijaloškoj knjižici *Surreal Numbers: A Mathematical Novelette* iz 1974. godine (usp. Knuth 1974). Conway je nadrealne brojeve u ONAG jednostavno nazivao *brojevima* (v. niže). Valja napomenuti da se nadrealnim brojevima služio i prije objavljivanja ONAG, u predavanjima koja je početkom 1970-ih održavao na Sveučilištu u Cambridgeu i na Caltechu (v. predgovor drugom izdanju ONAG iz 2001. godine).

veliko i beskonačno malo“ (Conway 1994: 102, moj kurziv). Sam ONAG po mnogočemu je, slično kao i *Fondamenti*, posve netipična matematička publikacija: od Conwayeva duhovitog stila i onoga što on naziva svojim „čudnim idiosinkrazijama“ (v. ONAG, Preface, str. v), pa sve do činjenice da je prvi dio knjige, koji je za naše potrebe posebno važan i koji je Conway posvetio „filozofiranju o brojevima“ (*philosophising about numbers*), zapravo njezin nulti dio (Zeroth Part. On Numbers).

Premda je sustav nadrealnih brojeva iznimno matematički i filozofski zanimljiv, osvrt na literaturu nastalu tijekom posljednjih pola stoljeća pokazuje da je u velikoj mjeri i danas aktualna ocjena Harryja Gonshora (1928–1991), iznesena još 1986. godine u knjizi *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers*. Naime, prema Gonshoru, teorija nadrealnih brojeva još se uvijek nalazi „u pionirskoj fazi“ te „pati od izolacije“, budući da se njome bavi tek nekolicina istraživača raspršenih diljem svijeta, pri čemu se svaki od njih usredotočuje ponajprije na one aspekte teorije koji ga osobno zanimaju. Posljedica je toga da su „mnogi rezultati na rubu otkrića, a mnogi pojmovi još uvijek čekaju da budu definirani“ (Gonshor 1986, Preface). Na to upućuje i radionica održana 2016. godine u Matematičkom institutu u Oberwolfachu, posvećena nizu otvorenih pitanja i problema povezanih s daljnjim razvojem Conwayeve izvorne teorije, koja je okupila petnaestak istraživača (v. Berarducci, Ehrlich & Kuhlmann 2016, *Oberwolfach Report* 60/2016). U tom kontekstu osobito valja istaknuti Philipa Ehrlicha, koji je u nizu radova, počevši od kasnih 1980-ih godina, vjerojatno dao najveći doprinos razvoju suvremene teorije nadrealnih brojeva. Zbog toga smatram da se s pravom može govoriti o *Conway-Ehrlichovoj teoriji nadrealnih brojeva* (usp. Ehrlich 1986, 1988; za *corrigendum* v. Ehrlich 1988a; 1989; 1992; 1994b; 2001; za *corrigendum* v. Ehrlich 2005; 2002a; 2002b; 2004; 2012; v. i Ehrlich & Kaplan 2018, 2021).[617] Za razliku od Ehrlichovih rezultata, koji su izrazito tehničke naravi i često vrlo zahtjevni (primjerice njegova alternativna konstrukcija polja **No** iz rada Ehrlich 1988), pa ih je teško pratiti čitateljima koji već nisu specijalisti za teoriju nadrealnih brojeva, Conwayev izvorni pristup iz ONAG zapanjujuće je jednostavan (*marvelously simple*, kako ga je opisao Dan Kalman u Conway & Guy 1996: 26). Stoga ću u nastavku prije svega slijediti samoga Conwaya, odnosno način na koji u ONAG (Zeroth Part. On Numbers) konstruirao nadrealne brojeve i specificirao njihova najrelevantnija osnovna svojstva (Conway 1976: 1–68).[618]

Conway svoje izlaganje započinje osvrtom na „one koji su bili dobri u konstruiranju brojeva“ – Dedekinda, Cantora i von Neumanna. Kao što je dobro poznato, Dedekind i Cantor konstruirali su realne brojeve, dok je Cantor, osim toga, uveo i transfinitne ordinale (usp. odjeljke [2.4.1], [2.6.1] i [2.6.3]). Kako su nedavno istaknuli Easwaran, Hájek, Mancosu i Oppy, „Dedekind je pokazao kako popuniti praznine između racionalnih brojeva, a Cantor kako pojam broja (ordinalnog i kardinalnog) proširiti izvan već postojećih konačnih brojeva“

[617] Uz već spomenutu Gonshorovu knjigu svakako valja istaknuti i monografiju Normana Allinga (1930.–2022.), koji je, slijedeći Conwayeve donekle kriptične napomene iz ONAG, prvi pokušao zasnovati analizu nad poljem **No**, analogno onomu što je Robinson učinio za hiperrealne brojeve u nestandardnoj analizi. V. Alling 1987.

[618] Glavni aspekti konstrukcije polja **No** sažeto su i vrlo pregledno prikazani u Conway 1994 te Conway & Guy 1996.

(Easwaran *et al.* 2025, §3.4.3). U Predgovoru ONAG Conway je naglasio da se njegov pristup konstrukciji nadrealnih brojeva može promatrati kao „pokušaj poopćavanja Dedekindove konstrukcije“ (Conway 1976: v) Podsjetimo, Dedekind je u djelu *Stetigkeit und irrationale Zahlen* konstruirao realne brojeve kao *rezove* racionalnih brojeva (usp. Dedekind 1872, §4). Pod rezom (L, R) skupa $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva, Dedekind podrazumijeva particiju skupa $\mathbb{Q}$ na dva neprazna podskupa L i R, pri čemu je svaki broj $x^L \in L$ manji od svakog broja $x^R \in R$ (odnosno, svaki element skupa L prethodi svakom elementu skupa R), tako da vrijedi $L < R$ i $L \cup R = \mathbb{Q}$. U slučaju kada ni L ni R nemaju ekstremalne tačke, rez (L, R), koji Conway u ONAG-u zapisuje kao $\{L|R\}$, definira novi broj. Dedekind zatim skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ identificira sa skupom svih takvih rezova.

Conwayev glavni prigovor Dedekindovoj konstrukciji, kao i Cantorovoj alternativnoj konstrukciji realnih brojeva pomoću konvergentnih nizova racionalnih brojeva, sastoji se u tome što i Dedekind i Cantor pretpostavljaju da su racionalni brojevi već na neki način zadani ili prethodno konstruirani, nakon čega ih samo „rekonstruiraju“ i „preimenuju“ u realne brojeve. Time se, prema Conwayu, stvara umjetna razlika između „starih“ i „novih“ racionalnih brojeva (Conway 1976: 3–4). Što se pak tiče transfinitnih brojeva, u drugom smo dijelu vidjeli da je Cantor transfinitne ordinale konstruirao pomoću svojih „generativnih principa“, polazeći od skupa $\mathbb{Z}$, odnosno od pretpostavke da su cijeli brojevi $1,2,3,\ldots$ već na neki način zadani. Na toj je osnovi uočio da *ordinalni tip* skupa $\mathbb{Z}$ određuje novi beskonačan broj ω, veći od svih cijelih brojeva, zatim da ordinalni tip skupa $\{1,2,3,\ldots,\omega\}$ određuje novi, još veći beskonačan broj $\omega + 1$, i tako dalje *in infinitum* (v. *Sl. 18* uz Odjeljak [2.6.1]). John (János) von Neumann (1903–1957) pokazao je u znamenitom radu „Zur Einführung der transfiniten Zahlen“ iz 1923. godine da se „Cantorov pojam [transfinitnog] ordinala može učiniti jednoznačnim i konkretnim“ (*eindeutig und konkret zu fassen*) tako da se Cantorov „donekle neodređen postupak“ (*etwas vage Verfahren*) generiranja brojeva $\omega, \omega + 1, \ldots$ zamijeni postupkom koji se temelji „na jednoznačnim skupovnoteorijskim operacijama“ (*auf eindeutigen Mengenoperationen beruhendes*) (von Neumann 1923: 199). Von Neumannova je osnovna zamisao da nema nikakve potrebe pretpostavljati kako su cijeli brojevi $1,2,3,\ldots$ već zadani, kao i da je prirodnije započeti konstrukciju brojem 0 umjesto brojem 1. Jednako tako, smatrao je da nije potrebno govoriti o „ordinalnim tipovima“, budući da taj pojam drži nedovoljno preciznim. Umjesto toga, svaki se ordinal može definirati kao skup svih prethodnih ordinala (*op. cit.*, *ad loc.*). Tako broju 0 odgovara prazan skup $\emptyset$, broju 1 singleton $\{\emptyset\}$, broju 2 skup $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, i tako dalje (v. *Sl. 35*).

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{\emptyset\}$$

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$\vdots$$

$$\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$$

$$\omega + 1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}\}$$

$$\vdots$$

Sl. 35. Von Neumannova konstrukcija

Vodeća Conwayeva ideja u nultom dijelu ONAG jest pokazati da su i Dedekindova konstrukcija pomoću rezova i von Neumannova konstrukcija polazeći od praznoga skupa

> „zapravo dio jednostavnije i općenitije metode kojom se može konstruirati vrlo velika klasa brojeva **No**, koja istodobno obuhvaća realne i [transfinitne] ordinalne brojeve, ali i mnoge druge brojeve, poput prethodno spomenutih [sc. $\frac{1}{\omega}$ ili $\sqrt[3]{(\omega+1)} - \pi/\omega$]. Zbog općenitosti te klase njezine ćemo članove nazivati jednostavno *brojevima*, bez ikakva dodatnog ograničavajućeg pridjeva. Kao što ćemo vidjeti, pokazat će se da je **No** polje – i to polje čija je domena prava klasa (*proper class*)." (Conway 1976: 4, Conwayev izvorni kurziv)[619]

Dva temeljna principa na kojima Conway zasniva uvođenje nadrealnih brojeva jesu takozvano *pravilo konstrukcije* i *pravilo konvencije*:

(**Konstrukcija**)	Ako su L i R bilo koja dva skupa brojeva, te ako element skupa L nije $\geq$ nijednom elementu skupa R, tada postoji broj $\{L\|R\}$. Svi se brojevi konstruiraju na taj način.
(**Konvencija**)	Ako je $x = \{L\|R\}$, tada elemente skupa L označujemo s x^L (Conway *ad loc.* kaže da se x^L može čitati kao „tipični član skupa L"), a elemente skupa R s x^R („tipičan član skupa R"). Drugim riječima, ako je $x = \{a, b, c, \dots \| d, e, f, \dots\}$, onda su $a, b, c, \dots$ tipični članovi skupa L, a $d, e, f, \dots$ tipični članovi skupa R. (Conway 1976: 4)

[619] U teorijama skupova poput NBG (von Neumann-Bernays-Gödel), koji predstavlja konzervativno proširenje standardne teorije ZFC (Zermelo-Fraenkel s aksiomom izbora), uz skupove možemo govoriti i o klasama. Štoviše, za razliku od ZFC, u teoriji NBG klase su osnovni entiteti i glavni predmet proučavanja, dok su skupovi samo posebna vrsta klasa. Poznato je da je svaki skup ujedno i klasa, pa se u tom smislu može govoriti o takozvanim *skupovnim klasama*: klasa X je skup AKKO postoji klasa Y takva da vrijedi $X \in Y$. Međutim, klase poput *pravih klasa*, o kojima ovdje govori Conway, nisu skupovi jer ne mogu biti elementi nijedne druge klase. Jezik teorije NBG sadrži čak i poseban nelogički simbol V, pri čemu se $V(a)$ čita kao „a je skup", a $\neg V(a)$ kao „a je prava klasa". Za više pojedinosti v. Kron 1992, Poglavlje 12 („Alternativne teorije skupova"), str. 132ff.

Što se pak tiče definicija osnovnih relacija i operacija, i one su iznimno jednostavne (sve prema Conway 1976: 4–5; usp. i Conway 1994: 96):

(i) $x \geq y$ AKKO ne postoji ni jedan član $x^R \leq y$ niti nijedan član $y^L \geq x$;

(ii) $x \leq y$ AKKO $y \geq x$;

(iii) $x = y$ AKKO $x \geq y$ i $y \geq x$;

(iv) $x > y$ AKKO $x \geq y$ i $y \ngeq x$;

(v) $x + y = \{x^L + y, x + y^L | x^R + y, x + y^R\}$;

(vi) $-x = \{-x^R | -x^L\}$;

(vii) $xy = \{x^L y + xy^L - x^L y^L, x^R y + xy^R - x^R y^R |$
$x^L y + xy^R - x^L y^R, x^R y + xy^L - x^R y^L\}$

(viii) za svaki $x \neq 0$, može se pronaći

$$y = \{0, \frac{[1+(x^R-x)y^L]}{x^R}, \frac{[1+(x^L-x)y^R]}{x^L} | \frac{[1+(x^L-x)y^L]}{x^L}, \frac{[1+(x^R-x)y^R]}{x^R}\},$$

takav da vrijedi $xy = 1$. (usp. Easwaran *et al.* 2025, §3.4.3, Supplement)

Kao što je istaknuo i sâm Conway, „već ovih nekoliko redaka definira realno zatvoreno polje iznimno bogate strukture“ (Conway 1976: 5); usp. aksiomatizaciju teorije uređenih polja u Odjeljku [2.6.3]. Sve su navedene definicije *induktivne*, pri čemu

> „indukcije ne zahtijevaju bazu, budući da se sva pitanja u konačnici svode na probleme koji se odnose na članove praznoga skupa. Općenito, želimo li dokazati neki iskaz $P(x)$ za sve brojeve x, dokazivat ćemo ga indukcijom, izvodeći $P(x)$ iz svih iskaza oblika $P(x^L)$ i $P(x^R)$. Rečenicu ‘Svi se brojevi konstruiraju na ovaj način’ uzimamo kao opravdanje legitimnosti takva postupka. Kada pak dokazujemo složeniji iskaz koji uključuje, primjerice, dvije varijable, $P(x, y)$, možemo primijeniti *dvostruku indukciju*, izvodeći $P(x, y)$ iz istinitosti svih iskaza oblika $P(x^L, y)$, $P(x^R, y), P(x, y^L), P(x, y^R)$ (te, ako je potrebno, i iz iskazâ $P(x^L, y^L), P(x^L, y^R)$, $P(x^R, y^R)$ i $P(x^R, y^L)$). Takve višestruke indukcije mogu se opravdati uobičajenim uzastopnim primjenama obične indukcije.“ (*op. cit.*, *ad loc.*)

Što se tiče motivacije za formuliranje upravo takvih definicija, Conway otkriva da ga je vodila ista vrsta razmišljanja kao i Veronesea, Levi-Civitu i Robinsona prije njega, a koja se odnosi na princip permanencije:

> „[N]amjera nam je bila da svaki novi [sc. novokonstruirani] broj x leži između brojeva x^L (slijeva) i x^R (zdesna) te da relacije i operacije $\geq, +, \cdot$ i ostale zadrže [i u **No**] *sva svoja uobičajena svojstva*.“ (*ibid.*, moj kurziv)

Conway zatim napominje da se ova rečenica može shvatiti i kao svojevrsni *moto* njegova pristupa konstrukciji nadrealnih brojeva u ONAG. Drugim riječima, sve standardne relacije i operacije u polju nadrealnih brojeva **No** ponašaju se na potpuno isti način kao i u standardnom polju $\mathbb{R}$ realnih brojeva, pri čemu to vrijedi za sve elemente polja **No**, *bez iznimke* – ne samo za konačne nego i za beskonačne te infinitezimalne brojeve:

> „Ove komentare [prethodnih definicija] možemo sumirati time što ćemo reći da su definicije različitih relacija i operacija naprosto najjednostavnije moguće definicije koje su u skladu s njihovim intendiranim svojstvima.“ (Conway 1976: 6)[620]

Sada možemo vidjeti kako se konstruiraju i neki konkretni nadrealni brojevi, pri čemu valja imati na umu da su uobičajeni realni brojevi koji će se pojavljivati u Conwayevoj konstrukciji također samo jedna vrsta nadrealnih brojeva (usp. Conway 1994: 93). Izlaganje koje slijedi temelji se na Conwayevu prikazu (1976: 6–14). I Knuth (u *Surreal Numbers*) i Conway (u ONAG) konstrukciju polja **No** prikazuju kao svojevrsnu priču o postanku nadrealnih brojeva, koja se odvija postupno, počevši od nultoga dana:

> „U početku bijaše praznina, a J. H. W. H. Conway poče stvarati brojeve. Conway reče: ‘Neka budu dva pravila koja će donijeti sve brojeve, velike i male.’“ (Knuth 1974: 6)

Ako konstrukcija nadrealnih brojeva započinje nultoga dana i ako imamo na umu način na koji je formulirano pravilo konstrukcije – svaki je broj oblika $\{L \mid R\}$, pri čemu su L i R skupovi prethodno konstruiranih brojeva – nameće se pitanje kako konstrukcija sustava **No** uopće može započeti, budući da nultoga dana još nemamo na raspolaganju nijedan prethodno konstruiran broj. Upravo ovdje na scenu stupa prethodno skicirana von Neumannova konstrukcija ordinala: nema razloga pretpostaviti da su nam neki brojevi već zadani ili konstruirani, i to ne vrijedi samo za prirodne brojeve $1,2,3,\ldots$, nego i za broj 0. Poanta je u tome da „i prije nego što uopće imamo ikakve brojeve, ipak imamo jedan skup brojeva, naime prazan skup $\emptyset$!“ (Conway 1976: 7). Prvi, odnosno najraniji broj oblika $\{L \mid R\}$ koji se uopće može konstruirati jest onaj kojemu su i lijevi i desni skup prazni, odnosno $L = R = \emptyset$. Prema tome,

$$0 = \{|\},$$

pri čemu je riječ o Conwayevoj pojednostavljenoj notaciji za slučaj kada su i lijevi i desni skup prazni.[621] Da je 0 doista broj, vidi se iz činjenice da gotovo automatski zadovoljava definicije (i)–(viii), budući da jednostavno ne postoje ni ni 0^L ni 0^R, pa stoga ne može postojati ni nejednakost oblika $0^L \geq 0^R$. Budući da ne mogu postojati ni nejednakosti oblika $0^R \leq 0$ ili $0 \leq 0^L$, slijedi da vrijedi $0 \geq 0$, pa prema definiciji imamo i $0 = 0$. Iz definicija se također neposredno vidi da je $-0 = 0$, kao i da za svaki broj x vrijedi $x \cdot 0 = 0$.

---

[620] Još jedna važna okolnost koju valja imati na umu u vezi s Conwayevim načinom definiranja relacija i operacija na polju **No**, kao i s induktivnom naravi tih definicija, jest da se, kad god želimo nešto ustvrditi o nekom nadrealnom broju, „u duhu ovih definicija prvo treba zapitati što već znamo o objektu koji definiramo (na temelju odgovora na neka prethodna, jednostavnija pitanja), a zatim tako dobivene odgovore na odgovarajući način uključiti u samu definiciju.“ (Conway 1976: 6) Primjerice, želimo li da zbrajanje u polju **No** zadrži sva svoja uobičajena svojstva (komutativnost, asocijativnost i tako dalje), moramo se najprije zapitati što već znamo o nadrealnim brojevima x i y kako bismo na odgovarajući način definirali njihov zbroj $x + y$. Budući da prema pravilima konstrukcije i konvencije znamo da se x nalazi između x^L i x^R, a y između y^L i y^R, neposredno slijedi da se i zbroj $x + y$ mora nalaziti između brojeva $x^L + y$ i $x + y^L$ (slijeva) i $x^R + y$ i $x + y^R$ (zdesna). Upravo to i izražava prethodno navedena definicija zbroja $x + y$ iz točke (v). *Mutatis mutandis*, isto vrijedi i za ostale definicije.

[621] Općenito govoreći, simbol | razgraničuje elemente slijeva od elemenata zdesna, pa intuitivno možemo govoriti o elementima koji se nalaze prije i poslije te „granice“.

Nakon toga u konstrukciji daljnjih („kasnijih“) brojeva na raspolaganju više nemamo samo prazan skup odnosno, kako to Conway označava, {}, nego i broj $0 = \{|\}$. Tako već prvoga dana dobivamo

$$\{|\}, \quad \{0|\}, \quad \{|0\}, \quad \{0|0\}.$$

Budući da je $\{|\} = 0$ i da vrijedi $0 \geq 0$, izraz $\{0|0\}$ uopće ne određuje broj, pa dobivamo samo dva nova nadrealna broja:

$$\{0|\} = 1 \qquad \text{i} \qquad \{|0\} = -1.$$

Drugoga dana na raspolaganju imamo tri broja, $-1 < 0 < 1$, a time i znatno više mogućnosti za konstrukciju novih brojeva, budući da za skupove L i R sada možemo koristiti i skupove

$$\emptyset \text{ to jest } \{\}, \ \{-1\}, \ \{0\}, \ \{1\}, \ \{-1, 0\}, \ \{-1, 1\}, \ \{0, 1\}, \ \{-1, 0, 1\}.$$

Uvjet sadržan u pravilu konstrukcije, prema kojem nijedan element skupa L ne smije biti veći ili jednak nijednom elementu skupa R, ograničava nas na sljedeće mogućnosti:

$$\{|R\}, \ \{L|\}, \ \{-1|0\}, \ \{-1|0, 1\}, \ \{-1|1\}, \ \{0|1\}, \ \{-1, 0|1\}.^{622}$$

Tako, sada možemo definirati i brojeve $2, \frac{1}{2}, -2$ i $-\frac{1}{2}$ na sljedeći način:

$$\{1|\} = 2, \quad \{0|1\} = \frac{1}{2}, \quad \{|-1\} = -2, \quad \{-1|0\} = -\frac{1}{2}.^{623}$$

Kada dođemo do trećega dana, Conway napominje da, ako su L i R skupovi sastavljeni od već konstruiranih brojeva te ako su ti brojevi totalno, odnosno linearno uređeni, tada je u svakom izrazu oblika $x = \{x^L|x^R\}$ dovoljno promatrati samo najveći element skupa x^L i najmanji element skupa x^R (usp. Conway 1976: 10). Stoga trećega dana dobivamo brojeve

$$0 < \left\{0\middle|\frac{1}{2}\right\} < \frac{1}{2} < \left\{\frac{1}{2}\middle|1\right\} < 1 < \{1|2\} < 2 < \{2|\},$$

kao i njima odgovarajuće negativne brojeve

$$\{|-2\} < -2 < \{-2|-1\} < -1 < \left\{-1\middle|-\frac{1}{2}\right\} < -\frac{1}{2} < \left\{-\frac{1}{2}\middle|0\right\} < 0.$$

Na taj način možemo definirati i brojeve $3, \frac{3}{2}$ odnosno $1\frac{1}{2}$, zatim $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$ na sljedeći način:

$$\{2|\} = 3, \qquad \{1|2\} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}, \qquad \left\{\frac{1}{2}\middle|1\right\} = \frac{3}{4}, \qquad \left\{0\middle|\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{4}.$$

Njima odgovarajući negativni brojevi $-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}$ odnosno $-1\frac{1}{2}$, te -3 definiraju se potpuno analogno:

---

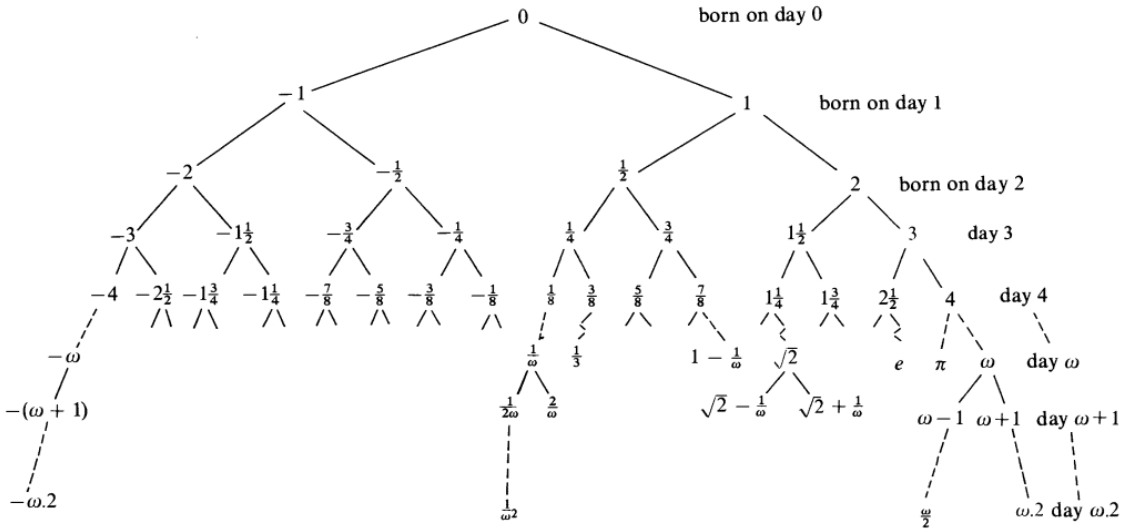
[622] Jasno je da bi $\{1|\}$ trebalo da bude veće od 1, kao i da $0 < \{0|1\} < 1$.

[623] Nadrealni brojevi mogu da imaju više alternativnih definicija. Na primer, $2 = \{1|\} = \{0,1|\} = \{-1,1|\} = \{-1,0,1|\}$.

$$\left\{-\frac{1}{2}\middle|0\right\} = -\frac{1}{4}, \qquad \left\{-1\middle|-\frac{1}{2}\right\} = -\frac{3}{4}, \qquad \{-2|-1\} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}, \qquad \{|-2\} = -3.$$

Kao što napominje Conway, nije teško uočiti po kojem se obrascu dalje odvija konstrukcija svih onih brojeva za čiju je konstrukciju potreban konačan broj dana:

> „Zamislimo da brojevi nastaju sukcesivno, 'dan za danom', tako da na dan broj n konstruiramo sve brojeve oblika $x = \{L \mid R\}$ za koje je svaki element svakog od dva skupa L i R već prethodno konstruiran. Dan kada je konstruiran broj 0 nazivamo nultim danom, tako da naša priča o postanku započinje nultoga dana. Tada se čini da brojevi tvore stablo poput onoga prikazanog na slici [v. *Sl. 36*]. Svaki čvor toga stabla ima dvoje 'djece', odnosno prve kasnije brojeve koji se rađaju neposredno slijeva i zdesna od njega. Pretpostavljamo da su krajnji brojevi rođeni n-toga dana upravo n i $-n$, dok je svaki drugi [prethodno 'rođeni', odnosno konstruirani] broj aritmetička sredina brojeva koji se nalaze neposredno lijevo i desno od njega. […] Prihvatimo li sve to, tada poznajemo sve brojeve rođene tijekom konačno mnogo dana." (Conway 1976: 10–12



Sl. 36. Binarno stablo **No** nadrealnih brojeva (preuzeto iz Conway 1976: 11)

Kao što se vidi na *Sl. 36*, proces „rađanja", odnosno konstruiranja nadrealnih brojeva ne završava nijednoga konačnog dana n, nego se nastavlja i nakon svih konačnih brojeva oblika n, budući da, kao i kod Cantora, nakon njih dolaze transfinitni brojevi poput ω. Koji su brojevi rođeni na dan ω? Najveći broj rođen ω-toga dana, očito, jest sam broj ω, koji definiramo kao

$$\omega = \{0,1,2,3, \ldots |\}.$$

S druge strane, odgovarajući najveći negativni broj rođen ω-toga dana jest $-\omega$, koji definiramo kao

$$-\omega = \{|0, -1, -2, -3, \ldots\}.$$

Budući da se u ovoj disertaciji neprestano bavimo nearhimedovskom, odnosno infinitezimalnom matematikom, osobito je zanimljivo da je ω-toga dana, kako kaže i sam Conway, „iznenađujuće i srećom“ (*surprisingly and fortunately*), rođen i najmanji pozitivni broj $1/\omega$, koji definiramo kao

$$\frac{1}{\omega} = \left\{0 \middle| 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\},$$

odnosno upravo onako kako se infinitezimali definiraju još od Veronesea pa sve do danas: kao brojevi koji su manji od svakoga pozitivnog realnog broja, a ipak veći od nule. Kao što se vidi na *Sl. 36*, ω-toga dana rođeni su i sasvim „obični“ brojevi poput

$$\frac{1}{3} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{21}{64}, \dots \middle| \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{11}{32}, \dots\right\},$$

ali i neki znameniti brojevi poput $\sqrt{2}$, e i π. Potpuno isti princip konstrukcije primjenjuje se i dalje, počevši od sljedećega, $(\omega+1)$-oga dana, te se nastavlja *in infinitum*. Sâm Conway bio je osobito zadovoljan činjenicom da se „Cantorovi ordinalni brojevi (modificirani na von Neumannov način) također vrlo lijepo uklapaju“ u sustav **No** (Conway 1976: 12). Štoviše, na jednome mjestu primjećuje da, *kao što realni brojevi popunjavaju praznine među cijelim brojevima*, *tako nadrealni brojevi popunjavaju praznine među Cantorovim ordinalnim brojevima* (usp. Conway & Guy 1996: 26). I doista, pogledamo li način na koji su definirani, ordinalni brojevi – kako konačni tako i transfinitni – upravo su oni nadrealni brojevi $\{L \mid R\}$ koji nastaju uz dodatni zahtjev da desni skup R bude prazan. Drugim riječima, neki je nadrealni broj α ordinal ako se može zapisati u obliku $\alpha = \{L \mid\}$ (Conway 1976: 27). Naredna Conwayeva opaska zavrjeđuje da bude navedena u cijelosti:

> „Možemo reći da je Cantora zanimalo ići sve više i sve dalje udesno, dok se Dedekind usput zaustavljao kako bi popunjavao praznine, tako da je [skup] R kod Cantora uvijek bio prazan, a nikada prazan kod Dedekinda. Zapanjujuće je da odbacivanjem tih ograničenja dobivamo *teoriju koja je istodobno i općenitija i jednostavnija za rad*.“ (Conway 1976: 13, moj kurziv)

Naravno, jasno je da se ni u slučaju polja **No**, kao prethodno ni u slučaju Veroneseova polja $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ ili Robinsonova polja $^*\mathbb{R}$, beskonačni brojevi koji se pojavljuju kao elementi tih polja ne mogu poistovjetiti s Cantorovim izvornim transfinitnim ordinalima.[624] Podsjetimo, Cantor je, za razliku od Veronesea, Levi-Civite i Robinsona, izričito odbacio princip permanencije kada je riječ o transfinitnim ordinalima, inzistirajući na tome da za njih vrijedi posebna ordinalna aritmetika (v. Odjeljak [2.6.1] te usp. Kron 1992, Poglavlje 8, odjeljak „Elementi ordinalne aritmetike“, str. 75–77). Kao što se vidi na *Sl. 36*, $(\omega+1)$-oga dana nije rođen samo broj $\omega + 1 = \{0,1,2,3, \dots, \omega|\}$, koji je i u Cantorovoj teoriji dobro definiran i posve legitiman, nego i broj $\omega - 1$, koji u Cantorovoj teoriji uopće nema smisla, budući da je ω po definiciji prvi transfinitni ordinal. Nadrealni broj $\omega - 1$ koji Conway definira kao

[624] Time je i sâm Conway bio donekle neprecizan kada je na jednome mjestu napisao da se njegov nadrealni broj ω „može poistovjetiti“ (*may be identified*) s prvim od Cantorovih beskonačnih ordinalnih brojeva (Conway 1994: 100). Strogo matematički govoreći, to nije točno.

$$\omega - 1 = \{0,1,2,3, \ldots \mid \omega\}$$

zapravo *u potpunosti* odgovara Veroneseovom broju $\infty_1 - 1$ (usp. Odjeljak [2.6.1]). Možemo definirati i niz drugih atipičnih, nekantorovskih brojeva, primjerice:

$$1 - \frac{1}{\omega} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots \middle| 1\right\},$$

$$-(\omega + 1) = \{|0, -1, -2, -3, \ldots, -\omega\},$$

$$\frac{2}{\omega} = \{\frac{1}{\omega} | 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\},$$

$$\frac{1}{2\omega} = \left\{0 \middle| \frac{1}{\omega}\right\},$$

$$2 + \frac{1}{\omega} = \left\{2 \middle| \frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{17}{8}, \ldots\right\},$$

$$\frac{\omega}{2} = \{0,1,2,3, \ldots | \omega, \omega - 1, \omega - 2, \omega - 3, \ldots\},$$

$$\frac{1}{\omega^2} = \left\{0 \middle| \frac{1}{\omega}, \frac{1}{2\omega}, \frac{1}{4\omega}, \ldots\right\},$$

$$\sqrt{\omega} = \{0,1,2,3, \ldots | \omega, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{4}, \frac{\omega}{8}, \ldots\},$$

i tako dalje (usp. Easwaran *et al.* 2025, §3.4.3, Supplement). Zanimljivo je da se barem neki od tih brojeva mogu pronaći i u Veroneseovu polju $\boldsymbol{\mathcal{V}}$.

Polje $\mathbf{No}$, odnosno *nadrealni brojevni pravac* (koji možemo jednostavno zamisliti tako da binarno stablo sa *Sl. 36* „spljoštimo“ u jednu dimenziju), zanimljivo je, kao uostalom i Veroneseovo polje $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, po tome što sadrži *proreze* (usp. Odjeljak [2.6]). Conway, naime, dopušta da se govori o Dedekindovim rezovima u polju $\mathbf{No}$ te definira prorez $\Xi = (L, R)$, gdje su L i R disjunktne klase (pri čemu svaki element klase L prethodi svakomu elementu klase R) čija je unija, $L \cup R$, prava klasa $\mathbf{No}$ svih nadrealnih brojeva (Conway 1976: 37). Conway *ad loc.* napominje da su pojedini prorezi „dovoljno važni da zaslužuju vlastita imena“, pa tako razlikuje:

(a) prorez $\mathbf{On} = (\mathbf{No}, \emptyset)$ na samome kraju nadrealnoga brojevnog pravca;

(b) prorez $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{On}}$ između nule i svih pozitivnih brojeva nadrealnoga brojevnog pravca;

(c) prorez ∞ između realnih i pozitivno beskonačnih brojeva nadrealnoga brojevnog pravca;

(d) prorez $\frac{1}{\infty}$ između infinitezimala i pozitivnih realnih brojeva nadrealnoga brojevnog pravca.

Za kraj ovoga odjeljka, slijedeći Ehrlichovu razradu Conwayevih ideja, želio bih iznijeti nekoliko napomena o sustavu $\mathbf{No}$ koje bi trebale dodatno istaknuti zbog čega je teorija nadrealnih brojeva doista jedinstvena te filozofski, povijesno i matematički iznimno zanimljiva. S historiografskoga je gledišta uvijek značajno kada se sâm autor, s određenom vremenskom i/ili metateorijskom distancom, osvrne na vlastitu teoriju. Govoreći retrospektivno o logičkim i skupovnoteorijskim aspektima sustava $\mathbf{No}$, Conway je 1994. istaknuo da je njegov temeljni cilj pri formuliranju teorije nadrealnih brojeva bio izbjeći

skupovnoteorijske konstrukcije brojeva unutar ZFC koje su, prema njegovim riječima, „neprirodne, irelevantne i komplicirane“, dodajući pritom da se vodio Ockhamovim ontološko-metodološkim principom (*entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*)[625], koji „odsijeca“ sve takve usiljene i protuintuitivne konstrukcije (usp. Conway 1994: 99). Sljedeći ulomak dobro ilustrira Conwayev *modus operandi*:

> „Ranije sam rekao: ‘Ako su L i R bilo koja dva skupa brojeva […], tada postoji broj $\{L|R\}$.’ Ali što JE taj broj? Matematičari navikli raditi unutar Zermelo-Fraenkelove teorije skupova u pravilu na to pitanje nastoje odgovoriti unutar same te teorije, definirajući broj kao uređeni par $\langle L, R\rangle$, čiji su elementi L i R skupovi brojeva. Prisjetimo se da je Kuratowski pokazao kako se i sam taj uređeni par može definirati kao skup, naime kao $\{\{L\},\{L,R\}\}$. Razlog zbog kojega ja to ne činim jednostavno je taj što ne mislim da je [nadrealni] broj x koji definiramo doista TA luda stvar $\{\{L\},\{L,R\}\}$! Štoviše, ne mislim čak ni da skupovi L i R ulaze u samu konstrukciju. Radije smatram da je [broj x] izravno konstruiran iz ELEMENATA [skupova] L i R. Tako, primjerice, ako imamo definiciju $x = \{0,1|2\}$, držim da je taj x konstruiran izravno iz prethodno [konstruiranih] brojeva 0, 1 i 2. […] Prirodno okruženje u kojem bi trebalo izgraditi [sustav] nadrealnih brojeva jest ono u kojem je $\{\ldots|\ldots\}$ primitivan konstrukt. Budući da to očito nije logički ništa složenije od uobičajene teorije skupova, zašto bismo uopće nastojali utopiti [konstrukciju sustava **No**] u teoriju [skupova]? […] **I doista, teorija nadrealnih brojeva uistinu je vrlo jednostavna s čisto logičkoga stajališta**. Polazimo od nečega što je u biti tek teorija skupova, nekolicine induktivnih definicija i nekolicine dokaza od po jedan redak te dobivamo polje svih nadrealnih brojeva.“ (Conway 1994, *ad loc.*, moja emfaza dodata podebljanim slovima)

I doista, usporedimo li Conwayevu konstrukciju realnih brojeva s Dedekindovom ili Cantorovom, ona je neusporedivo jednostavnija i elegantnija. Štoviše, zapitamo li se kako je unutar iznimno bogate strukture **No** moguće izdvojiti uređeno polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva, pokazuje se da je i to iznenađujuće jednostavno. Kao što smo kod Veronesea i Levi-Civite u poljima $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, odnosno $\mathcal{R}$, uvijek mogli izdvojiti $\mathbb{R}$ oslanjajući se naprosto na arhimedovsko svojstvo (budući da, podsjetimo, polja $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ i $\mathcal{R}$ sadrže izomorfne kopije polja realnih brojeva[626]), tako je i u sustavu **No** među nadrealnim brojevima moguće jednostavno izdvojiti standardne realne brojeve pomoću Conwayeve definicije: nadrealni broj x realan je akko vrijedi $-n < x < n$ za neki cijeli broj n te

$$x = \left\{x - 1, x - \tfrac{1}{2}, x - \tfrac{1}{3}, \ldots \middle| x + 1, x + \tfrac{1}{2}, x + \tfrac{1}{3}, \ldots\right\},$$

odnosno, kraće zapisano,

---

[625] Premda je općepoznata, ta se formulacija Ockhamove britve ne nalazi ni u jednome Ockhamovu logičkom ili metafizičkom spisu. Za više pojedinosti v. Kneale & Kneale 1962: 243ff.

[626] Usp. sa uređenim poljem $^*\mathbb{R}$ hiperrealnih brojeva, u kojemu je kvocijentni prsten M_0/M_1 izomorfan polju $\mathbb{R}$. V. prethodni odjeljak te raspravu o arhimedovskim klasama u Odjeljku [2.6.1].

$$x = \left\{x - \left(\frac{1}{n}\right) \middle| x + \left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n>0},$$

gdje n prolazi svim cijelim brojevima (Conway 1976: 24). Conway dodaje da je, iz *logicističke perspektive* zasnivanja realnih brojeva, riječ o najjednostavnijoj mogućoj konstrukciji kojom se dobiva uređeno polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva.

No to ne vrijedi samo za konstrukciju realnih brojeva. Ono što pristup koji je Conway razvio u ONAG čini jedinstvenim te, s logičkoga gledišta, najjednostavnijim, a time i najuspjelijim načinom konstruiranja *svih brojeva općenito*, jest činjenica da se tijekom čitave konstrukcije radi isključivo s *jednom jedinom vrstom brojeva* (usp. Conway 1976: 27). Ne pretpostavlja se da je ijedna klasa brojeva u bilo kojem smislu povlaštena, bazičnija ili superiornija od drugih; ne pretpostavlja se ni da su neki brojevi već unaprijed zadani ili prethodno konstruirani[627]; štoviše, *pace* Cantoru, ne uvodi se nikakva načelna razlika između konačnih i nekonačnih (beskonačnih i infinitezimalnih) brojeva, pa tako ni između „malih" i „velikih" brojeva. Drugim riječima, Conway je ponudio potpuno *uniformnu i nediskriminatornu* konstrukciju brojeva u kojoj su svi brojevi *ontološki i funkcionalno u potpunosti ravnopravni*.

Još jedna specifičnost sustava **No** očituje se u činjenici da svaki nadrealni broj ima *jedinstveno vlastito ime* (Conway 1976: 3 *et passim*; usp. i Ehrlich 2001, §3.1 te Ehrlich 2012, THEOREM 8, str. 9). Primjerice, numeral „3" funkcionira kao *singularni termin*, odnosno vlastito ime nadrealnoga broja $\{2\,|\}$.[628] Čini se da je i Levi-Civita već imao sličnu ideju. Na to upućuje činjenica da je nestandardne brojeve definirane pomoću redova potencija, koji čine elemente njegova nearhimedovskog polja $\mathcal{R}$, nazvao *numeri monosemii* („jednoznačni", odnosno „jedinstveni brojevi"). Kao što sam već naznačio u Odjeljku [2.6.2], taj je naziv vjerojatno povezan s načinom na koji funkcioniraju Dedekindov rez, Veroneseov rez, kao i Conwayev konstrukt $\{_|_\}$: svi oni jednoznačno izdvajaju jedan jedini objekt, odnosno broj. Primjerice, Dedekindov rez $(\{\alpha \in \mathbb{Q}: \alpha < 0 \vee \alpha^2 < 2\}, \{\alpha \in \mathbb{Q}: \alpha > 0 \vee \alpha^2 > 2\})$ definira, odnosno jednoznačno određuje broj $\sqrt{2}$.

Iz toga možemo izvesti i jednu važnu filozofsku pouku o ontološkom statusu infinitezimala. Naime, premda smo vidjeli da se infinitezimali mogu konzistentno uvesti na više različitih načina – kao elementi Veroneseova polja, odnosno kao infinitezimalne dužine

---

627 Kao što smo vidjeli, to ne vrijedi, *pace* Kroneckeru, čak ni za cijele brojeve, čime otpada i Kroneckerov znameniti konstruktivistički *credo*: „*Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk*" (izrečen na 59. skupu Njemačkoga udruženja prirodoslovaca i liječnika u Berlinu 1886. godine; usp. Weber 1893: 19). Imajući na umu prethodno navedenu Knuthovu opasku iz djela *Surreal Numbers*, možemo reći da je Conway *konstruirao sve brojeve*, uključujući i cijele brojeve.

628 Kao što je dobro poznato iz literature iz filozofije jezika i filozofije logike, takvo bi se stajalište moglo okarakterizirati kao fregeovsko, budući da je Gottlob Frege (1848–1925) u svojoj analizi pojma (kardinalnoga) broja (Anzahl) u djelu Grundlagen der Arithmetik tvrdio da numerali predstavljaju vlastita imena (apstraktnih) objekata – brojeva. Štoviše, kao neizravnu potvrdu te teze navodio je i samu jezičnu praksu, odnosno „njemačku jezičnu uporabu" (*deutscher Sprachgebrauch*) (usp. Frege 1884, §§ 38, 51–52), jer kada kažemo „broj jedan" (*die Zahl Eins*), određeni član die upućuje (deutet) na jedinstveni pojedinačni predmet matematičkoga istraživanja (*einen bestimmten, einzelnen Gegenstand der wissenschaftlichen Forschung*). Već nam, dakle, sintaktička struktura izraza i rečenica u kojima se pojavljuju numerički izrazi, primjerice „*Die Zahl* 2 *ist die kleinste Primzahl*", sugerira da oni funkcioniraju kao singularni termini, odnosno imena, dok semantika, sukladno tomu, upućuje na to da referiraju na objekte. Za suvremenu raspravu o Fregeovoj tezi v. Moltmann 2017.

koje čine konstitutivne elemente njegova linearnoga geometrijskog kontinuuma, kao elementi Levi-Civitina ili Hilbertova polja, kao Robinsonove monade, odnosno elementi polja hiperrealnih brojeva, ili pak kao nadrealni brojevi, to jest konstitutivni elementi Conwayeva aritmetičkog kontinuuma – činjenica je da, ontološki gledano, svi ti infinitezimali *nisu isti*. Naravno, budući da su svi konzistentno definirani ili konstruirani, svi oni matematički postoje, međutim, stvar je u tome da *ne postoje na isti način*.

Premda Veronese govori o *infinitesimi attuali*, pojedine formulacije koje smo analizirali u odjeljcima [2.6] i [2.6.1] sugeriraju da još uvijek polazi od dinamičkoga, a ne strogo statičkoga shvaćanja infinitezimala. To se vidi, primjerice, već iz formulacije njegova aksioma neprekidnosti, u kojoj se govori o intervalima ili dužinama koje „postaju neodređeno male". Na to upućuje i činjenica da je za Veronesea infinitezimalnost, kao uostalom i beskonačnost, *u biti relativan*, *a ne apsolutan pojam*. Tako je svaki element polja $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ uvijek konačan s obzirom na intrinzičnu skalu, odnosno jediničnu dužinu potpolja kojemu pripada, dok postaje infinitezimalan ili beskonačan tek u usporedbi s dužinama izvan polja te skale (*fuori del campo della scala*). Slijedom toga, ista dužina može istodobno biti konačna, beskonačna i infinitezimalna, pri čemu nema nikakva proturječja upravo zato što su svi ti pojmovi relativni. S druge strane, u Odjeljku [4.1] vidjeli smo da se srodan problem javlja i kod beskonačno malih hiperrealnih brojeva. Naime, hiperrealni infinitezimali ne mogu se dobro individuirati niti jednoznačno izdvojiti na način na koji to mogu standardni realni ili nadrealni brojevi. Drugim riječima, infinitezimali tipa ε postoje *samo virtualno*, kao „oblačići", odnosno nestandardne okoline svakoga standardnog realnog broja, koje nije moguće jednoznačno fiksirati, nego ih možemo tek „vidjeti" na brojevnom pravcu uz pomoć vizualnih pomagala poput Keislerova mikroskopa (usp. *Sl. 34*). Možemo stoga zaključiti da je tek Conwayeva teorija omogućila govor o aktualnim infinitezimalima kao posve konkretnim i dobro individuiranim nadrealnim brojevima koji imaju precizno određeno mjesto u binarnome stablu $\mathbf{No}$ – vlastiti *čvor* – te se mogu jednoznačno fiksirati i na nadrealnom brojevnom pravcu.

Jedno od najupečatljivijih svojstava sustava $\mathbf{No}$, s kojim smo se već susreli i u slučaju polja $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, jest njegova *zapanjujuća inkluzivnost* kao nearhimedovskoga uređenog polja. Ehrlich to sažima sljedećim riječima:

> „Conwayevo realno zatvoreno polje $\mathbf{No}$ zapanjujuće je inkluzivno. Pod pretpostavkom da su nadrealni brojevi individualno definirljivi pomoću *skupova* teorije skupova NBG s aksiomom globalnoga izbora, može se reći da $\mathbf{No}$ sadrži 'sve velike i male brojeve' (*All Numbers Great and Small*), odnosno *sve konačne*, *beskonačne i infinitezimalne brojeve*. Iz perspektive logike prvoga reda to se može precizirati tvrdnjom da je $\mathbf{No}$, *do na izomorfizam*, *jedinstveni apsolutno zasićeni model teorije realno zatvorenih uređenih polja*." (Ehrlich 1994b: 240, Ehrlichov kurziv; za slične napomene v. i Ehrlich 1986: 238 te Ehrlich 2001: 1231)

Naime, Ehrlich je u spomenutom nizu radova pokazao da Conwayevo polje $\mathbf{No}$ sadrži, u obliku izomorfnih kopija, gotovo sva druga poznata uređena polja: kako arhimedovska, poput $\mathbb{R}$, tako i nearhimedovska, poput $^*\mathbb{R}$, pa čak i uopćenja hiperrealnih brojeva, primjerice takozvane *super-realne brojeve* (usp. Dales & Woodin 1996), ali i Tallove

superrealne brojeve (usp. Tall 1980). Poanta je u tome da se sve te strukture mogu identificirati s pojedinim „granama" sustava **No**. Drugim riječima, one predstavljaju inicijalne segmente binarnoga stabla nadrealnih brojeva, odnosno njegova podstabla. Ehrlich je prije dvadesetak godina dokazao teorem prema kojemu je „svako realno zatvoreno uređeno polje izomorfno rekurzivno definiranomu inicijalnom potpolju polja **No**" (usp. Ehrlich 2001). Slijedom toga, budući da se „**No** može, do na izomorfizam, okarakterizirati kao jedinstveno apsolutno gusto uređeno polje koje ne dopušta daljnje algebarsko proširenje na neko bogatije uređeno polje" (usp. Ehrlich 1994a: xxvii–xxviii), ono se, uz pretpostavku teorije skupova NBG, može smatrati *apsolutnim aritmetičkim kontinuumom*, jednako kao što se uređeno polje $\mathbb{R}$ smatra aritmetičkim kontinuumom (usp. Ehrlich 1986, 1989, 1992). To, naposljetku, znači da je **No** aritmetički pandan Veroneseovu apsolutnom geometrijskom kontinuumu, odnosno Veroneseovu polju $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Uzevši sve navedeno u obzir, slijedeći Ehrlicha možemo formulirati sljedeću tezu maksimalnosti (*maximality thesis*):

(**Max**) **No** i njegova geometrijska inačica $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ predstavljaju maksimalne strukture sposobne za realizaciju *svih mogućih tipova* aritmetičkih te n-dimenzionalnih euklidskih, hiperboličkih i eliptičkih geometrijskih gradacija, kao i svih mogućih njihovih uzajamnih kombinacija (uključujući, primjerice, semihiperboličke i semieliptičke prostore definirljive nad **No** odnosno $\boldsymbol{\mathcal{V}}$) (usp. Ehrlich 1986: 239).

Ne bi stoga trebalo čuditi što su i burbakisti u djelu *Éléments d'histoire des mathématiques* istaknuli da je rezultat *Grundlagen der Geometrie* koji je najviše impresionirao Hilbertove suvremenike bila upravo nearhimedovska geometrija, odnosno geometrija nad nearhimedovskim uređenim poljem, „koju je nekoliko godina prije Hilberta zapravo uveo Veronese u *Fondamenti di geometria*" (Bourbaki 1974: 29, nap. *). Nadalje, Bourbaki je, kao paradigmatski predstavnik *matematičkoga strukturalizma* (usp. Heinzmann & Petitot 2020), u poglavlju „La théorie des ensembles" posebno istaknuo važnost Veroneseova sustavnoga proučavanja nearhimedovskih uređenih struktura (*op. cit.*, str. 45, nap. *), a nešto kasnije, u poglavlju posvećenom teoriji polja, ocijenio je Veroneseovo uvođenje nearhimedovskih polja, čiji su elementi redovi potencija, fundamentalnim doprinosom razvoju moderne matematike (*op. cit.*, str. 109ff.; v. također Bourbakijevu verziju teorije skupova u Bourbaki 2004). S pravom, jer je upravo Veroneseova nearhimedovska geometrija, zajedno s njegovom teorijom apsolutnoga geometrijskog kontinuuma, trasirala put razvoju dvadesetostoljetne nearhimedovske matematike, koji svoj vrhunac doseže u Conway-Ehrlichovoj teoriji nadrealnih brojeva i apsolutnoga aritmetičkog kontinuuma.

ZAKLJUČAK

Primarni cilj interdisciplinarnoga (historiografskog, filozofskog i matematičkog) istraživanja provedenoga u ovoj disertaciji bio je utvrditi relevantnost *fin-de-siècle* doprinosa u području nearhimedovske (infinitenzimalne) matematike, a osobito rezultata talijanskog matematičara Giuseppea Veronesea u vezi sa zasnivanjem nearhimedovske geometrije, za proces modernizacijske transformacije matematike koji se odvijao u razdoblju između 1890-ih i 1920/30-ih. Zahvaljujući svojim pionirskim uvidima i fundamentalnim rezultatima u vezi s nearhimedovskim uređenim geometrijskim i algebarskim strukturama, Veronese je dao ključan doprinos intenzivnom preispitivanju dotadašnje percepcije toga kako bi trebale izgledati osnove matematike, kao i radikalnom preoblikovanju njezina konceptualnog, logičko-metodološkog i ontološko-epistemološkog okvira. Međutim, unatoč tomu, nakon inicijalne faze iznimno pozitivne recepcije, tijekom koje su Veroneseovi rezultati bili poznati, komentirani i proučavani u svim vodećim matematičkim centrima u Europi, Americi i Rusiji, prikazivani u najutjecajnijim referativnim časopisima te uvrštavani u sve najznačajnije matematičke enciklopedije na njemačkom, francuskom i talijanskom jeziku, već od 1920-ih moguće je uočiti zamjetan i nagao pad zanimanja za Veroneseove radove i istraživanja, praćen čak i pripisivanjem Veroneseovih originalnih rezultata drugim matematičarima. To je rezultiralo neobičnom situacijom u kojoj suvremeni matematičari, filozofi, ali i povjesničari matematike u pravilu ili ne znaju za Veronesea (ili, što se svodi na isto, uopće ne poznaju njegov rad), ili pak smatraju da je njegov utjecaj bio zanemariv ili minimalan te da je riječ o marginalnoj i ni po čemu iznimnoj pojavi u povijesti matematike i povijesti filozofije matematike s kraja 19. stoljeća. Glavni zadatak koji sam stoga postavio u disertaciji bio je provođenje detaljne analize ove *zapanjujuće asimetrije* u inicijalnim i kasnijim fazama povijesti recepcije Veroneseove nearhimedovske geometrije i njegovih ideja u vezi sa zasnivanjem matematike u jednom širem komparativnom kontekstu, kao i sustavna rekonstrukcija i kritičko preispitivanje svih relevantnih čimbenika i mogućih uzroka koji su, počevši od 1890-ih pa do danas, pridonijeli svojevrsnom *damnatio memoriae* Veroneseovih rezultata, kako u samoj matematičkoj praksi, tako i u suvremenoj historiografiji i filozofiji (nearhimedovske) matematike.

Prvi dio disertacije pretežno je uvodnoga karaktera, a najvažnije metodološke i historiografske postavke i poante izložene su u odjeljcima [1.1] i [1.3]. Metodološki pristup za koji sam se opredijelio polazi od temeljnoga uvida da mnogi matematički doprinosi razdoblja *fin-de-siècle*, uključujući i Veroneseove, nisu bili *filozofski neutralni*. Naprotiv, činjenica je da su središnje figure matematičkog modernizma poput Dedekinda, Cantora, Helmholtza, Veronesea ili Hilberta zapravo često djelovale i kao filozofi matematike, zbog čega je bilo nužno usvojiti kombinirani povijesno-filozofsko-matematički pristup, osjetljiv kako na *internalne čimbenike* razvoja određene matematičke discipline (matematičke rezultate, tehnike i metode u užem smislu), tako i na *eksternalne čimbenike*, među kojima su oni filozofske ili konceptualne naravi, naravno, bili osobito važni za moju analizu. Štoviše, već širi povijesno-filozofsko-matematički kontekst unutar kojega je Veronese zasnovao svoju nearhimedovsku geometriju govori u prilog opravdanosti takve kombinirane metodologije. Naime, pokazao

sam da je za ispravno razumijevanje inicijalnih reakcija na Veroneseove *Fondamenti* nužno imati na umu *tri dogme* koje su oblikovane još 1870-ih godina, a na kojima počiva standardna (arhimedovska) moderna matematika: (i) dogmu aritmetizacije odnosno degeometrizacije analize, koja podrazumijeva eliminaciju geometrijske intuicije te, općenito uzevši, vizualnih modela i dijagramskog rasuđivanja iz matematike; (ii) Cantor-Dedekindovu aritmetičko-skupovnoteorijsku dogmu, koja podrazumijeva infinitizam i poentilizam u pogledu strukture kontinuuma; (iii) vajerštrasovsku dogmu protiv infinitezimala, koja podrazumijeva uvjerenje da infinitezimali nisu samo nepotrebni za klasičnu analizu, nego da ih je moguće eliminirati iz matematike *tout court*. Budući da upravo te tri dogme predstavljaju temeljne osi duž kojih se odvijao proces reforme i modernizacije matematike u drugoj polovini 19. i na početku 20. stoljeća, s pravom se može reći da je Veronese i sâm djelomično pridonio nastanku pojedinih kontroverzi u vezi s vlastitom teorijom time što je već u svojem prvom pionirskom doprinosu nearhimedovskoj matematici iz 1889. godine izravno doveo u pitanje sve tri dogme: (a) *contra* (i), Veronese je inzistirao na autonomiji i legitimnosti čisto geometrijskih, sintetičko-konstruktivnih metoda te na intuiciji kao suštinskome preduvjetu geometrije; (b) *contra* (ii), formulirao je jednu specifičnu nearhimedovsku, a ujedno aristotelovsku, dakle nepoentilističku i nekantorovsku teoriju geometrijskog linearnog kontinuuma; (c) *contra* (iii), Veronese je pokazao da se infinitezimale mogu uvesti na konzistentan i rigorozan način, čime je opovrgnuo tada već dominantno stajalište, kako matematičara tako i filozofa, da su infinitezimali samoproturječni. Zbog stajališta i ideja izraženih u točkama (a)–(c), pojedini povjesničari su Veronesea svrstavali među kontramoderniste. Međutim, kao što sam pokazao u drugome dijelu disertacije, takve ocjene nisu samo neutemeljene, nego su i potpuno pogrešne, budući da je Veronese presudno utjecao na Hilberta, čiji se spis *Grundlagen der Geometrie* (1899) smatra svojevrsnim manifestom matematičkoga modernizma.

Drugi, najopsežniji i središnji dio rada posvećen je sustavnoj rekonstrukciji i interpretaciji Veroneseova projekta zasnivanja i razvoja nearhimedovske geometrije u *Fondamenti* i drugim publikacijama nastalima do približno 1909. godine. Uspješna realizacija toga zadatka bila je *ab initio* višestruko otežana iz više razloga. Prije svega, primarni izvori, odnosno Veroneseovi radovi relevantni za temu ove disertacije, većinom su objavljeni na talijanskom jeziku i u danas teško dostupnim publikacijama, zbog čega je bilo nužno provesti opsežno arhivsko istraživanje. Jedan od najvažnijih rezultata ostvaren u tom pogledu tijekom rada na disertaciji jest izrada digitalnoga repozitorija Veroneseovih sabranih matematičkih radova u okviru istraživanja koje sam proveo na projektu pod pokroviteljstvom Međunarodne komisije za povijest matematike, ICHM/IMU-IUHPST. Digitalizacijom Veroneseova opusa ostvario sam ono što je, po svojoj naravi, trebalo biti jedna od temeljnih zadaća projekta Edizione Nazionale *Mathematica Italiana*: povećati vidljivost jednoga od najznačajnijih talijanskih matematičara uopće i središnje figure Talijanske geometrijske škole. Drugo, kada je riječ o sekundarnoj filozofskoj i historiografskoj literaturi o Veroneseu, ona je, uz iznimku knjige Paole Cantù, gotovo nepostojeća i uglavnom slabo poznata. Stoga sam izradio i iscrpnu bibliografiju radova posvećenih Veroneseu, te tijekom istraživanja identificirao i nekoliko dosad nezabilježenih radova koji nisu bili ni spominjani u postojećoj literaturi. U Odjeljku [2.1] pokazao sam da čak i malobrojne suvremene specijalističke studije posvećene reevaluaciji i reviziji povijesti nearhimedovske matematike pate od istoga

fatalnoga nedostatka – *lakunarnosti*, s jedne strane, i *anahronosti*, s druge. Naime, njihovi autori u pravilu preskaču formativno razdoblje *fin-de-siècle*, tijekom kojega su, ponajprije zahvaljujući Veroneseu i matematičarima koji su ga slijedili, formulirani rezultati presudni za kasniji razvoj teorija infinitezimala u dvadesetom stoljeću, a istodobno smatraju da upravo teorije dvadesetoga stoljeća, poput Robinsonove nestandardne analize ili Lawvereove glatke infinitezimalne analize, predstavljaju adekvatan konceptualni, metodološki i interpretativni okvir za historiografsku rekonstrukciju, analizu i (re)evaluaciju starijih teorija infinitezimala. Osim lakunarnosti i anahronosti, dodatni problem s kojim se suočavaju tumačenja ove vrste jest tendencija da se povijest nearhimedovske matematike promatra *odviše usko*, odnosno gotovo isključivo kroz prizmu razvoja infinitezimalnoga računa i matematičke analize. Time se iz povijesne analize isključuju iznimno važni doprinosi teorijama infinitezimala koji su artikulirani u geometriji ili u području koje su matematičari krajem 19. stoljeća nazivali teorijom veličina (*Grössenlehre*, *teoria delle grandezze*), a čiji rezultati danas velikim dijelom potpadaju pod suvremenu algebru. Za razliku od autora koji takav nepovijesni način nastoje *otkriti novo u starome*, ja sam pri analizi povijesti recepcije Veroneseove teorije nastojao ustanoviti *kako se i u kojem obliku staro uopće pojavilo u novome*, pokušavajući pritom trasirati put ili putove transmisije matematičko-filozofskih ideja.

U odjeljcima [2.3]–[2.7] rekonstruirao sam ključne logičke, metodološke, ontološke i epistemološke pretpostavke na kojima počiva Veroneseov projekt zasnivanja geometrije, počevši od njegovih pionirskih radova iz područja geometrije hiperprostora i prvoga spora s Peanom o statusu n-dimenzionalne geometrije i prirodi geometrijskih aksioma ([2.3]) pa sve do komparativnog prikaza Veroneseovih aksiomatizacija elementarne (euklidske) geometrije u *Fondamenti* i u *Elementi di geometria* ([2.7]). Povijesno-filozofski promatrano, najzanimljiviji je najvjerojatnije Odjeljak [2.4], u kojemu sam ponudio prvo detaljno tumačenje Veroneseove filozofije geometrije *u aristotelovskom ključu*. Pokazao sam da se Veroneseove ideje o ontološkom statusu matematičkih objekata, epistemologiji geometrije i strukturi linearnoga geometrijskog kontinuuma ne samo mogu nego i moraju shvatiti kao *par excellence* varijacije na aristotelovsku temu. Odjeljak [2.5] historiografski je najznačajniji utoliko što sam u njemu pokazao u kojem je smislu već kod Veronesea moguće prepoznati sve bitne odlike prehilbertovskoga stila, čime sam doveo u pitanje utemeljenost dominantnog stajališta u historiografiji matematike prema kojem je Hilbert paradigmatski predstavnik matematičkoga modernizma. Štoviše, slijedeći tragove iz sačuvane korespondencije, komparativnom analizom relevantnih mjesta iz Veroneseovih *Fondamenti* i rukopisa Hilbertovih bilježaka za predavanja o osnovama geometrije i iz mehanike, koja je 1890-ih držao u Göttingenu, uspio sam pronaći tekstualnu evidenciju koja nedvojbeno potvrđuje da su Veroneseova istraživanja nezavisnosti Arhimedova aksioma iz 1889. i 1891. presudno utjecala na Hilberta i njegove *Grundlagen der Geometrie* iz 1899. U istom sam odjeljku pokazao i da je koncepciju *matematičke egzistencije* koja se u filozofskoj i povijesnoj literaturi u pravilu pripisuje Hilbertu, zapravo prvi artikulirao Veronese, kao, uostalom, i sve osnovne crte hilbertovskog modelnoteorijskoga pristupa proučavanju formalnih sustava koji će kasnije postati karakterističan za Hilbertovu aksiomatiku i metamatematiku. Odjeljci [2.6], [2.6.1], [2.6.2] i [2.6.3] više su tehničkog, logičko-matematičkoga, ali i povijesnoga karaktera. U njima sam pokazao kako je Veronese, oslanjajući se takoreći samo na vrlo rudimentarna geometrijska i algebarska sredstva,

konstruirao *apsolutni geometrijski kontinuum*, odnosno prvo nearhimedovsko uređeno polje u povijesti matematike koje, osim standardnih konačnih, sadrži i nestandardne, beskonačne i infinitezimalne elemente. Konstrukcijom polja $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ Veronese je pokazao da se infinitezimali mogu uvesti na neproturječan i logički posve legitiman način, te da je moguća alternativna teorija nekantorovski shvaćenih beskonačnih brojeva (takozvani *Veroneseovi brojevi*). Međutim, kao što sam pokazao, Veronese i drugi matematičari koji su se bavili konstruiranjem novih (nestandardnih) brojeva i proširenjem „brojevnih domena" nerijetko su u tim konstrukcijama bili vođeni filozofskim intuicijama o prirodi brojeva koje su kodificirali ontološko-metodološkim *principima permanencije*. U svjetlu interpretacije koju sam pružio u disertaciji, može se reći da se spor između Cantora i njegovih sljedbenika, s jedne strane, te Veronesea i njegovih sljedbenika, s druge, u konačnici svodi na pitanje mogu li se beskonačni i infinitezimalni brojevi ponašati na potpuno isti način kao i standardni konačni brojevi ili ne. Prvu afinažu i čisto analitičku rekonstrukciju Veroneseova kontinuuma ponudili su već vrlo brzo Levi-Civita i Hilbert, čija nearhimedovska polja predstavljaju samo dijelove, odnosno potpolja, Veroneseova maksimalno inkluzivnog polja $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Naposljetku, oslanjajući se na dosad neobjavljenu građu iz Leibnizova arhiva u Hannoveru, u Dodatku C na kraju drugoga dijela pokazao sam u kojem se smislu Veroneseov pristup zasnivanju geometrije može razumjeti kao moderna elaboracija i realizacija Leibnizova projekta zasnivanja geometrijske analize (*analysis situs*).

Treći i četvrti dio disertacije posvećeni su povijesti recepcije Veroneseove teorije rekonstruirane u drugom dijelu rada, počevši od inicijalne faze krajem 19. stoljeća (Odjeljak [3]), pa sve do dviju najutjecajnijih suvremenih nearhimedovskih teorija – nestandardne analize (Odjeljak [4.1]) i teorije nadrealnih brojeva (Odjeljak [4.2]). Treći dio disertacije povijesno je i filozofski posebno zanimljiv utoliko što je u njemu pokazano da su sporovi koje su matematičari poput Cantora, Veronesea i Peana vodili o statusu infinitezimala bili *par excellence* filozofske, a ne čisto matematičke naravi. Najvažniji rezultati u tom pogledu jesu rekonstrukcija Cantorova kriptičnog „dokaza" protiv mogućnosti infinitezimala (Odjeljak [3.1] i Dodatak D) i Peanova navodnog „dokaza" protiv mogućnosti infinitezimalnih dužina (Odjeljak [3.1.1]). Ta dva argumenta, iako cirkularna i samim time pogrešna, povijesno su bila iznimno značajna jer su, zahvaljujući Cantorovu i Peanovu autoritetu, poslužila kao osnova za diskvalifikaciju infinitezimalizma i marginalizaciju doprinosa Veronesea i drugih *fin-de-siècle* infinitezimalista u filozofskim i historiografskim krugovima, ponajprije zahvaljujući Russellovu nekritičkom prihvaćanu i promicanju Cantorovih i Peanovih rezultata te njihovih filozofskih implikacija (Odjeljak [3.1.2]). Međutim, za kasniju recepciju Veroneseovih rezultata najpogubnije bilo je Poincaréovo dvostruko ogriješenje o Veronesea, utemeljeno na: (i) netočnoj tvrdnji da je Hilbert, a ne Veronese, tvorac nearhimedovske geometrije i (ii) jednako netočnoj tvrdnji da se Veroneseov doprinos sastoji isključivo u primjeni Cantorovih transfinitnih brojeva u geometriji. Kao što sam pokazao, konfuzija koju je time proizveo Poincaré, tada najutjecajniji živi matematičar, prisutna je i danas u dijelu suvremene literature. Kada se Veronese uopće i spominje, nerijetko ga se prikazuje ili kao Hilbertova ili kao Cantorova epigona, čime se stvara posve iskrivljena slika o stvarnim dosezima njegova doprinosa. Taj je dojam, srećom, moguće u potpunosti razvejati i odagnati pažljivom rekonstrukcijom povijesti transmisije i recepcije Veroneseovih ideja, počevši od

Levi-Civite i Hilberta, preko Hahna i Hausdorffa, do Laugwitza i Schmiedena, koji su 1950-ih godina formulirali prvi nestandardni pristup analizi, anticipirajući Robinsonove rezultate s početka 1960-ih. Ono u čemu su bili suglasni Laugwitz, Schmieden i Robinson, kao i oni matematičari koji su slijedili Robinsonov pristup nestandardnoj analizi, poput Luxemburga i Stroyana, jest da su Veroneseovi *Fondamenti* i u njima sadržano razmatranje geometrije nad nearhimedovskim uređenim poljem, praćeno prvom konstrukcijom nearhimedovskog brojevnog sustava, pružili ključan poticaj modernim istraživanjima nearhimedovskih sustava veličina i algebarskih struktura u 20. stoljeću, koja su naposlijetku dovela upravo do nestandardne analize i Conwayeve teorije nadrealnih brojeva iz 1970-ih godina. Filozofski i povijesno najzanimljiviji rezultat sadržan u posljednjem, četvrtom dijelu disertacije vjerojatno je konstrukcija polja **No** nadrealnih brojeva, za koje sam pokazao da predstavlja aritmetički pandan *Veroneseovu apsolutnom geometrijskom kontinuumu*, odnosno *apsolutni aritmetički kontinuum* koji sadrži sve konačne, beskonačne i infinitezimalne brojeve koji se uopće mogu konstruirati.

Smatram da je, u svjetlu (i) interdisciplinarnog istraživanja koje sam proveo u ovoj disertaciji, (ii) inovativnog tumačenja Veroneseove teorije koje sam ponudio, te (iii) pažljive rekonstrukcije, analize i kritičke reevaluacije povijesti transmisije, recepcije i aproprijacije Veroneseovih ideja od 1890-ih do danas, opravdano zaključiti: *Veronese redivivus*. Njegova filozofski i matematički iznimno značajna i vrlo duboka promišljanja o prirodi, funkciji te logičkom i epistemološkom statusu geometrijskih aksioma, o metamatematičkim pitanjima poput nezavisnosti i neproturječnosti, o egzistenciji i ontološkom statusu matematičkih objekata, o metodologiji matematike, o strukturi kontinuuma te o statusu beskonačnosti i infinitezimala čine ga jedinstvenom pojavom u povijesti moderne matematike i u povijesti filozofije matematike. Poincaré je s pravom istaknuo da je otkriće nearhimedovske geometrije u razvoju matematike i filozofije matematike jednako revolucionarno i konceptualno transformativno kao i otkriće neeuklidskih geometrija. Nadam se da je prethodno izlaganje omogućilo čitatelju da sagleda razmjere i dalekosežnost implikacija toga Veroneseova otkrića, usporedivoga po svojoj važnosti s doprinosima ostalih velikih metageometara – Gaußa, Lobačevskoga, Bolyaija, Riemanna i Helmholtza.

BIBLIOGRAFIJA

A. GIUSEPPE VERONESE: BIBLIOGRAFIJA MATEMATIČKIH RADOVA – CJELOVIT POPIS PUBLIKACIJA

[**1**] „Nuovi teoremi sull'Hexagrammum mysticum", *Transunti della Reale Accademia dei Lincei* (3) 1, str. 141–142 (18 marzo 1877). [= **Veronese 1876/77a**]

[**2**] „Nuovi teoremi sull'Hexagrammum mysticum", *Memorie della Reale Accademia dei Lincei* (3) 1, str. 649–703 (8 aprile 1877) [= **Veronese 1876/77b**]

[**3**] „Teoremi e costruzioni di Geometria proiettiva", *Giornale di matematica* 17 (1879), str. 172–182. [= **Veronese 1879**]

[**4**] „Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e superficie di 2° ordine", Note I e II, *Transunti della Reale Accademia dei Lincei* (3) 4 (1879/80), str. 132–149. [= **Veronese 1879/80**]

[**5**] „Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e superficie di 2° grado, e di altre curve e superficie", Memoria I e II, *Memorie della Reale Accademia dei Lincei* (3) 9 (1880/81), str. 265–343. [= **Veronese 1880/81a**]

[**6**] „Alcuni teoremi sulla geometria a n dimensioni", *Transunti della Reale Accademia dei Lincei* (3) 5 (1880/81), str. 303–304. [= **Veronese 1880/81b**]

[**7**] „Alcuni teoremi sulla geometria a n dimensioni", *Transunti della Reale Accademia dei Lincei* (3) 5 (1880/81), str. 333–338. [= **Veronese 1880/81c**]

[**8**] „Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Charakteren einer Curve im Räume von n Dimensionen stattfinden", *Mathematische Annalen*, Bd. 18 (1881), str. 448. [= **Veronese 1881**]

[**9**] „Sulla Geometria descrittiva a quattro dimensioni" (con tre tavole), *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti* (5) (1881/82), 8, str. 987–1024. [= **Veronese 1881/82**]

[**10**] „Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Proijcirens und Schneidens", *Mathematische Annalen*, Bd. 19 (1882), str. 161–234. [= **Veronese 1882a**]

[**11**] *Dei principali metodi in Geometria, e in ispecial modo del metodo analitico. Prelezione al corso di Geometria analitica*, Verona: Drucker e Tedeschi, 1882. [= **Veronese 1882b**]

[**12**] „Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres, particuliérement pour $n = 3,4,5,6$, en relation avec les groupes de l'Hexagramme mystique", *Annali di matematica* (2) 11 (1882/83), str. 93–236. [= **Veronese 1882/83a**]

[**13**] „Sui gruppi $(P)_{360}$, $(\Pi)_{360}$ della figura di sei complessi lineari di rette due a due in involuzione", *Annali di matematica* (2) 11 (1882/83), str. 284–290. [= **Veronese 1882/83b**]

[**14**] „Dimostrazione della formula

$$\begin{vmatrix} p \\ r-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q-1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q-1 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ r+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q-1 \\ 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ r+2 \end{vmatrix} + \cdots = \begin{vmatrix} p+q-1 \\ q+r-2 \end{vmatrix}$$

mediante la geometria a n dimensioni", *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti* (6) 2, (1883/84) str. 137–143. [= **Veronese 1883/84a**]

[**15**] „Di una costruzione della superficie del 4° ordine dotata di conica doppia", *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti* (6) 2 (1883/84), str. 1841–1842. [= **Veronese 1883/84b**]

[**16**] „La superficie omaloide normale a due dimensioni e le sue proiezionii nel piano e nello spazio ordinario“, *Memorie della Reale Accademia dei Lincei* (3) 19 (1883/84), str. 344–371. [= **Veronese 1883/84c**]

[**17**] „Il continuo rettilineo e l'assioma V di Archimede“, *Memorie della Reale Accademia dei Lincei* (Atti della Classe di scienze naturali, fisiche e matematiche) (4) 6 (1889), str. 603–624. [= **Veronese 1889**]

[**18**] *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Lezioni per la Scuola di magistero in Matematica*, Padova: Tipografia del Seminario, 1891. [= **Veronese 1891**]

[**19**] „A proposito di una lettera del prof. Peano“, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 6 (1892), str. 42–47. [= **Veronese 1892a**]

[**20**] „Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale“, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 6 (1892), str. 73–76. [= **Veronese 1892b**]

[**21**] „Osservazioni sui principii della geometria“, *Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova* 10 (1893/94), str.195–216. [= **Veronese 1893/94**]

[**22**] *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt* (mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von Adolf Schepp), Leipzig: Teubner, 1894. (nemački prevod [**18**]) [= **Veronese 1894**]

[**23**] „Dimostrazione della proposizione fondamentale dell'equivalenza delle figure“, *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti* (7) 6 (1895), str. 421–437. [= **Veronese 1895**]

[**24**] „Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti o infinitesimi attuali“, *Mathematische Annalen*, Bd. 47 (1896), str. 423–432. [= **Veronese 1896**]

[**25**] *Elementi di Geometria, ad uso dei licei e degli istituti tecnici (primo biennio)* (trattati con la collaborazione di P. Gazzaniga), Verona e Padova: Drucker, 1897. [= **Veronese 1897a**; drugo izdanje: **Veronese 1900**]

[**26**] „Sul postulato della continuità“, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei* (5) 6 (1897), str.161–167. [= **Veronese 1897b**]

[**27**] *Appendice agli Elementi di Geometria*, Verona e Padova: Drucker, 1897. [= **Veronese 1897c**]

[**28**] „Segmenti e numeri transfiniti“, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei* (5) 7 (1898), str. 79–87. [= **Veronese 1898**]

[**29**] *Nozioni elementari di Geometria intuitiva, ad uso dei ginnasi inferiori* (prima edizione, 1901; 4ª edizione, 1912), Verona e Padova: Drucker. Napomena: kod Druckera se 1909. godine pojavilo još jedno izdanje ovog udžbenika pod naslovom *Elementi di Geometria intuitiva ad uso delle Scuole Tecniche*; u disertaciji je korišćeno četvrto izdanje iz 1912. godine. [= **Veronese 1912**]

[**30**] „Les postulats de la Géométrie dans l'enseignement“, *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathematiciens* (prir. E. Duporcq), Paris: Gauthier-Villars, 1902, str. 433–450. [= **Veronese 1902**]

[**31**] „Commemorazione del socio Luigi Kremona“, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, (5), 12 (1903), str. 664–678. [= **Veronese 1903**]

[**32**] „Luigi Cremona: Nekrologia“ (Wspomnienie pozgonne napisał prof. G. Veronese), *Wiadomości Matematyczne*, T. 8 (1904), str. 150–164. (poljski prevod [**31**]) [= **Veronese 1904**]

[**33**] „La geometria non-Archimedea. Una questione di priorità“, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei* (5) 14 (1905), str. 347–351. [= **Veronese 1905**]

[**34**] *Il vero nella matematica* (Discorso inaugurale dell'anno scolastico 1905–1906 letto nell'Aula Magna della R. Università di Padova il giorno 6 novembre 1905), Padova: Tipografia Gio. Batt. Randi, 1906. [= **Veronese 1906**]

[**35**] „La geometria non-Archimedea“, *Atti del 4° Congresso internazionale dei Matematici* (prir. G. Castelnuovo), Roma: Tipografia della R . Accademia dei Lincei, 1909, Vol. I, str. 197–208. [= **Veronese 1909a**]

[**36**] „La géométrie non archimédienne“, *Bulletin des sciences mathématiques*, S. 2, T. 33 (1909), str. 186–204. (francuski prevod [**35**]) [= **Veronese 1909b**]

[**37**] „Osservazioni intorno ad una polemica“, *Bolletino della „Mathesis“ (Società italiana di matematica)* (6) 1 (1914), str. 78–81. [= **Veronese 1914**]

[**38**] *Complementi di Algebra e Geometria ad uso dei Licei moderni* (trattati con la collaborazione di Paolo Gazzaniga), Padova: Drucker, 1915. [= **Veronese 1915**]

[**39**] „On Non-Archimedean Geometry“ u P. Ehrlich (prir.), *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers – Springer Science+Business Media, str. 169–187. (engleski prevod [**35**], prev. M. Marion) [= **Veronese 1994**]

B. DIGITALNI REPOZITORIJ SABRANIH MATEMATIČKIH RADOVA G. VERONESEA

[**1**] POPOVIĆ, S. (prir.), *Giuseppe Veronese: Digital Repository. The Complete Mathematical Works of Giuseppe Veronese*.

Link: https://www.mi.sanu.ac.rs/novi_sajt/publications/veroneze.php.

C. BIBLIOGRAFIJA RADOVA I STUDIJA POSVEĆENIH VERONESEU

I. Bio-bibliografske studije i nekrolozi

[**1**] BULLO, C. (1904), *Biografia del prof. Comm. Giuseppe Veronese di Chioggia. Senatore del Regno*, Chioggia: Vianelli & C.

[**2**] SEGRE, C. (1917), „Commemorazione del socio nazionale Giuseppe Veronese“, *Rend. R. Acc. Naz. Lincei* 26, str. 249–258. Preštampano u: Segre, C (1963), *Opere* (a cura della Unione Matematica Italiana,), Vol. IV, Roma: Edizione Cremonese, str. 474–486.

[**3**] GAZZANIGA, P. (1917), „In memoria di Giuseppe Veronese“, *Il Bollettino di Matematica* (Giornale scientifico didattico per l'incremento degli studi matematici nelle scuole medie) XV, str. 53–65.

[**4**] SEVERI, F. (1920), „Prof. Giuseppe Veronese“, Annuario della R. Università degli Studi di Padova per l'anno accademico 1919/20 (DCXCVIII dalla fondazione), Padova: Stabilimento tipografico L. Penada, str. 292–294.

[**5**] BORDIGA, G. (1931) „Commemorazione di Giuseppe Veronese“, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* 2, str. 63–79.

[**6**] BALDASSARRI GHEZZO, S. (1995) *Giuseppe Veronese. Matematico dell'Università di Padova*, Padova: Decibel.

[**7**] GIBIN, C. (2004), „Giuseppe Veronese: L'uomo e il politico“, Atti del Convegno „Giuseppe Veronese: matematica, filosofia, politica e tutela della Laguna“ (prir. I Testo & P. Cantù), objavljeno u *50 anni di „Veronese“*, Venezia: Libreria Editrice „Il Leggio“, str. 83–101.

II. Interpretativne, povijesno-filozofske i druge studije o Veroneseovu djelu

[**1**] CONTRO, W. S. (1968), *Die Entwicklung der Geometrie zum hypothetisch-deduktiven System*, Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades, Frankfurt am Main: Goethe-Universität.

[**2**] BUSULINI, B. (1969/70), „La retta non-archimedea di Giuseppe Veronese", *Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, Atti della Classe di Scienze Matematiche e Naturali*, 128, str. 239–263.

[**3**] MANARA, C. F. & SPOGLIANTI, M. (1977), „La idea di iperspazio. Una dimenticata polemica tra G. Peano, C. Segre e G. Veronese", *Accad. Sci. Modena. Atti Mem.* (6), 19, str. 109–129.

[**4**] MANARA, C. F. (1986), „Giuseppe Veronese e il problema del continuo geometrico", *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano* 56, str. 99–111.

[**5**] CAUTIERO, M. & GERLA, G. (1988), „Un testo scolastico del 1897, gli *Elementi di Geometria* di Giuseppe Veronese", *Periodico di Matematiche* 1–2, str. 17–32.

[**6**] PEIFFER-REUTER, R. (1989), „L'infini relatif chez Veronese et Natorp. Un chapître de la prehistoire de l'Analyse NonStandard", *La mathématique non-standard*, Paris: CNRS (Editions du CNRS), str. 117–142.

[**7**] — (1992), „Le Fond Lisse et le Figure Fractale. L'idée du Continu chez Veronese et Natorp" u J.-M. Salanskis & H. Sinaceur (prir.), *Le Labyrinthe du Continu. Colloque de Cerisy*, Paris: Springer-Verlag France, str. 96–103.

[**8**] FISHER, G. (1994), „Veronese's Non-Archimedean Linear Continuum" u P. Ehrlich (prir.), *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers – Springer Science+Business Media, str. 107–145.

[**9**] BRIGAGLIA, A. (1994), „Giuseppe Veronese e la geometria iperspaziale in Italia" u *Le scienze matematiche nel Veneto dell'Ottocento*, Atti del III seminario di storia delle scienze, Venezia: Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti, str. 231–261.

[**10**] BUSSOTTI, P. (1997), *Giuseppe Veronese e i fondamenti della matematica*, Pisa: ETS.

[**11**] FREGUGLIA, P. (1998), „I fondamenti della geometria a più dimensioni secondo Giuseppe Veronese" u S. Coen (prir.), *Seminari di geometria 1996-1997*, Vol. 11, Bologna: Università degli Studi di Bologna, Dipartimento di Matematica (Tecnoprint), str. 253–277.

[**12**] CANTÙ, P. (1999), *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria*, Milano: Unicopli.

[**13**] — (2000), „L'insegnamento della geometria nelle scuole medie inferiori. Una lettera inedita di Giuseppe Veronese a Giovanni Vailati", *Il Voltaire* 5, str. 109–118.

[**14**] FREGUGLIA, P. (2000), „Osservazioni sulla geometria descrittiva quadridimensionale di Giuseppe Veronese" u u S. Coen (prir.), *Seminari di geometria 1998-1999*, Vol. 12, Bologna: Università degli Studi di Bologna, Dipartimento di Matematica (Tecnoprint), str. 71–80.

[**15**] — (2001), „Considerazioni sulla geometria descrittiva quadridimensionale proposta da Giuseppe Veronese" u *Matematica e Architettura. Metodi analitici, metodi geometrici e rappresentazione in Architettura*, Firenze: Alinea Editrice, str. 91–95.

[**16**] BOTTAZZINI, U. (2001), „I geometri italiani e il problema dei fondamenti (1889-1899)", *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* 4, A.2, str. 281–329.

[**17**] FREGUGLIA, P. (2002), „Giuseppe Veronese's studies on four-dimensional descriptive geometry" u A. Becchi *et al.* (prir.), *Towards a History of Construction: Dedicated to Edoardo Benvenuto*, Basel: Birkhäuser, str. 253–262.

[**18**] LAUGWITZ, D. (2002), „Debates about infinity in mathematics around 1890: The Cantor-Veronese controversy, its origins and its outcome“, *N.T.M. Neue Serie. Internationale Zeitschrift Für Geschichte und Ethik der Naturwissenscaften, Technik und Medizin* 10, str. 102–126.

[**65**] AVELLONE, M., BRIGAGLIA, A. & ZAPPULLA, C. [Avellone *et al.*] (2002), „The Foundations of Projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri“, *Arch Hist Exact Sc.* 56, str. 363–425.

[**19**] CANTÙ, P. (2004), „La concezione epistemologica di Giuseppe Veronese“, Atti del Convegno „Giuseppe Veronese: matematica, filosofia, politica e tutela della Laguna“ (prir. I Testo & P. Cantù), objavljeno u *50 anni di „Veronese“*, Venezia: Libreria Editrice „Il Leggio“, str. 147–162.

[**20**] BRIGAGLIA, A. (2004), „Veronese e la teoria degli iperspazi“, Atti del Convegno „Giuseppe Veronese: matematica, filosofia, politica e tutela della Laguna“ (prir. I Testo & P. Cantù), objavljeno u *50 anni di „Veronese“*, Venezia: Libreria Editrice „Il Leggio“, str. 139–146.

[**21**] BOTTAZZINI, U. (2004), „Giuseppe Veronese nel panorama della Scuola italiana di geometria“, Atti del Convegno „Giuseppe Veronese: matematica, filosofia, politica e tutela della Laguna“ (prir. I Testo & P. Cantù), objavljeno u *50 anni di „Veronese“*, Venezia: Libreria Editrice „Il Leggio“, str. 125–138.

[**22**] RUSCONI, A. (2004), „Veronese, le conoscenze tecniche e la conservazione della laguna veneta“, Atti del Convegno „Giuseppe Veronese: matematica, filosofia, politica e tutela della Laguna“ (prir. I Testo & P. Cantù), objavljeno u *50 anni di „Veronese“*, Venezia: Libreria Editrice „Il Leggio“, str. 103–124.

[**23**] EHRLICH, P. (2006), „The Rise of Non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of Non-Archimedean Systems of Magnitudes“, *Arch. Hist. Exact Sci.* 60, str. 1–121.

[**24**] CERRONI, C. (2007), „The Contributions of Hilbert and Dehn to Non-Archimedean Geometries and their Impact on the Italian School“, *Revue d'histoire des mathématiques*, T. 13, Fasc. 2, str. 259–299.

[**25**] MENGHINI, M. (2009), „The teaching of intuitive geometry in early 1900s Italian Middle School: Programs, mathematicians' views and praxis“ u K. Bjarnadóttir *et al.* (prir.), *Dig where you stand*, Proceedings of the Conference on Ongoing Research on the History of Mathematics Education, Reykjavík: University of Iceland, School of Education, str. 139–150.

[**26**] CANTÙ, P. (2009), „Le concept d'espace chez Veronese. Une comparaison avec la conception de Helmholtz et Poincaré“, *Philosophia Scientiæ* 13 (2), str. 129–149.

[**27**] — (2010), „The role of epistemological models in Veronese's and Bettazzi's theory of magnitudes“ u M. D'Agostino *et al.* (prir.), *New Essays in Logic and Philosophy of Science* (Pubblicazioni della SILFS, Vol. I), str. 1–15.

[**28**] MENGHINI, M. (2010), „La geometria intuitiva nella scuola media italiana del '900“, *La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana* 3 (3), str. 399–429.

[**29**] — (2010a), „Intuitive geometry in early 1900s Italian middle school“ u V. Durand-Guerrier *et al.* (prir.), *CERME 6: Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Lyon: Institut national de recherche pédagogique, str. 2762–2770. (neznatno izmenjena verzija [**75**] na engleskom jeziku)

[**30**] DADACZYŃSKI, J. (2013), „Giuseppe Veronesego podstawy matematyki“, *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, Vol. LIII, str. 53–92.

[**31**] POPOVIĆ, S. (2017), „Istorijsko-filozofsko razmatranje osnova nearhimedovske geometrije: o Veronezeovoj teoriji apsolutnog kontinuuma. Povodom stogodišnjice Veronezeove smrti“, *Filozofske studije*, Br. 33, God. XXXII, str. 81–114.

[**32**] FREGUGLIA, P. (2021), „Peano and the Debate on Infinitesimals“, *Philosophia Scientiæ* 25 (1), str. 145–156.

[**33**] EHRLICH, P. (2021), „Contemporary Infinitesimalist Theories of Continua and Their Late Nineteenth- and Early Twentieth-Century Forerunners“ u S. Shapiro & G. Hellman (prir.), *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives*, Oxford: Oxford University Press, Ch. 18, str. 502–570.

[**34**] DADACZYŃSKI, J. (2022), „Giuseppe Veronesego konstruktywizm arytmetyczny a poznawalność nieskończoności. Studium wybranych wątków filozofii matematyki we wprowadzeniu do *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen*“, *Filozofia Nauki* 30 (3), str. 33–50.

[**35**] BUSSOTTI, P. (2023), „L'infinito nella matematica dell'Ottocento“, *Nuova Secondaria*, No. 5, Anno XL, str. 126–132)

[**36**] BRIGAGLIA, A. (2023), „Veronese, Cremona, and the Mystical Hexagram“ u G. Bini (prir.), *Algebraic Geometry between Tradition and Future*, INdAM 2021. Springer INdAM Series, Vol 53. Singapore: Springer, str. 329–374.

D. ARHIVSKA GRAĐA

[**1**] VERONESE, G. (1890), Nenaslovljen rukopis na francuskom jeziku, 27 listova, u Nachlass Georg Cantor – Manuskripte, Notizen, Sonderdrucke: Abschriften von Arbeiten anderer, sign. Cod. Ms. G. Cantor 29, № 1 (v. Appendix disertacije).

[**2**] L'ARCHIVIO STORICO DEL SENATO DEL REGNO (Senato della Repubblica), Fascicolo personale del Senatore d'Italia Giuseppe Veronese i stenogrami sa zasedanja Senata u *Atti parlamentari della Camera dei Senatori* (Le legislature del Senato del Regno) (više izdanja, v. posebno Legislature XX, XXII i XXIV). Dostupno online: LINK (A) i LINK (B).

[**3**] NACHLASS GEORG CANTOR, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen – Zentralarchiv deutscher Mathematik-Nachlässe, sign. Cod. Ms. G. Cantor (posebno Briefbucher I–III za period 1884–1896).

[**4**] NACHLASS DAVID HILBERT, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen – Zentralarchiv deutscher Mathematik-Nachlässe, sign. Cod. Ms. D. Hilbert (posebno Materialien und Manuskripte – Hilbertsche Vorlesungen, Cod. Ms. D. Hilbert 520ff.).

[**5**] NACHLASS FELIX KLEIN, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen – Zentralarchiv deutscher Mathematik-Nachlässe, sign. Cod. Ms. F. Klein.

[**6**] ZAOSTAVŠTINA AKADEMIKA BRANISLAVA PETRONIJEVIĆA, Arhiv SANU, sign. 14315/1–42, Odeljenje posebnih fondova Narodne biblioteke Srbije, Fond P1228 i Arhiv Matematičkog instituta SANU, Fond F1946.

E. SEKUNDARNA LITERATURA I POPIS KORIŠTENIH IZVORA

[**1**] ADNAĐEVIĆ, D. & KADELBURG, Z. (2012), *Matematička analiza I–II*, Beograd: Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu i Krug.

[**2**] AGUILÓ FUSTER, R. (1963), „Aplicación del método de Dedekind a un cuerpo ordenado no arquimediano“, *Collectanea Mathematica* 15 (1–2), pp. 77–90.

[**3**] ALEXANDROV, P. S. [Алекса́ндров, П. С.] (1936), „Памяти Эмми Нетер“, *Успехи математических наук*, № 2, str. 255–265. Engleski prevod dostupan je *online* preko platforme *Celebratio Mathematica*, LINK.

[**4**] ALLING, N.

1) — (1976), „Residue Class Fields of Rings of Continuous Functions“, *Symposia Mathematica*, Vol. XVII, London: Academic Press, str. 55–67.

2) — (1987), *Foundations of Analysis Over Surreal Number Fields*, Amsterdam: North Holland Publishing Company.

[**5**] ARANA, A. & MANCOSU, P. (2012), „On the Relationship between Plane and Solid Geometry“, *The Review of Symbolic Logic* 5 (2), str. 294–353.

[**6**] ARCHIBALD, T, ARTHUR, R. T. W, FERRARO, G. ET AL. (2022), „A Question of Fundamental Methodology: Reply to Mikhail Katz and His Coauthors“, *The Mathematical Intelligencer* 44, str. 360–363.

[**7**] ARCHIMEDES (1972), *Archimedis opera omnia cum comm. Eutocii, Vol. I–II* (interum edidit I. L. Heiberg, corrigenda adiecit E. Stamatis), Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana, Stuttgart: B. G. Teubner & Berlin: De Gruyter.

[**8**] ARISTOTELES (1960), *Aristotelis Opera omnia*, Vol. 1-2 (ex recensione I. Bekkeri, ed. Academia Regia Borussica; Editio altera, quam curavit O. Gigon), Berlin-New York: De Gruyter.

[**9**] ARNOLD, B. (1988), „Das Kontinuitätsprogramm zwischen Cantor und der Nonstandard-Analysis“, *Hist. Math.* 15 (3), str. 250–263.

[**10**] ARSENIJEVIĆ, M, POPOVIĆ, S. & VULETIĆ, M. (2019), „Anaxagoras, the Thoroughgoing Infinitist: The Relation between his Teachings on Multitude and on Heterogeneity“, *European Journal of Analytic Philosophy*, Vol. 15, No. 1, str. 35–70.

[**11**] ARSENIJEVIĆ, M. & ADŽIĆ, M. (2014), „Gunkology and Pointilism: Two Mutually Supervening Models of the Region-Based and the Point-Based Theory of the Infinite Two-Dimensional Continuum“ u V. Fano *et al.* (prir.), *Space and Time: A Priori and A Posteriori Studies*, Boston: De Gruyter, str. 137–170.

[**12**] ARSENIJEVIĆ, M. & KAPETANOVIĆ, M.

1) — (2008a), „An $\mathbf{L}\omega_1\omega_1$ Axiomatization of the Linear Archimedean Continua as Merely Relational Structures“, *WSEAS Transactions on Mathematics*, Vol. 7, Iss. 2, str. 39–47.

2) — (2008b), „‘The great struggle’ between Cantorians and Neo-Aristotelians: Much ado about nothing“, *Grazer Philosophische Studien* 76, str. 79–90.

[**13**] ARSENIJEVIĆ, M.

1) — (1978), „Dodirivanje“, *Filozofske studije* 10, str. 117–144.

2) — (1989), „How Many Physically Distinguished Parts Can a Limited Body Contain?“, *Analysis*, Vol. 49, No. 1, str. 36–42.

3) — (1992a), „Eine aristotelische Logik der Intervalle, die Cantorsche Logik der Punkte und die physikalischen und kinematischen Prädikate I: Logik der Punkte und Logik der Intervalle“, *Philosophia naturalis* 2, str. 161–180.

4) — (1992b), „Eine aristotelische Logik der Intervalle, die Cantorsche Logik der Punkte und die physikalischen und kinematischen Prädikate II: Die mit physikalischen und kinematischen Prädikaten erweiterte Logik der Punkte und der Intervalle“, *Philosophia naturalis* 2, str. 181–209.

5) — (1994), „Mathematics, Infinity and the Physical World“, *Dialektik* 3, str. 89–107.

6) — (2003a), *Vreme i vremena*, Beograd: Dereta.

7) — (2003b), „Generalized concepts of syntactically and semantically trivial differences and instant-based and period-based time ontologies“, *Journal of Applied Logic*, Vol. 1, Iss. 1–2, str. 1–12.

8) — (2007), *Prostor, vreme, Zenon* (drugo, prošireno i izmenjeno izdanje), Novi Sad-Sremski Karlovci: IKZS.

9) — (2012), „The Philosophical Impact of the Löwenheim-Skolem Theorem“ u M. Trobok *et al.* (prir.), *Between Logic and Reality. Modeling Inference, Action and Understanding*, Dordrecht: Springer, str. 59–81.

[**14**] ARTHUR, R. T. W. & RABOUIN, D. (2025), *Leibniz on the Foundations of the Differential Calculus*, Cham: Birkhäuser.

[**15**] ARTHUR, R. T. W.

1) — (2013), „Leibniz's syncategorematic infinitesimals“, *Arch. Hist. Exact Sci.* 67, str. 553–593.

2) — (prir.) (2001), *The Labyrinth of the Continuum: Writings on the Continuum Problem, 1672-1686*, The Yale Leibniz, New Haven and London: Yale University Press.

[**16**] ARTIN, E. & SCHREIER, O. (1926), „Algebraische Konstruktion reeller Körper“, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* 5, str. 85–99.

[**17**] ASPRAY, W. & KITCHER, P. (prir.) (1988), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Vol. XI, Minneapolis: University of Minnesota Press.

[**18**] BAER, R.

1) — (1927), „Über nicht-Archimedisch geordnete Körper“ (Beiträge zur Algebra 5), *Sitzungsber. Heidelberger Akad.* 8, str. 3–13.

2) — (1970), „Dichte Archimedizität und Starrheit geordneter Körper“, *Math. Ann.* 188, str. 165–205.

[**19**] BAIR, J, BŁASZCZYK, ET AL.

1) — (2013), „Is Mathematical History Written by the Victors?“. *Notices of the AMS*, Vol. 60, No. 7, str. 886–904. [= **Bair *et al.* 2013**]

2) — (2017a), „Interpreting the Infinitesimal Mathematics of Leibniz and Euler“, *Journal for General Philosophy of Science* 48, str. 195–238. [**Bair *et al.* 2017a**]

3) — (2017b), „Klein vs Mehrtens: Restoring the Reputation of a Great Modern“, *Математичні Студії*, Т.48, №2, str. 189–219. [= **Bair *et al.* 2017b**]

[**20**] BAKER, H. F.

1) — (1913), „On Some Recent Advances in the Theory of Algebraic Surfaces“ (Presidential Address), *Proceedings of the London Mathematical Society*, S. 2, Vol. 12, Iss. 1, str. 1–40.

2) — (1922), *Principles of Geometry*, Cambridge: at the University Press.

[**21**] BARROW-GREEN, J. & GRAY, J. (2006), „Geometry at Cambridge, 1863–1940“, *Hist. Math.* 33 (3), str. 315–356.

[**22**] BAUMGARTNER, L. (1954), *Geometrie im Raum von vier Dimensionen*, München-Düsseldorf: Verlag von R. Oldenbourg.

[**23**] BEHNKE, H. & KOPFERMANN, K. (prir.) (1966), *Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass 1815–1965*, Köln und Opladen: Westdeutscher Verlag.

[**24**] BELL, J. L.

1) — (2008), *A Primer of Infinitesimal Analysis* (2nd edition), Cambridge: Cambridge University Press.
2) — (2019), *The Continuous, the Discrete and the Infinitesimal in Philosophy and Mathematics*, The Western Ontario Series in Philosophy of Science, Vol. 82, Cham: Springer.

[**25**] BELTRAMI, E. (1868), *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, Napoli: Stabilimento tipografico di Francesco e Gennaro de Angelis.

[**26**] BENCI, V, BOTTAZZI, E. & DI NASSO, M. (2014), „Elementary numerosity and measures", *Journal of Logic and Analysis* 6 (3), str. 1–14.

[**27**] BENCI, V. & DI NASSO, M. (2019), *How to Measure the Infinite. Mathematics with Infinite and Infinitesimal Numbers*, Singapore: World Scientific Publishing Co.

[**28**] BERARDUCCI, A, EHRLICH, P. & KUHLMANN, S. (prir.) (2016), „Surreal Numbers, Surreal Analysis, Hahn Fields and Derivations", *Oberwolfach Report* 60/2016, str. 3315–3374.

[**29**] BERNSTEIN, F. (1904), „Über die Begründung der Differentialrechnung mit Hilfe der unendlich kleinen Größen", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 13, str. 241–246.

[**30**] BERTRAN SAN-MILLÁN, J. (2023), „Peano's Geometry: From Empirical Foundations to Abstract Development" u P. Cantù & G. Schiemer (prir.), *Logic, Epistemology, and Scientific Theories – From Peano to the Vienna Circle*, Vienna Circle Institute Yearbook, Vol 29, Cham: Springer, str. 11–35.

[**31**] BERZ, M. (1996), „Calculus and Numerics on Levi-Civita Field" u M. Berz *et al.* (prir.), *Computational Differentiation: Techniques, Applications and Tools*; Santa Fe-New Mexico: SIAM, str. 19–37.

[**32**] BETTAZZI, R.

1) — (1890), *Teoria Delle Grandezze*, Pisa: Ed. Enrico Spoerri.
2) — (1891), „Osservazioni sopra l'articolo del Dr G. Vivanti 'Sull'infinitesimo attuale'", *Rivista di Matematica* 1, str. 174–182.
3) — (1892), „Sull'infinitesimo attuale", *Rivista di Matematica* 2, str. 38–41.

[**33**] BINDONI, A. (1902), „Sui numeri transfiniti ed infinitesimi attuali", *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, S. 11, V. 2, str. 205–209.

[**34**] BISHOP, E. (1975), „The Crisis in Contemporary Mathematics", *Hist. Math.* 2 (4), str. 507–517.

[**35**] BLANCHETTE, P.

1) — (1996), „Frege and Hilbert on Consistency", *The Journal of Philosophy*,Vol. 93, No. 7, str. 317–336.
2) — (2017), „Models in Geometry and Logic: 1870–1920" u H. Leitgeb *et al.* (prir.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proceedings of the Fifteenth International Congres* („Models and Modelling"), Milton Keynes: College Publications, str. 41–61.

3) — (2024), „The Frege-Hilbert Controversy“, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2024 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (ur.), LINK.

[**36**] BLÅSJÖ, V.

1) — (2014), „A critique of the modern consensus in the historiography of mathematics“, *Journal of Humanistic Mathematics* 4 (2), str. 113–123.

2) — (2019), „Attitudes toward Intuition in Calculus Textbooks“ u K. Bjarnadóttir *et al.* (prir.), *Dig where you stand* 5, Proceedings of the Fifth International Conference on the History of Mathematics Education, Utrecht: Utrecht University & Freudenthal Institute, str. 83–92.

3) — (2021), „Historiography of Mathematics from the Mathematician's Point of View“ (Living reference work entry) u B. Sriraman (prir.), *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice*, Cham: Springer, str. 1–22.

[**37**] BŁASZCZYK, P, KATZ, M. G. & SHERRY, D. (2013), „Ten Misconceptions from the History of Analysis and their Debunking“, *Foundations of Science* 18, str. 43–74. [= **Błaszczyk *et al.* 2013**]

[**38**] BOHLMANN, G. (1897), „Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimal-Rechnung von Euler bis auf die heutige Zeit“, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 6, str. 91–110.

[**39**] BOLZANO, B.

1) — (1804), *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*, Prag: Karl Barth. Za engleski prevod, v. Bolzano 2004: 24ff.

2) — (2004), *The Mathematical Works of Bernard Bolzano* (prir. S. Russ), Oxford: Oxford University Press.

[**40**] BONIFACE, J. (2007), „The Concept of Number from Gauss to Kronecker“ u C. Goldstein *et al.* (prir.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, Ch. V.1, str. 315–342

[**41**] BONOLA, R. (1906), *La geometria non-Euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo*, Bologna: N. Zanichelli Editore.

[**42**] BORSUK, K. & SZMIELEW, W. (1960), *Foundations of Geometry. Euclidean, Bolyai-Lobachevskian, and Projective Geometry*, Amsterdam: North Holland Publishing Company.

[**43**] BOS, H. J. M.

1) — (1974), „Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus“, *Arch. Hist. Exact Sci.* 14 (1), str. 1–90.

2) — (1993), „'The Bond with Reality Is Cut': Freudenthal on the Foundations of Geometry around 1900“, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 25, No. 1/2, The Legacy of Hans Freudenthal, str. 51–58.

[**44**] BOŠKOVIĆ, R. J.

1) — (1754), *De continuitatis lege et ejus consectariis pertinentibus ad prima materiae elementa*, Roma: Ex typographia G. Salomoni.

2) — (1922), *Theoria Philosophiae Naturalis / A Theory of Natural Philosophy. Latin-English Edition* (prir. B. Petronijević & J. M. Child), Chicago-London: Open Court Publishing Company. SCHAFFER, J. (2009), „On What Grounds What“ u D. Chalmers *et al.* (prir.),

Metametaphysics: New Essays on the Foundations of Ontology; Oxford-New York: Oxford University Press, str. 347–383.

3) — (1975), *O zakonu kontinuiteta i njegovim posledicama u odnosu na osnovne elemente materije i njihove sile* (prev. D. Nevenić-Grabovac, stručna redakcija prevoda, komentar i kritički aparat E. Stipanić), *Klasični naučni spisi Matematičkog instituta SAN*, N. S, Knjiga 1 (16), Beograd: Matematički institut SANU.

[**45**] BOTTAZZI, E. (2022), „A Real-Valued Measure on non-Archimedean Field Extensions of ℝ“, *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications* 14, str. 14–43.

[**46**] BOTTAZZINI, U.

1) — (1994), *Va' pensiero. Immagini della matematica nell'Italia dell'Ottocento*, Bologna: Il Mulino.

2) — (2002), „Italy“ u J. W. Dauben & C. J. Scriba (prir.), *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development* (Edited on behalf of the ICHM), Basel: Birkhäuser, str. 61–95.

[**47**] BOUCARD, J., & MOREL, T. (2022), „New Objects, Questions, and Methods in the History of Mathematics“, *Histories* 2 (3), str. 341–351.

[**48**] BOURBAKI, N.

1) — (1974), *Éléments d'histoire des mathématiques* (nouvelle édition augmentée), Collection Histoire de la Pensée, Paris: Hermann.

2) — (2004), *Theory of Sets*, Berlin-Heidelberg: Springer Verlag.

[**49**] BOWDER, F. E. (prir.) (1983), *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré*, Vol. I–II, specijalni temat u *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics of the AMS*, Vol. 39, Providence: American Mathematical Society.

[**50**] BOYER, C. (1959), *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York: Dover.

[**51**] BRENTANO, F. (1976), *Philosophische Untersuchungen zu Raum, Zeit und Kontinuum* (prir. S. Körner & R. M. Chisolm), Hamburg: Felix Meiner Verlag. [= **Körner & Chisolm 1976**]

[**52**] BROUWER, L. E. J.

1) — (1907), *Over de grondslagen der Wiskunde*, Academisch Proefschrift, Amsterdam-Leipzig: Maas & van Suchtelen.

2) — (1975), *Collected Works, Vol. 1: Philosophy and Foundations of Mathematics* (prir. A. Heyting), Amsterdam: North Holland Publishing Company.

[**53**] BROWN, J. R. (2012), Platonism, Naturalism, and Mathematical Knowledge, New York-London: Routledge.

[**54**] BURALLI-FORTI, C. (1901), „Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel“, Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, T. 3, str. 289–307.

[**55**] BURGESS, J. P. (2014), „Intuitions of three kinds in Gödel's views on the continuum“ u J. Kennedy (prir.), *Interpreting Gödel: Critical Essays*, Cambridge: Cambridge University Press, Ch. 2, str. 11–31.

[**56**] BUTTERFIELD, J.

1) — (2005), „Against *Pointillisme* about Geometry“ u F. Stadler & M. Stoeltzner (prir.), *Time and History*, Proceedings of the 28. International Ludwig Wittgenstein Symposium, Frankfurt: Ontos Verlag, str. 181–222.

2) — (2006), „Against *Pointillisme* about Mechanics“, *The British Journal for the Philosophy of Science* , Vol. 57, No. 4, str. 709–753.

[**57**] BUZAGLO, M. (2001), *The Logic of Concept Expansion*. Cambridge: Cambridge University Press.

[**58**] CAJORI, F.

1) — (1894), *A History Of Mathematics*, New York: MacMillan & Co.
2) — (1915), „History of Zeno's Arguments on Motion: Phases in the Development of the Theory of Limits" (Pt. VIII), *The American Mathematical Monthly*, Vol. 22, No. 7, str. 215–220.
3) — (1993), *A History of Mathematical Notations*, Vol. I–II (two volumes bound as one), New York: Dover Publications, Inc.

[**59**] CANTOR, G.

1) — (1872), „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", *Math. Ann.* 5, str. 123–132.
2) — (1879–1884), „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten", I–VI u: (I) *Math. Ann.* 15, str. 1–7; (II) *Math. Ann.* 17, str. 355–358; (III) *Math. Ann.* 20, str. 113–121; (IV) *Math. Ann.* 21, str. 51–58; (V) *Math. Ann.* 21, str. 545–591; (VI) *Math. Ann.* 23, str. 453–488.
3) — (1883), *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, Leipzig: Commissions Verlag von B. Teubner.
4) — (1884), „Rezension: Cohen, H., *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte* (Berlin, F. Dümmler-Verlag 1883", *Deutsche Litteraturzeitung* 4, str. 266–268.
5) — (1885), „Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. Zweite Mitteilung", *Acta Math.* 7, str. 105–124.
6) — (1887), „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, Teil I", *Zeitschrift f. Philosophie u. philos. Kritik* 91, str. 81–125 i 252–272.
7) — (1887), „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, Teil II", *Zeitschrift f. Philosophie u. philos. Kritik* 92, str. 240–265.
8) — (1895), „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Teil I", *Math. Ann.* 46, str. 481–512.
9) — (1895), „Sui numeri transfiniti" (Estratto di una lettera di G. Cantor a G. Vivanti, 13.12.1893.), *Rivista di Matematica* 5, str. 104–108.
10) — (1895a), „Lettera di G. Cantor a G. Peano" (20.7.1895.), *Rivista di Matematica* 5, str. 108–109.
11) — (1897), „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Teil II", *Math. Ann.* 49, str. 207–246.
12) — (1932), *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (prir. E. Zermelo; praćeno biografskom studijom A. Fraenkela o G. Cantoru), Berlin: Verlag von Julius Springer. Napomena: pri referiranju na većinu Cantorovih prethodno navedenih radova u disertaciji navodio sam paginaciju iz *Gesammelte Abhandlungen*.
13) — (1991), *Briefe* (Mit 40 Seiten Faksimiles und einem Bildanhang) (prir. H. Meschkowski i W. Nilson), Berlin-Heidelberg-New York-etc.: Springer-Verlag. [= **Meschkowski & Nilson 1991**]

[**60**] CARNAP, R.

1) — (1922), „Der Raum: Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre", *Kant-Studien*, Ergänzungshefte, Bd. 56, Berlin: Verlag von Reuther & Reichard. [Preštampano s

pratećim napomenama i engleskim prevodom u *Collected Works*, Vol. 1, Carus *et al.* 2019: 21–208]

2) — (2019), *The Collected Works of Rudolf Carnap, Vol. I: Early Writings* (prir. A. W. Carus *et al.*), Oxford: Oxford University Press. [= **Carus *et al.* 2019**]

[**61**] CARNOT, L. N. M. (1803), *Géométrie de position*, Paris: L'Imprimerie de Crapelet.

[**62**] CASATI, R. (2009), „Minor Entities: Surfaces, Holes and Shadows" u R. Le Poidevin *et al.* (prir.), *The Routledge Companion to Metaphysics*, London-New York: Routledge Ch. 36, str. 382–388.

[**63**] CASELLATO, S. & PIGATTO, L. (1996), *Professori di materie scientifiche all'Università di Padova nell'Ottocento*, Trieste: Lint.

[**64**] CASSIRER, E. (1910), *Substanzbegriff und Funktionsbegriff : Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik*, Berlin: Verlag von Bruno Cassirer.

[**65**] CASTELNUOVO, G. (prir.) (1909), *Atti del 4° Congresso internazionale dei Matematici*, Vol. I–III, Roma: Tipografia della R . Accademia dei Lincei.

[**66**] CAUCHY, A.-L. (1821), *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, Paris: L'Imprimerie royale.

[**67**] CERRONI, C. & BRIGAGLIA, A. (2021), „The *Circolo Matematico di Palermo* and the First World War: The crisis of scientific internationalism: a view through the unedited correspondence of De Franchis with Edmund Landau and other mathematicians", *Hist. Math.* 55, str. 64–94.

[**68**] CHARPENTIER, E, GHYS, E. & LESNE, A. (prir.) (2010), *The Scientific Legacy of Poincaré*, History of Mathematics, Vol. 36, Providence & London: A co-publication of the AMS and LMS. [= **Charpentier *et al.* 2010**]

[**69**] CHEMLA, K, FERREIRÓS, J, JI, L, SCHOLZ, E. & WANG, C. (prir.) (2023), *The Richness of the History of Mathematics. A Tribute to Jeremy Gray*, Cham: Springer. [= **Chemla *et al.* 2023**]

[**70**] CIESIELSKA, D. & TOBIES, R. (prir.) (2023), „Felix Klein's Foreign Students: Opening Up the Way for Transnational Mathematics", *Oberwolfach Report* 47/2023, str. 2717–2769.

[**71**] CILIBERTO, C, GERAMITA, A. V, HARBOURNE, B, MIRÓ-ROIG, R. M. & RANESTAD, K. (prir.) (2004), *Projective Varieties with Unexpected Properties. A Volume in Memory of Giuseppe Veronese*, Berlin-New York: Walter de Gruyter. [= **Ciliberto *et al.* 2004**]

[**72**] CLEAVE, J. P. (1971), „Cauchy, Convergence and Continuity", *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 22, No. 1, str. 27–37.

[**73**] COHEN, P. J. & HIRSH, R. (1967), „Non-Cantorian Set Theory", *Scientific American*, Vol. 217, No. 6, str. 104–117.

[**74**] CONFALONIERI, S, SCHMIDT, P.-M. & VOLKERT, K. (prir.) (2019), *Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern*, Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 12 (prir. R. Krömer & G. Nickel), Siegen: Universitätsverlag. [= **Confalonieri *et al.* 2019**]

[**75**] CONTRO, W. S. (1976), „Von Pasch zu Hilbert", *Arch. Hist. Exact Sci.* 15, str. 283–295.

[**76**] CONWAY, J. & GUY, R. (1996), „Surreal Numbers", *Math Horizons*, Vol. 4, No. 2, str. 26–31.

[**77**] CONWAY, J. & RYBA, A.

1) — (2012), „The Pascal Mysticum Demystified", *The Mathematical Intelligencer* 34, str. 4–8.

2) — (2013), „Extending the Pascal Mysticum", *The Mathematical Intelligencer* 35, str. 44–51.

[**78**] CONWAY, J. H.

1) — (1976), *On Numbers and Games* (ONAG), London: Academic Press.

2) — (1994), „The Surreals and Reals“ u P. Ehrlich (prir.), *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers – Springer Science+Business Media, str. 93–103.

[**79**] COOK, R. T. (prir.) (2007), *The Arché Papers on the Mathematics of Abstraction*, Dordrecht: Springer.

[**80**] COOLIDGE, J. L. (1909), *The Elements Of Non-Euclidean Geometry*, Oxford: at the Clarendon Press.

[**81**] CORRY, L.

1) — (2004a) „Introduction: The History of Modern Mathematics – Writing and Rewriting“, *Science in Context* 17(1–2), str. 1–21.

2) — (2004b), *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918). From Grundlagen der Geometrie to Grundlagen der Physik*, Archimedes – New Studies in the History and Philosophy of Science and Technology, Vol. 10, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers – Springer Science+Business Media.

3) — (2023), „How Useful Is the Term ‘Modernism’ for Understanding the History of Early Twentieth-Century Mathematics?“ u K. Chemla *et al.* (prir.), *The Richness of the History of Mathematics. A Tribute to Jeremy Gray*, Cham: Springer, str. 393–423.

[**82**] CREMONA, L. (1873), *Elementi di geometria projettiva*, Vol. I, Roma: G. B. Paravia & Co.

[**83**] CROWE, M. J.

1) — (1975), „Ten ‘Laws’ concerning patterns of change in the history of mathematics“, Hist. Math. 2 (2), str. 161–166.

2) — (1992), „Afterword: a revolution in the historiography of mathematics“ u D. Gillies (prir.), *Revolutions in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, Ch. 15, str. 306–337.

[**84**] CUTLAND, N. J. (1983), „Nonstandard measure theory and its applications“, *Bull. London Math. Soc.* 15, str. 529–589.

[**85**] DALES, H. G. & WOODIN, W. H. (1996), *Super-Real Fields: Totally Ordered Fields with Additional Structure*, Oxford: Oxford University Press.

[**86**] DAUBEN, J. W, PEIFFER, J, SCRIBA, SCRIBA, C. J. & WUSSING, H. (2002), „Praescriptum“ u J. W. Dauben & C. J. Scriba (prir.), *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development* (Edited on behalf of the ICHM), Basel: Birkhäuser, str. xx–xxvii. [= **Dauben *et al.* 2002**]

[**87**] DAUBEN, J. W. & SCRIBA, C. J. (prir.) (2002), *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development* (Edited on behalf of the ICHM), Basel: Birkhäuser.

[**88**] DAUBEN, J. W.

1) — (1977), „Georg Cantor and Pope Leo XIII: Mathematics, Theology, and the Infinite“, *Journal of the History of Ideas*, Vol. 38, No. 1, str. 85–108.

2) — (1984), „Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge“ u E. Mendelsohn (prir.), *Transformation and tradition in the sciences. Essays in honor of I. Bernard Cohen*, Cambridge: Cambridge University Press, str. 81–103. Preštampano u D. Gillies (prir.) (1992), *Revolutions in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, Ch. 4, str. 49–71.

3) — (1988), „Abraham Robinson and Nonstandard Analysis: History, Philosophy, and Foundations of Mathematics“ u W. Aspray & P. Kitcher (prir.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Vol. XI, Minneapolis: University of Minnesota Press, str. 177–200.

4) — (1990), *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, New Jersey: Princeton University Press.

5) — (1992), „Appendix: revolutions revisited“ u D. Gillies (prir.), *Revolutions in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, Ch. 5, str. 72–82.

6) — (1995), *Abraham Robinson. The Creation of Nonstandard Analysis: A Personal and Mathematical Odyssey*, New Jersey: Princeton University Press.

7) — (2021), „Anachronism and incommensurability: words, concepts, contexts, and intentions“ u N. Guicciardini (prir.), *Anachronisms in the History of Mathematics: Essays on the Historical Interpretation of Mathematical Texts*, Cambridge: Cambridge University Press, Ch. 11, str. 307–357.

[**89**] DE GLAS, M. (prir.) (2009), *The Mathematical Continuum. New Conceptions, New Challenges*, specijalni tematski broj časopisa *Intellectica*, No. 51, 2009/1.

[**90**] DE RISI, V.

1) — (2007), *Geometry and Monadology. Leibniz's Analysis Situs and Philosophy of Space*, Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser.

2) — (2016), *Leibniz on the Parallel Postulate and the Foundations of Geometry. The Unpublished Manuscripts*, Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser.

3) — (2018), „*Analysis Situs*, the Foundations of Mathematics, and a Geometry of Space“ u M. R. Antognazza (prir.), *The Oxford Handbook of Leibniz*, Oxford: Oxford University Press, Ch. 13, str. 247–258.

4) — (2019), „Leibniz on the Continuity of Space“ u V. De Risi (prir.), *Leibniz and the Structure of Sciences*, Cham: Springer Nature, str. 111–169.

[**91**] DEDEKIND, R.

1) — (1854), „Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik“ (Aus dem Nachlaß. Habilitationsvortrag. Im Hause des Prof. Hoeck, in Gegenwart von Hoeck, Gauß, Weber, Waitz, Gehalten am 30. Juni 1854) u Fricke *et al.* (prir.), *Gesammelte mathematische Werke*, Bd. III, str. 428–438.

2) — (1872), *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig: Druck und Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn.

3) — (1888), *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig: Druck und Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn.

4) — (1930–1931–1932), *Gesammelte mathematische Werke*, Bd. I–III (prir. R. Fricke, E. Noether & Ö. Ore), Braunschweig: Druck und Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. [= **Dedekind 1930**, **Dedekind 1931** & **Dedekind 1932**]

5) — (1976), „Neprekidnost i iracionalni brojevi“ i „Šta su i čemu služe brojevi?“ (prev. Z. Mamuzić) u T. Anđelić (ur.), *Klasični naučni spisi Matematičkog instituta SAN*, N. S, Knjiga 2 (17), Beograd: Matematički institut SANU, str. 13–82.

[**92**] DEHN, M.

1) — (1900), „Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck", *Math. Ann.* 53, str. 404–439.

2) — (1926/1976), „Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung", Anhang u M. Pasch, *Vorlesungen über die neuere Geometrie* (Zweite Auflage), Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, str. 185–271.

[**93**] DESARGUES, G. (1863), *Brouillon Project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone auec un plan*, *Œuvres de Desargues*, T. I réunies et analysées par M. Poudra, Paris: Leiber, Ed.

[**94**] DESPEAUX, S, DUMBAUGH, D. & LORENAT, J. (prir.) (2022), „History of mathematics through collaboration: Toward a composite portrait of Oswald Veblen", *Oberwolfach Report* 56/2022, str. 3171–3214.

[**95**] DETLEFSEN, M.

1) — (1993), „Hilbert's Formalism", *Revue Internationale de Philosophie*, Vol. 47, No. 186 (4), str. 285–304.

2) — (2005), „Formalism" u S. Shapiro (prir.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford: Oxford University Press, Ch. 8, str. 236–317.

[**96**] DI SIENO, S, A. GUERRAGGIO, A. & NASTASI, P. (prir.) (1996), *La matematica italiana dopo l'Unità*, Milano: Marcos y Marcos. [= **Di Sieno *et al.* 1996**]

[**97**] DIEUDONNÉ, J. A.

1) — (1972), „The Historical Development of Algebraic Geometry", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 79, No. 8, str. 827–866.

2) — (1981), *History of Functional Analysis*, Amsterdam: North Holland Publishing Company.

3) — (1982), „The work of Bourbaki during the last thirty years", *Notices of the AMS* 29, str. 618–623.

4) — (1989), *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960*, Basel-Boston: Birkhäuser.

[**98**] DIJKSTERHUIS, E. J. (1987), *Archimedes* (prev. C. Dikshoorn), with a new bibliographic essay by Wilbur R. Knorr, New Jersey: Princeton University Press.

[**99**] DOHERTY, F. T. (2017), „Hilbert on Consistency as a Guide to Mathematical Reality", *Logique et Analyse*, No. 237, str. 107–128.

[**100**] DOMBROWSKI, P. (1979), „150 years after Gauss' *Disquisitiones generales circa superficies curvas*", *Astérisque*, T. 62, str. 1–153.

[**101**] DU BOIS-REYMOND, P.

1) — (1880), „Der Beweis des Fundamentalsatzes der Integralrechnung: $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$", *Math. Ann.* 16, str. 115–128.

2) — (1882), *Die allgemeine Functionentheorie, Erster Theil. Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Größe, Grenze, Argument und Function*, Tübingen: Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung.

3) — (1887), *Théorie générale des fonctions* (prev. G. Milhaud & A. Girot), Nice: Imprimerie niçoise. [francuski prevod **du Bois-Reymond 1882**]

[**102**] DUGAC, P. (2003), *Histoire de l'analyse: autour de la notion de limite et de ses voisinages*, Paris: Vuibert.

[**103**] DUPORCQ, E. (prir.) (1902), *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathematiciens*, Paris: Gauthier-Villars, 1902.

[**104**] EASWARAN, K, HÁJEK, A, MANCOSU, P. & OPPY, G. (2025), „Infinity“, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2025 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (ur.), LINK. [= **Easwaran *et al.* 2025**]

[**105**] EDWARDS, C. H. (1979), *The Historical Development of the Calculus*, New York: Springer.

[**106**] EHRLICH, P. & KAPLAN, E.

1) — (2018), „Number systems with simplicity hierarchies: a generalization of Conways theory of surreal numbers II“, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 83, No. 2, str. 617–633.
2) — (2021), „Surreal Ordered Exponential Fields“, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 86, No. 3, str. 1066–1115.

[**107**] EHRLICH, P.

1) — (1986), „The Absolute Arithmetic and Geometric Continua“, *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association* (tom za 1986. godinu), Vol. II, str. 237–246.
2) — (1988), „An Alternative Construction of Conway's Ordered Field **No**“, *Algebra Universalis* 25, str. 7–16. [= **Ehrlich 1988**] Za Corrigendum, v. *Algebra Universalis* 25, str. 233. [= **Ehrlich 1988a**]
3) — (1989), „Absolutely saturated models“, *Fund. Math.* 133, str. 39–46.
4) — (1992), „Universally Extending Arithmetic Continua“ u J.-M. Salanskis & H. Sinaceur (prir.), *Le Labyrinthe du Continu. Colloque de Cerisy*, Paris: Springer-Verlag France, str. 168–177.
5) — (1994a), „General Introduction“ u P. Ehrlich (prir.), *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers – Springer Science+Business Media, str. vii–xxxii.
6) — (1994b), „All Numbers Great and Small“ u P. Ehrlich (prir.), *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers – Springer Science+Business Media, str. 239–258.
7) — (1997), „Dedekind Cuts of Archimedean Complete Ordered Abelian Groups“ u *Algebra Universalis* 37, str. 223–234.
8) — (2001), „Number Systems with Simplicity Hierarchies: A Generalization of Conway's Theory of Surreal Numbers“, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 66, No. 3, str. 1231–1258. [= **Ehrlich 2001**] Za Corrigendum, v. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 70, No. 3, str. 1022. [= **Ehrlich 2005**]
9) — (2002a), „The Absolute Arithmetic Continuum and the Unification of All Numbers Great and Small“, *Philosophical Insights into Logic and Mathematics*, Nancy: Université de Nancy 2, Laboratoire de Philosophie et d'Historie des Sciences, Archives Henri Poincaré, str. 43–43.
10) — (2002b), „Surreal numbers: an alternative construction“, *The Bulletin of Symbolic Logic* 8 (3), str. 448.
11) — (2004), „Surreal Numbers and the Unification of All Numbers Great and Small“, *The Bulletin of Symbolic Logic* 10 (2), str. 253.

12) — (2007), „John L. Bell. *The continuous and the infinitesimal in mathematics and philosophy*. Polimetrica, International Scientific Publisher, Monza-Milano, 2005, 349 pp.“, The Bulletin of Symbolic Logic 13 (3), str. 361–363.

13) — (2010), „The Absolute Arithmetic Continuum and its Peircean Counterpart“ u M. E. Moore (prir.), *New Essays on Peirce's Mathematical Philosophy*, Chicago: Open Court, str. 235–281.

14) — (2012), „The Absolute Arithmetic Continuum and the Unification of All Numbers Great and Small“, *The Bulletin of Symbolic Logic* 18 (1), str. 1–45.

15) — (2022), „Are Points (Necessarily) Unextended?“, *Philosophy of Science* 89 (4), str. 784–801.

16) — (prir.) (1994), *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers – Springer Science+Business Media.

[**108**] ENGEL, F. & DEHN, M. (1934), „Moritz Pasch“, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 44, str. 120–142.

[**109**] ENRIQUES, F.

1) — (1907), „Prinzipien der Geometrie“, *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 3: Geometrie (prir. W. Fr. Meyer & H. Mohrmann), Erster Teil, erste Halfte, Odeljak **III A, B 1**, Leipzig: Verlag und Druck von B.G. Teubner, str. 1–129.

2) — (1911), „Principes de la géométrie“, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* (prir. J. Molk), T. III, Vol. 1 (III.1), Fondaments de la géométrie, Paris: Gauthier-Villars & Leipzig-Teubner, str. 1–147. [francuski prevod **Enriques 1907**]

3) — (1911a), „Sui numeri non archimedei e su alcune loro interpretazioni“, *Bollettino della Mathesis*, Vol. III, str. 87–105.

[**110**] EPPLE, M. (1997), „Styles of Argumentation in Late 19th Century Geometry and the Structure of Mathematical Modernity“ u M. Otte & M. Panza (prir.), *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy*, Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, str. 177–198.

[**111**] ERDMANN, B. (1877), *Die Axiome der Geometrie, eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtz'schen Raumtheorie*, Leipzig: L. Voss.

[**112**] EUCLIDES (1969–1977), *Euclidis Elementa, Vol. I–V* (post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis), Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana, Stuttgart: B. G. Teubner & Berlin: Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin – Institut für Griechisch-Römische Altertumskunde & De Gruyter.

[**113**] EWALD, W. B. (2005), *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Vol. I–II, Oxford: Oxford University Press.

[**114**] FANO, G. (1938), „Geometrie non euclidee e non archimedee“, *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi* (prir. L. Berzolari, G. Vivanti & D. Gigli), Vol. II, Parte II, Milano: Editore U. Hoepli, str. 435–511.

[**115**] FEFERMAN, S, FRIEDMAN, H, MADDY, P. & STEEL, J. R. (2000), „Does Mathematics Need New Axioms?“, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 6, No. 4, str. 401–446. [= **Feferman *et al.* 2000**]

[**116**] FEFERMAN, S.

1) — (2009a), „Modernism in Mathematics: Review of J. Gray, *Plato's Ghost. The Modernist Transformation of Mathematics*“, *American Scientist*, Vol. 97, No. 5, str. 417–420.

2) — (2009b), „Conceptions of the Continuum“, *Intellectica* No. 51 (Special Issue, *The Mathematical Continuum. New Conceptions, New Challenges*, prir. M. De Glas), str. 169–190.

[**117**] FEHR, H. (1911), „Circulaire n° 5: Compte rendu du Congrès de Milan, 18-21 Septembre 1911“, separat (Publications du Comité Central de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique), *L'Enseignement Mathématique* 13, str. 1–75.

[**118**] FERREIRÓS, J. & GRAY, J.

1) — (2006a), „Introduction“ u J. Ferreirós & J. Gray (prir.), *The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosophy*, Oxford: Oxford University Press, str. 1–43.

2) — (2006), *The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosophy*, Oxford: Oxford University Press.

[**119**] FERREIRÓS, J.

1) — (1999), *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Basel: Birkhäuser.

2) — (2004), „The Motives behind Cantor's Set Theory – Physical, Biological, and Philosophical Questions“, *Science in Context* 17 (1/2), str. 49–83.

3) — (2006), „Riemann's Habilitationsvortrag at the Crossroads of Mathematics“ u J. Ferreirós & J. Gray (prir.), *The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosophy*, Oxford: Oxford University Press, str. 67–96.

4) — (2007), „'O Θεὸζ' Αριθμητίξει: The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss“ u C. Goldstein *et al.* (prir.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, Ch. III.2, str. 234–268.

5) — (2009), „Hilbert, logicism, and mathematical existence“, *Synthese* 170, str. 33–70.

6) — (2023), „On Set Theories and Modernism“ u K. Chemla *et al.* (prir.), *The Richness of the History of Mathematics. A Tribute to Jeremy Gray*, Cham: Springer, str. 453–478.

[**120**] FESTINI, H. (1977), *Život i djelo Splićanina Jurja Politea*, Zagreb: Institut za filozofiju Sveučilišta u Zagrebu.

[**121**] FISHER, G. (1981), „The infinite and infinitesimal quantities of du Bois-Reymond and their reception“, *Arch. Hist. Exact Sci.* 24, str. 101–163.

[**122**] FRAENKEL, A.

1) — (1919), *Einleitung in die Mengenlehre: eine gemeinverständliche Einführung in das Reich der unendlichen Grössen*, Berlin: Springer.

2) — (1967), *Lebenskreise: aus den Erinnerungen eines judischen Mathematikers*, Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt.

3) — (1976), *Abstract Set Theory* (4th revised edition, revised by A. Levy), Amsterdam-Oxford: North Holland Publishing Company & New York: American Elsevier Publishing Company, Inc.

4) — (2016), *Recollections of a Jewish Mathematician in Germany* (prir. J. Cohen-Mansfield, prev. A. Brown), Basel: Birkhäuser. [Engleski prevod **Fraenkel 1967**]

[**123**] FRAENKEL, A. A., BAR-HILLEL, Y. & LEVY, A. (1973), *Foundations of Set Theory* (2nd edition); Amsterdam-London-New York-Oxford-Paris-Shannon-Tokyo: Elsevier.

[**124**] FRANKLIN, J.

1) — (2009), „Aristotelian Realism“ u A. D. Irvine (prir.), *Philosophy of Mathematics* (part of the *Handbook of the Philosophy of Science*, prir. D. Gabbay *et al.*), Amsterdam-Boston-Heidelberg-etc: North Holland-Elsevier, Ch. 3, str. 101–153.
2) — (2014), *An Aristotelian Realist Philosophy of Mathematics. Mathematics as the Science of Quantity and Structure*, London: Palgrave Macmillan.
3) — (2022), „Mathematics as a Science of Non-abstract Reality: Aristotelian Realist Philosophies of Mathematics“, *Foundations of Science* 27, str. 327–344.

[**125**] FRASER, C. (2015), „Nonstandard Analysis, Infinitesimals and the History of the Calculus“ u D. E. Rowe & W. S. Horng (prir.), *A Delicate Balance: Global Perspectives on innovation and Tradition in the History of Mathematics*, Cham: Springer, str. 25–50.

[**126**] FREGE, G.

1) — (1874), „Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Größenbegriffes gründen“ (Dissertation zur Erlangung der *venia docendi*), Jena: Druck von F. Frommann.
2) — (1884), *Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau: W. Koebner Verlag.
3) — (1893–1903), *Grundgesetze der Arithmetik Begriffsschriftlich abgeleitet,* Bd. I–II, Jena: Verlag H. Pohle. [= **Frege 1893** & **Frege 1903**]
4) — (1918), „Der Gedanke“, *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, Bd. I, str. 58–77.
5) — (1980), *Philosophical and Mathematical Correspondence* (prir. G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel & A. Veraart), Oxford: Basil Blackwell. [= **Gabriel *et al.* 1980**]

[**127**] FREUDENTHAL, H.

1) — (1957), „Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. Zugleich eine Besprechung der 8. Aufl. von Hilberts *Grundlagen der Geometrie*“, *Nieuw Arch. Wisk.* 3 (5), str. 105–142. Preštampano u T. A. Springer & D. van Dalen (prir.) (2009), *Hans Freudenthal Selecta*, Zürich: European Mathematical Society, str. 486–523.
2) — (1960), „Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts“, *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte* N. F. 7, str. 2–25.
3) — (1966), „The Main Trends in the Foundations of Geometry in the 19th Century“, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, Vol. 44, str. 613–621.

[**128**] FRIED, M. N. & UNGURU, S. (2001), *Apollonius of Perga's Conica. Text, Context, Subtext*, Leiden: Brill.

[**129**] FURINGHETTI, F. (2019), „Challenges, Hopes, Actions, and Tensions in the Early Years of the International Commission on the Teaching of Mathematics“ u A. Karp (prir.), *National Subcommissions of ICMI and their Role in the Reform of Mathematics Education*, Cham: Springer, str. 1–34.

[**130**] GABRIEL, G. (1978), „Implizite Definitionen – Eine Verwechselungsgeschichte“, Annals of Science 35 (4), str. 419–423.

[**131**] GALILEI, G. (1638), *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Leida: L. Elzeviro Ed.

[**132**] GALLIE, W. B. (1955/56), „Essentially Contested Concepts“, *Proceedings of the Aristotelian Society*, NS, Vol. 56, str. 167–198.

[**133**] GANDON, S. (2023), „Interpretation, Logic and Philosophy: Jean Nicod's *Geometry in the Sensible World*“, *The Review of Symbolic Logic* 16 (4), str. 1080–1109.

[**134**] GEISON, G. L. & HOLMES, F. L. (prir.) (1993), *Research Schools: Historical Reappraisals*, specijalni tematski broj časopisa *Osiris*, Vol. 8.

[**135**] GEISON, G. L. (1993), „Research Schools and New Directions in the Historiography of Science“, *Osiris*, Vol. 8, *Research Schools: Historical Reappraisals*, str. 226–238.

[**136**] GEISSLER, K. (1904), „Grundgedanken einer übereuklidischen Geometrie durch die Weitenbehaftung des Unendlichen“, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 13, str. 233–240.

[**137**] GIACARDI, L. M.

1) — (2005), „L'insegnamento della matematica in Italia dal 1895 al 1923. Il ruolo della *Mathesis*“ u G. Bruno & A. Trotta (prir.), *Conoscere attraverso la matematica: linguaggio, applicazioni e connessioni interdisciplinari*, Atti del Congresso Nazionale Mathesis 2004, Roma: Editore Mathesis, str. 303–344.

2) — (2019), „The Italian Subcommission of the International Commission on the Teaching of Mathematics (1908–1920): Organizational and Scientific Contributions“ u A. Karp (prir.), *National Subcommissions of ICMI and their Role in the Reform of Mathematics Education*, Cham: Springer, str. 119–147.

[**138**] GIAQUINTO, M.

1) — (2007), *Visual Thinking in Mathematics: An Epistemological Study*, Oxford: Oxford University Press.

2) — (2008), „Cognition of Structure“ u P. Mancosu (prir.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford: Oxford University Press, str. 43–64.

[**139**] GILLIES, D.

1) — (1992), „Introduction“ u D. Gillies (prir.), *Revolutions in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, str. 1–14.

2) — (prir.) (1992a), *Revolutions in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

[**140**] GIOVANNINI, E. N. & SCHIEMER, G. (2021), „What are Implicit Definitions?“, *Erkenntnis* 86, str. 1661–1691.

[**141**] GÖDEL, K.

1) — (1930), „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls“, *Monatsh. f. Mathematik und Physik*, Bd. 37, str. 349–360.

2) — (1947), „What is Cantor's Continuum Problem?“, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 54, No. 9, str. 515–525.

3) — (1995), *Collected Works, Vol. III: Unpublished Essays and Lectures* (prir. S. Feferman, J. W. Dawson, W. Goldfarb, C. Parsons & R. M. Solovay), New York-Oxford: Oxford University Press. [= **Feferman *et al.* 1995**]

4) — (2003), *Collected Works, Vol. V: Correspondence H–Z* (prir. S. Feferman, J. W. Dawson, W. Goldfarb, C. Parsons & W. Sieg), Oxford: Clarendon Press. [= **Feferman *et al.* 2003**]

[**142**] GOETHE, N. B, BEELEY, P, RABOUIN, D.

1) — (2015), „The Interrelations Between Mathematics and Philosophy in Leibniz's Thought" u N. B. Goethe *et al.* (prir.), *G. W. Leibniz, Interrelations Between Mathematics and Philosophy*, Dordrecht-Heidelberg-New York-London: Springer, str. 3–21. [= **Goethe *et al.* 2015**]

2) — (prir.) (2015a), *G. W. Leibniz, Interrelations Between Mathematics and Philosophy*, Dordrecht-Heidelberg-New York-London: Springer.

[**143**] GOLDSTEIN, C, SCHAPPACHER, N. & SCHWERMER, J. (prir.) (2007), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin-Heidelberg: Springer Verlag.

[**144**] GONSHOR, H. (1986), *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers*, Cambridge: Cambridge University Press.

[**145**] GOODSTEIN, J. R. (2018), *Einstein's Italian Mathematicians: Ricci, Levi-Civita, and the Birth of General Relativity*, Providence: American Mathematical Society.

[**146**] GRABINER, J. V. (2005), *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, New York: Dover Publications, Inc.

[**147**] GRAßMANN, H. (1847), *Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik*, Leipzig: Weidmann'sche Buchhandlung.

[**148**] GRATTAN-GUINNESS, I.

1) — (1992), „Scientific Revolutions as Convolutions? A Sceptical Enquiry" u S. S. Demidov *et al.* (prir.), *Amphora. Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag*, Basel: Birkhäuser, str. 279–287.

2) — (2000), *The Search for Mathematical Roots, 1870–1940: Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, New Jersey: Princeton University Press.

3) — (2004), „The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage", *Hist. Math.* 31, str. 163–185.

4) — (2009), „Mathematics Ho! Which Modern Mathematics Was Modernist?", *The Mathematical Intelligencer* 31, str. 3–11.

[**149**] GRAY, J. & FERREIRÓS, J. (2025), „Epistemology of Geometry", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2025 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (ur.), LINK.

[**150**] GRAY, J.

1) — (1979), „Non-Euclidean Geometry – A Re-Interpretation", *Hist. Math.* 6, str. 236–258.

2) — (2007), *Worlds Out of Nothing. A Course in the History of Geometry in the 19th Century*, London: Springer Verlag Ltd.

3) — (2008), *Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics*; Princeton and Oxford: Princeton University Press.

4) — (2009a), „Nineteenth century Analysis as Philosophy of Mathematics" u B. Van Kerkhove (prir.), *New Perspectives on Mathematical Practices: Essays in Philosophy and History of Mathematics*, Singapore: World Scientific, Ch. 6, str. 138–149. Napomena: u disertaciji je korišćena paginacija iz verzije rada koja je dostupna *online* preko *The Open University: Open Research Online* (ORO) sistema – LINK.

5) — (2009b), Modernism in Mathematics“ u E. Robson & J. Stedall (prir.), *Oxford Handbook of the the History of Mathematics*; London-New York: Oxford University Press, str. 663–683.

6) — (2012), *Henri Poincaré – A Scientific Biography*, Princeton-Oxford: Princeton University Press.

[**151**] GUERRAGGIO, A. & NASTASI, P. (2006), *Italian Mathematics Between the Two World Wars*, Basel: Birkhäuser.

[**152**] HAFFNER, E, LORENAT, J, MICHEL, N. & SARIKAYA, D. (2022), „Veblen's lecture notebooks on foundations of geometry“ u Despeaux *et al.* (prir.), *Oberwolfach Report* 56/2022, str. 3201–3207. [= **Haffner *et al.* 2022**]

[**153**] HAHN, H.

1) — (1907), „Uber die nicht-archimedischen Größensysteme“, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, math-naturw. Klasse* 116, str. 601–655. [preštampano u *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. I, Hahn 1995: 445–499]

2) — (1933), *Krise und Neuaufbau der exakten Wissenschaften* (Fünf Wiener Vorträge), Leipzig-Wien: Deuticke.

3) — (1954), „Geometry and Intuition“, *Scientific American* 190 (4), str. 84–91.

4) — (1980), *Empiricism, Logic and Mathematics. Philosophical Papers* (prir. B. McGuinness), Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

5) — (1995), *Gesammelte Abhandlungen*, Band 1 (prir. L. Schmetterer & K. Sigmund), Wien: Springer-Verlag GmbH.

[**154**] HALLETT, M. & MAJER, U. (prir.) (2004), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891–1902*, Berlin-Heidelberg: Springer Verlag.

[**155**] HALLETT, M.

1) — (1984), *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford: Clarendon Press.

2) — (2024), „Zermelo's Axiomatization of Set Theory“, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2024 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (ur.), LINK.

[**156**] HALSTED, G. B.

1) — (1905), „The Bolyai Prize“, *Science*, New Series, Vol. 22, No. 557, str. 270–271.

2) — (1900), „Gauss and the Non-Euclidean Geometry“, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 7, No. 11, str. 247–252.

3) — (1911), „The Bolyai Prize: Report on the Works of Hilbert“, *Science*, New Series, Vol. 33, No. 855, str. 753–765. [engleski prevod **Poincaré 1911a**]

[**157**] HANKEL, H. (1867), *Theorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen, nebst ihrer geometrischen Darstellung*, Leipzig: Leopold Voss.

[**158**] HARTSHORNE, R. (2000), *Geometry: Euclid and Beyond*, New York: Springer.

[**159**] HAUSCHILD, K. (1966), „Über die Konstruktion von Erweiterungskörpern zu nichtarchimedisch angeordneten Körpern mit Hilfe von Hölderschen Schnitten“, *Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe 15, str. 685–686.

[**160**] HEATH, T. L.

1) — (1923), „Presidential Address. Greek Geometry with Special Reference to Infinitesimals“, *The Mathematical Gazette*, Vol. 11, No. 163, str. 248–259.

2) — (prev. i prir.) (1897/2010), *The Works Of Archimedes. Edited in Modern Notation with Introductory Chapters*, Cambridge: at the University Press.

3) — (prev. i prir.) (1908), *The Thirteen Books of Euclid's Elements, Translated from the Text of Heiberg with Introduction and Commentary*, Vol. I–II, Cambridge: at the University Press.

[**161**] HEINIG, P, KATZ, M, KUHLEMANN, K, SCHÄFERMEYER, J. P. & SHERRY, D. (2023), „Exploring Felix Klein's contested modernism“, *Antiquitates Mathematicae* 17 (1), str. 101–137. [= **Heinig *et al.* 2023**]

[**162**] HEINZMANN, G. & PETITOT, J. (2020), „The Functional Role of Structures in Bourbaki“ u E. H. Reck & G. Schiemer (prir.), *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, New York: Oxford University Press, Ch. 8, str. 187–214.

[**163**] HEINZMANN, G. & STUMP, D. (2024), „Henri Poincaré“, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2024 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (ur.), LINK.

[**164**] HELLMAN, G. & SHAPIRO, S.

1) — (2012) „Towards a point-free account of the continuous“, *Iyyun: The Jerusalem Philosophical Quarterly* 61, str. 263–287.

2) — (2013), „The classical continuum without points“, *Review of Symbolic Logic* 6, str. 488–512.

3) — (2018), *Varieties of Continua. From Regions to Points and Back*, Oxford: Oxford University Press.

[**165**] HENKIN, L. (1949), „The Completeness of the First-Order Functional Calculus“, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 14, No. 3, str. 159–166.

[**166**] HESSENBERG, G.

1) — (1904), „Das Unendliche in der Mathematik“, *Abhandlungen der Fries'schen Schule, Neue Folge* 1.1.3, Erstes Heft, Göttingen: Vandenhoeck & Rupprecht, str. 135–190, LINK.

2) — (1905a), „Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen“, *Math. Ann.* 61, str. 161–172.

3) — (1905b), „Begründung der elliptischen Geometrie“, *Math. Ann.* 61, str. 173–184.

4) — (1905c), „Neue Begründung der Sphärik“, *Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft* 4, str. 69–77.

[**167**] HILBERT, D.

1) — (1891), „Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück“, *Math. Ann.* 38, 459–460.

2) — (1897), „Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper“ [= *Zahlbericht*], *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 4 (1894–95), str. 175–546.

3) — (1899), *Grundlagen der Geometrie* (Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. Herausgegeben von dem Fest-Comitee. I. Theil), Leipzig: Teubner.

4) — (1900), „Mathematische Probleme“, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (tom za 1900. godinu), str. 253–297.

5) — (1900a), „Über den Zahlbegriff“, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 8, str. 180–183.

6) — (1901), „Mathematische Probleme“, *Archiv der Mathematik und Physik*, 3. Reihe, Band 1, str. 44–63 i 213–237.

7) — (1902a), „Sur les problèmes futurs des mathématiques“ (prev. M. L. Laguel), *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathematiciens* (prir. E. Duporcq), Paris: Gauthier-Villars, 1902, str. 58–114.

8) — (1902b), „Mathematical Problems“ (prev. M. W. Newson), *Bulletin of the American Mathematical Society* 8, str. 437–479.

9) — (1903), *Grundlagen der Geometrie* (Zweite, durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Auflage. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Abbildungen), Leipzig: Teubner.

10) — (1910), „Hermann Minkowski“, *Math. Ann.* 68, str. 445–471.

11) — (1918), „Axiomatisches Denken“, *Math. Ann.* 78, str. 405–415.

12) — (1922), „Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung“, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* 1, str. 157–177.

13) — (1923), „Die logischen Grundlagen der Mathematik“, *Math. Ann.* 88, str. 151–165.

14) — (1926), „Über das Unendliche“, *Math. Ann.* 95, str. 161–190.

15) — (1932–1933–1935), *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 1–3 (Zahlenteorie/Algebra-Invariententheorie-Geometrie/Analysis-Grundlagen der Mathematik-Physik-Verschiedenes), Berlin: Verlag von J. Springer. [= **Hilbert 1932**, **1933** & **1935**]

16) — (1998), *The Theory of Algebraic Number Fields* (prev. I. T. Adamson, uvod F. Lemmermeyer & N. Schappacher), Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag GmbH. [Engleski prevod **Hilbert 1897**]

[**168**] HJELMSLEV, J.

1) — (1907), „Neue Begründung der ebenen Geometrie“, *Math. Ann.* 64, str. 449–474.

2) — (1950), „Eudoxus' Axiom and Archimedes' Lemma“, *Centaurus* 1, str. 2–11.

[**169**] HOBSON, E. W.

1) — (1902), „On the Infinite and the Infinitesimal in Mathematical Analysis“, *Proceedings of the London Mathematical Society* 35, str. 117–140.

2) — (1907), *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series* (1st edition), Cambridge: at the University Press.

3) — (1921), *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series* (2nd edition, revised throughout and enlarged), Vol. I, Cambridge: at the University Press.

4) — (1994), „On the Infinite and the Infinitesimal in Mathematical Analysis“u P. Ehrlich (prir.), *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers – Springer Science+Business Media, str. 3–26.

[**170**] HODGE, W. V. D. (1942), „Tullio Levi-Civita, 1873–1941“, *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society* 4 (11), str. 151–165.

[**171**] HODGES, W.

1) — (1993), *Model Theory*, Cambridge: Cambridge University Press.

2) — (2000), „The History of Model Theory“ (Draft 20 Jul 2000), dostupno *online* na zvaničnoj internet stranici prof. Hodglesa: LINK.

3) — (2018), „A Short History of Model Theory“ u T. Button & S. Walsh (prir.), *Philosophy and Model Theory*, Oxford: Oxford University Press, Ch. 18, str. 439–476.

[**172**] HÖLDER, O.

1) — (1901), „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass“, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, Mathematisch-Physikaliche Classe, Bd. 53, str. 1–64. Napomena: u disertaciji sam koristio engleski prevod Michell, J. & Ernst, C. (1996), „The Axioms of Quantity and the Theory of Measurement“, *Journal of Mathematical Psychology* 40, str. 235–252. [= **Michell & Ernst 1996**]

2) — (1924), *Die Mathematische Methode: Logisch-erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik*, Berlin: Verlag von J. Springer.

[**173**] HUNTINGTON, E. V.

1) — (1902), „A Complete Set of Postulates for the Theory of Absolute Continuous Magnitude“, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 3, No. 2, str. 264–279.

2) — (1913), „A set of postulates for abstract geometry, expressed in terms of the simple relation of inclusion“, *Math. Ann.* 73, str. 522–559.

3) — (1917), *The Continuum and Other Types of Serial Order with an Introduction to Cantor's Transfinite Numbers* (2nd edition), New York: Dover Publications, Inc.

4) — (1934), „The Postulational Method in Mathematics“, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 41, No. 2, str. 84–92.

[**174**] ISHIGURO, H. (1991), *Leibniz's Philosophy of Logic and Language* (2nd ed.) Cambridge: Cambridge University Press.

[**175**] ISRAEL, G. & MILLÁN GASCA, A. (2009), *The World as a Mathematical Game: John von Neumann and Twentieth Century Science*, Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag.

[**176**] JAHNKE, H. N. (1987), „Motive und Probleme der Arithmetisierung der Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts – Cauchys Analysis in der Sicht des Mathematikers Martin Ohm“, *Arch. Hist. Exact Sci.* 37 (2), str. 101–182.

[**177**] KAGAN, V. F. [Ка́ган, В. Ф.]

1) — (1901), „Этюды по основаниям геометрии“, *Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики* (*В.О.Ф.Э.М.*), № 308, str. 174–185; № 311, str. 254–260; № 312, str. 286–192.

2) — (1904), „Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии“, Этюды по основаниям геометрии“, *Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики* (*В.О.Ф.Э.М.*), № 380, str. 176–184; № 381, str. 201–208; № 383, str. 241–249; № 384, str. 265–275; № 387, str. 49–57; № 391, str. 153–156; № 392, str. 169–176; № 395, str. 248–253; № 396, str. 272–278; № 402, str. 121–128; № 403, str. 145–150.

3) — (1905), *Основания геометрии*, Т. 1 (Опыт обоснования евклидовой геометрии), Одесса: Экономическая типография.

4) — (1907a), *Основания геометрии*, Т. 2 (Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии), Одесса: Экономическая типография.

5) — (1907b), „Учение о непрерывности“, *Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики* (*В.О.Ф.Э.М.*), № 438, str. 121–129; № 439, str. 145–154; № 440–41, str. 169–186.

[**178**] KARP, A. (2019), „The Russian National Subcommission of ICMI and the Mathematics Education Reform Movement“ u A. Karp (prir.), *National Subcommissions of ICMI and their Role in the Reform of Mathematics Education*, Cham: Springer, str. 149–191.

[**179**] KATZ, M. G. & SHERRY, D.

1) — (2012), „Leibniz's Laws of Continuity and Homogeneity“, *Notices of the AMS* 59 (11), str. 1550–1558.

2) — (2013), „Leibniz's Infinitesimals: Their Fictionality, Their Modern Implementations, and Their Foes from Berkeley to Russell and Beyond“, *Erkenntnis* 78, str. 571–625.

[**180**] KEISLER, H. J. & CHANG, C. C. (1990), *Model Theory* (3rd edition), New York: Dover.

[**181**] KEISLER, H. J.

1) — (1976), *Foundations of Infinitesimal Calculus*, Boston: Prindle, Weber & Schmidt, Inc. Dostupno *online* na zvaničnoj internet stranici prof. Keislera: LINK.

2) — (1994), „The Hyperreal Line“ u P. Ehrlich (prir.), *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers – Springer Science+Business Media, str. 207–238.

3) — (2012), *Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach*, New York: Dover. Dostupno *online* na zvaničnoj internet stranici prof. Keislera: LINK.

[**182**] KERRY, B.

1) (1885a), „Über G. Cantor's Mannigfaltigkeitsuntersuchungen“, *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie* 9, str. 191–232.

2) (1885b), „Rezension: P. du Bois-Reymond, *Allgemeine Functionentheorie*, Erster Theil, Tübingen, 1882“, *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie* 9, str. 245–255.

[**183**] KILLING, W.

1) — (1885), *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, Leipzig: Verlag von B. G. Teubner.

2) — (1893), *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, Bd. 1, Paderborn: Druck und Verlag von Ferdinand Schöningh.

3) — (1895/96), „Bemerkungen über Veronese's transfinite Zahlen“, *Index Lectionum in Academia Theologica et Philosophica Monasteriensi*, Münster in Westfalen.

4) — (1897), „Über transfinite Zahlen“, *Math. Ann.* 48, str. 425–432.

5) — (1898), *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, Bd. 2, Paderborn: Druck und Verlag von Ferdinand Schöningh.

[**186**] KITCHER, P. & ASPRAY, W. (1988), „An Opinionated Introduction“ u W. Aspray & P. Kitcher (prir.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Vol. XI, Minneapolis: University of Minnesota Press, str. 3–60.

[**187**] KLEIN, F.

1) — (1872), *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen: Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen*, Erlangen: Verlag von A. Deichert.

2) — (1894), *Lectures on Mathematics* (The Evanston Colloquium), New York-London: MacMillan & Co.

3) — (1895), „Über Arithmetisierung der Mathematik“, *Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (Geschäftliche Mitteilungen aus dem Jahre 1894), Heft 2, str. 82–91. Napomena: u radu je korišćena paginacija prema Kleinovim *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Klein 1922, §XLVII, str. 232–240.

4) — (1922), *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. II, Anschauliche Geometrie usw. (prir. R. Fricke & H. Vermeil), Berlin: Verlag von J. Springer.

5) — (1932), *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis* (prev. E. R. Hedrick, & C. A. Noble), MacMillan & Co.

6) — (1968), *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Bd. III, Präzisions - und Approximationsmathematik*, Berlin: Verlag von J. Springer.

[**188**] KLINE, M. (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York: Oxford University Press.

[**189**] KNEALE, W. & KNEALE, M. (1962), *The Development of Logic*, Oxford: at the Clarendon Press.

[**190**] KNUTH, D. (1974), *Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness*, Reading, MA: Addison Wesley Publishing Company Inc.

[**191**] KOPFERMANN, K. (1966), „Weierstraß' Vorlesung zur Funktionentheorie“ u H. Behnke & K. Kopfermann (prir.), *Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass 1815–1965*, Köln und Opladen: Westdeutscher Verlag, str. 75–96.

[**192**] KOREUBER, M. (2015), „Zur Einführung einer begrifflichen Perspektive in die Mathematik: Dedekind, Noether, van der Waerden“, *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte* 38 (3), str. 243–258.

[**193**] KÖTTER, E. (1895), Prikaz Veroneseovih Fondamenti, *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Bd. XXIV (Jahrgang 1892), Achter Abschnitt, Reine, elementare und synthetische Geometrie, Cap. 1, Principien der Geometrie, str. 483–495. JFM 24.0483.05.

[**194**] KRAZER, A. (prir.) (1905), *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses*, Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner.

[**195**] KRON, A. (1992), *Elementarna teorija skupova*, Beograd: Matematički institut SANU.

[**196**] KUREPA, Đ. (1969), *Viša algebra*, Knj. 1–2 (drugo izdanje, ispravljeno i dopunjeno), Beograd: Zavod za izdavanje udžbenika SRS.

[**197**] LAGRANGE, J. L. (1797), *Théorie des fonctions analytiques*, Paris: L'Imprimerie de la République.

[**198**] LAKATOS, I.

1) — (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery* (prir. J. Worral & E. Zahar), Cambridge: Cambridge University Press.

2) — (1978), „Cauchy and the Continuum: The Significance of Non-Standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics“ *The Mathematical Intelligencer* 1, str. 151–161.

[**199**] LAUGWITZ, D.

1) — (1968), „Eine nichtarchimedische Erweiterung angeordneter Körper“ (Herrn W. Rinow zu seinem 60. Geburtstag gewidmet), *Math. Nachr.* 37, str. 225–236.

2) — (1973/74), „Ein Weg zur Nonstandard-Analysis“, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 75, str. 66–93.

3) — (1975), „Tullio Levi-Civita's Work on Non-Archimedean Structures (With an Appendix: Properties of Levi-Civita Fields)" u *Atti dei Convegni Lincei* 8: *Tullio Levi-Civita. Convegno internazionale celebrativo del centenario della nascita* (Roma, 17–19. dicembre 1973), Roma: Accademia Nazionale dei Lincei, str. 297–312.

4) — (1975a), „Zur Mathematik des Infinitesimalen und Infiniten", *Jahrbuch Überblicke Mathematik* (za 1975. godinu), Mannheim: Bibliographisches Institut, str. 45–50.

5) — (1977), „Infinitely small quantities in Cauchy's textbooks", *Hist. Math.* 14 (3), str. 258–274.

6) — (1977a), „K vývojů matematiky infinitezimálna a nekonečna", *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* 22 (6), str. 326–329. (češki prevod Laugwitz 1975a).

7) — (1982), „Bolzano's infinitesimal numbers", *slovak Mathematical Journal* 32 (4), str. 667–670.

8) — (1983), „**Ω**-Calculus as a Generalization of Field Extension. An Alternative Approach to Nonstandard Analysis" u E. E. Hurd (prir.), *Nonstandard Analysis – Recent Developments* (Lecture Notes in Mathematics), Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo: Springer-Verlag, str. 120–133.

9) — (1984), „Rise, Fall and Resurrection of Infinitesimals" (Extended version of lectures of September 10 and 13, 1984, at Dansk Matematisk Forening, Copenhagen, and at IMFUFA), *Tekst IMFUFA*, Nr. 88/1984, str. 1–24, ISSN 0106-6242.

10) — (1986), *Infinitesimalkalkül. Kontinuum und Zahlen – Eine elementare Einführung in die Nichtstandard-Analysis*, Mannheim-Wien-Zürich: Bibliographisches Institut.

11) — (1990), „Frühe Delta-Funktionen. Eine Fallstudie zu den Beziehungen zwischen Nichtstandard-Analysis und mathematischer Geschichtsschreibung" u D. D. Spalt (prir.), *Rechnen mit dem Unendlichen*, Basel: Birkhäuser, str. 23–41.

12) — (1992), „Leibniz's Principle and Omega Calculus" u J.-M. Salanskis & H. Sinaceur (prir.), *Le Labyrinthe du Continu. Colloque de Cerisy*, Paris: Springer-Verlag France, str. 144–154.

13) — (1997), „On the Historical Development of Infinitesimal Mathematics, Part I. The Algorithmic Thinking of Leibniz and Euler", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 104, No. 5, str. 447–455; „Part II. The Conceptual Thinking of Cauchy", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 104, No. 7, str. 654–663.

14) — (1999), *Bernhard Riemann 1826–1866. Turning Points in the Conception of Mathematics*, Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser.

15) — (2000), „Controversies about Numbers and Functions" u E. Grosholz & H. Breger (prir.), *The Growth of Mathematical Knowledge*, Dordrecht-Boston-London: Kluwer/Springer-Science+Business Media, str. 177–198.

16) — (2001), „Curt Schmieden's Approach to Infinitesimals. An Eye-Opener to the Historiography of Analysis" u P. Schuster *et al.* (prir.), *Reuniting the Antipodes – Constructive and Nonstandard Views of the Continuum* (Synthese Library, Vol. 306), Dordrecht: Springer, str. 127–142.

[**200**] LAWRENCE, R. (2023), „Frege, Thomae, and Formalism: Shifting Perspectives", *Journal for the History of Analytical Philosophy*, Vol. 11, No. 2, str. 1–23.

[**201**] LEIBNIZ, G. W.

1) — (1849–1863), *Leibnizens mathematische schriften*, Bd. I–VII (prir. C. I. Gerhardt), Berlin: Verlag von A. Asher & Comp. & Halle: Druck und Verlag von H. W. Schmidt. [= **GM**] [Način navođenja: GM, broj toma, broj stranice]

2) — (1875–1890), *Die philosophischen Schriften und Briefe von Gottfried Wilhelm Leibniz*, Bd. I–VII (prir. C. I. Gerhardt), Berlin: Weidmannsche Buchhandlung. [= **GP**] [Način navođenja: GP, broj toma, broj stranice]

3) — (1923–), *Sämtliche Schriften und Briefe* (Akademie-Ausgabe), Reihe I–VIII, Darmstadt–Leipzig–Berlin–Göttingen–Hannover–Münster–Potsdam: Akademie-Verlag, De Gruyter. [= **A**] [Način navođenja: Leibniz, A, broj serije, broj toma u seriji, broj stranice u tomu]

4) — (2022 –2023–2025), *PHILIUMM. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz Akademie-Ausgabe*, Versions 1–3. Bearbeitet von Sandra Bella, Erik-Jan Bos, Mattia Brancato, Vincenzo De Risi, Siegmund Probst, Elisabeth Rinner, Regina Stuber, Achim Trunk und Charlotte Wahl unter Verwendung von Vorarbeiten von Vincenzo De Risi, Javier Echeverría und der Editionsstellen in Hannover und Münster, hrsg. von der LeibnizForschungsstelle Hannover der Niedersächsischen Akademie der Wissenschaften zu Göttingen beim Leibniz-Archiv der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek. [= **Bella *et al.* 2022**, **Bella *et al.* 2023** & **Bella *et al.* 2025**]

[**202**] LEVI-CIVITA, T.

1) — (1892/93), „Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici“, *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettre ed Arti, Venezia*, S. 7, Vol. 4, str. 1765–1815. [Preštampano u *Opere*, Vol. I, **Levi-Civita 1954a**: 1–39]

2) — (1898), „Sui numeri transfiniti“, *Atti della Reale Accademia dei Lincei, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* (Rendiconti), S. 5, Vol. 7, str. 91–96; Nota II, str. 113–121. [Preštampano u *Opere*, Vol. I, **Levi-Civita 1954b**: 315–329]

3) — (1954), *Opere Matematiche. Memorie e Note, Vol. I: 1893–1900* (Pubblicate a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei), Bologna: N. Zanichelli Editore. Napomena: pri referiranju na prethodno navedene Levi-Civitine radove u disertaciji navodio sam paginaciju iz *Opere*, Vol. I.

[**203**] LEWIS, D. (1991), *Parts of Classes* (with an Appendix by J. P. Burgess, A. P. Hazen & D. Lewis), Oxford: Basil Blackwell.

[**204**] LIETZMANN, W. (1909), *Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher* (sa predgovorom F. Kleina), Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission (Bd. I, Heft I), Leipzig-Berlin: Druck und Verlag von B. G. Teubner.

[**205**] LINNEBO, Ø, SHAPIRO, S. & HELLMAN, G. (2016), „Aristotelian Continua, *Philosophia Mathematica* 24 (2), str. 214–246. [= **Linnebo *et al.* 2016**]

[**206**] LOBRY, C. (2019), *L'analyse non standard en France 1975-1995: une dispute avortée*, Thèse doctorale, Nice: Université Côte d'Azur.

[**207**] LOEB, P. A. (1975), „Conversion from Nonstandard to Standard Measure Spaces and Applications in Probability Theory“, *Transactions of the American Mathematical Society* 211, str. 113–122.

[**208**] LOVE, A. H. E. (1894), „The Principles of Pure Mathematics (Review of G. Veronese, *Grundzüge der Geometrie*, Leipzig: Teubner, 1894)“, *Nature*, Vol. 50, No. 1299, str. 493–494.

[**209**] LÖWENHEIM, L. (1915), „Über Möglichkeiten in Relativkalkül“, *Math. Ann*. 76, str. 447–470.

[**210**] LUČIĆ, Z.

1) — (1997), *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Beograd: Total Design i Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu.
2) — (2025), *Pitagorejska aritmetika* (Matematički vidici, Knj. 9), Beograd: Matematički institut SANU.

[**211**] LURIE, S. Y. [Лурье С. Я.] (1945), *Архимед*, Москва–Ленинград: Издательство Академии наук СССР.

[**212**] LUXEMBURG, W. A. J.

1) — (1962), „*Non-standard Analysis, Lectures on A. Robinson's Theory of Infinitesimal and Infinitely Large Numbers*“, Pasadena: Caltech Bookstore.
2) — (1973), „What is Nonstandard Analysis?“, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 80, No. 6, Pt. 2, str. 38–67.
3) — (1975), „Nichtstandard-Zahlsysteme und die Begründung des Leibnizschen Infinitesimalkalküls“, *Jahrbuch Überblicke Mathematik* (za 1975. godinu), Mannheim: Bibliographisches Institut, str. 31–44.
4) — (1990), „Robinson's Nonstandard Analysis and its Infiuence on Mathematics“ u D. D. Spalt (prir.), *Rechnen mit dem Unendlichen*, Basel: Birkhäuser, str. 13–21.

[**213**] MAJCEN, J.

1) — (1906), „Prilog centralnoj projekciji prostora sa četiri dimenzije“, *Rad JAZU*, Knj. 165, Matematičko-prirodoslovni razred 39, str. 81–93.
2) — (1910), „Temelji hipoteza i matematičkih metoda za geometriju prostora sa četiri dimensije i više njih“, *Rad JAZU*, Knj. 181, Matematičko-prirodoslovni razred 47, str. 209–324.

[**214**] MAJER, U. (2010), „The Hilbert Edition: What is it and what is it good for?“, *Philosophia Scientiæ* 14 (1), Varia, str. 141–152.

[**215**] MALCEV, A. I. [Мальцев, А. И.] (1936), „Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik“, Recueil Mathématique (Nouvelle série) [= *Математический сборник*], Vol. 1(43: 3), str. 323–336.

[**216**] MANCOSU, P, JØRGENSEN, K. F. & PEDERSEN, S. A. (prir.) (2005), *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, Dordrecht: Springer.

[**217**] MANCOSU, P. (prir.) (2008), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford: Oxford University Press.

[**218**] MANDELBROT, B. (1983), *Fractal Geometry of Nature*, New York: W. H. Freeman & Co.

[**219**] MARCHISOTTO, E. A, RODRÍGUEZ-CONSUEGRA, F. & SMITH, J. T. (2021), *The Legacy of Mario Pieri in Foundations and Philosophy of Mathematics*, Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser. [= **Marchisotto *et al.* 2021**]

[**220**] MARCHISOTTO, E. A. & SMITH, J. T. (2007), *The Legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic*, Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser.

[**221**] MARTIN, G. E. (1975), *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*, New York: Springer.

[**222**] MASSAZA, C. (1971), „On the completion of ordered fields“, *Πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών* (*Prakt. Akad. Ath.*) 45, str. 174–178.

[**223**] MAU, J. (1954), *Zum Problem des Infinitesimalen Bei den Antiken Atomisten*, Berlin: Akademie-Verlag.

[**224**] MCCARTY, C. (2021), „What Is a Number? Continua, Magnitudes, Quantities“ u S. Shapiro & G. Hellman (prir.), *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives*, Oxford: Oxford University Press, Ch. 11, str. 283–298.

[**225**] MCCLEARY, J. (1989), „A Theory of Reception for the History of Mathematics“ u D. E. Rowe & J. McCleary (prir.), Ideas and their Reception, Proceedings of the Symposium on the History of Modern Mathematics, Vol. I, Boston-San Diego-New York-etc: Academic Press, Harcourt Braće Jovanovich, Publishers.

[**226**] MEHRTENS, H.

1) — (1976), „T. S. Kuhn's theories and mathematics: A discussion paper on the 'new historiography' of mathematics“, *Hist, math.* 3 (3), str. 297–320.

2) — (1990), *Moderne–Sprache–Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme*, Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag.

[**227**] MESCHKOWSKI, H. (1965), „Aus den Briefbüchern Georg Cantors“, *Arch. Hist. Exact Sci.* 2, str. 503–519.

[**228**] MIJAJLOVIĆ, Ž, ARANĐELOVIĆ, D, RAŠKOVIĆ, M. & ĐORĐEVIĆ, R. [= Mijajlović *et al.*] (2014), *Nestandarna analiza*, Beograd: Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu.

[**229**] MITTAG-LEFFLER, G. (prir.) (1923), „Briefe von K. Weierstrass an Paul du Bois-Reymond“, *Acta Math.* 39, str. 199–225.

[**230**] MOLTMANN, F. (2017), „Number words as number names“, *Linguistics and Philosophy* 40, str. 331–345.

[**231**] MOORE, E. H.

1) — (1896), „Tactical Memoranda I–III“, *American Journal of Mathematics*, Vol. 18, No. 3, str. 264–290. V. takođe i „Tactical Memoranda I–III, (Continued)“, *American Journal of Mathematics*, Vol. 18, No. 4, str. 291–303.

2) — (1902), „On the Projective Axioms of Geometry“, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 3, No. 1, str. 142–158.

3) — (1903), „On the Foundations of Mathematics“, Presidential address delivered before The American Mathematical Society, December 29, 1902, *Science*, New Series, Vol. 17, No. 428, str. 401–416.

[**232**] MOORE, M. E. (2002), „A Cantorian Argument against Infinitesimals“, *Synthese*, Vol. 133, No. 3, str. 305–330.

[**233**] MORGANTI, M. & TAHKO, T. (2017), „Moderately naturalistic metaphysics“, *Synthese* 194, str. 2557–2580.

[**234**] MORMANN, T. & KATZ, M. (2013), „Infinitesimals as an Issue of Neo-Kantian Philosophy of Science“, *HOPOS: The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science*, Vol. 3, No. 2, str. 136–280.

[**235**] NAGEL, E. (1939), „The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry“, *Osiris*, Vol. 7, str. 142–223.

[**236**] NAHUEL GOOS, D. (2025), „The Grandeur and the Sorrow behind the Birth of Set Theory, and the Emergence of the Dedekind Letters“, *Phlogiston* 33, str. 39–92.

[**237**] NASTASI, P. & TAZZIOLI, R. (2005), „Toward a scientific and personal biography of Tullio Levi-Civita (1873–1941)“, *Hist. Math.* 32 (2), str. 203–236.

[**238**] NATORP, P. (1910), Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, Leipzig-Berlin: Teubner.

[**239**] NEDER, L. (1941/43), „Modell einer Leibnizischen Differentialrechnung mit aktual unendlich kleinen Größen sämtlicher Ordnungen“. *Math. Ann.* 118, str. 718–732.

[**240**] NETZ, R, SAITO, K. & TCHERNETSKA, N.

1) — (2001), „A New Reading of *Method* Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest (Part 1)“, *SCIAMVS* 2, str. 9–29.

2) — (2002), „A New Reading of Method Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest (Part 2)“, *SCIAMVS* 3, str. 109–125.

[**241**] NEUMANN, B. H. (1949), „On Ordered Division Rings“, *Transactions of the American Mathematical Society* 66 (1), str. 202–252.

[**242**] NEURATH, O, HAHN, H. & CARNAP, R. (1929), „WissenschaftlicheWeltauffassung. Der Wiener Kreis“, *Veröffentlichungen des Vereines Ernst Mach* (hrsg. vom Verein E. Mach), Wien: Artur Wolf Verlag.

[**243**] NEWSTEAD, A. (2001), „Aristotle and Modern Mathematical Theories of the Continuum“ u D. Sfendoni-Mentzou *et al.* (prir.), *Aristotle and Contemporary Science*, Frankfurt: Peter Lang, str. 113–129.

[**244**] NICHOLSON, J. (1993), „Otto Hölder and the development of group theory and Galois theory“, PhD Thesis, Oxford: University of Oxford.

[**245**] NICOD, J. (1924), *La géométrie dans le monde sensible*, Paris: Felix Alcan.

[**246**] NYE, M. J.

1) — (1993), „National Styles? French and English Chemistry in the Nineteenth and Early Twentieth Centuries“, *Osiris*, Vol. 8, *Research Schools: Historical Reappraisals*, str. 30–49.

2) — (prir.) (2002), *The Cambridge History of Science, Vol. 5: The Modern Physical and Mathematical Sciences*, Cambridge: Cambridge University Press.

[**247**] OTTE, M. & PANZA, M. (prir.) (1997), *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy*, Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers.

[**248**] OTTE, M. (1989), „The ideas of Hermann Grassmann in the context of the mathematical and philosophical tradition since Leibniz“, *Hist. Math.* 16 (1), str. 1–35.

[**249**] OWEN, G. E. L. (1957), „Zeno and the Mathematicians“, *Proceedings of the Aristotelian Society, New Series*, Vol. 58, str. 199–222.

[**250**] PALATINI, F. (1904), „I principi della geometria esposti secondo il metodo del prof. Veronese“, *Giornale di Matematiche* 42, 149–185.

[**251**] PALMERINO, C. R. (2011), „The Isomorphism of Space, Time and Matter in Seventeenth-century Natural Philosophy“, *Early Science and Medicine*, Vol. 16, No. 4, str. 296–330.

[**252**] PAMBUCCIAN, V. (2014), „Review: Cantù, Paola. *Giuseppe Veronese and the foundations of geometry*. (*Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria*)“, Zbl 1158.51300: LINK.

[**253**] PARSHALL, K. H. & ROWE, D. (1994), *The Emergence of the American Mathematical Research Community, 1876–1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore*, HMATH, Vol. 8, Providence: American Mathematical Society & London: London Mathematical Society.

[**254**] PARSHALL, K. H. (1996), „How We Got Where We Are: An International Overview of Mathematics in National Contexts (1875-1900)“, *Notices of the AMS*, Vol. 43, No. 3, str. 287–296.

[**255**] PASCH, M.

1) — (1882), *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig: Teubner.
2) — (1914), *Veränderliche und Funktion*, Leipzig: Teubner.
3) — (1917), „Grundfragen der Geometrie“, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 147, str. 184–190.
4) — (1921), „Die Begründung der Mathematik und die implizite Definition. Ein Zusammenhang mit der Lehre vom Als-Ob“, *Annalen der Philosophie* Bd. 2, H. 2, str. 145–162.
5) — (1923a), „Die Begriffswelt des Mathematikers in der Vorhalle der Geometrie“, *Annalen der Philosophie* Bd. 3, H. 2, str. 155–187.
6) — (1923b), „Der Starre Körper in Der Geometrie“, *Annalen der Philosophie* Bd. 3, H. 2, str. 188–199.
7) — (1923c), „Physikalische und mathematische Geometrie“, *Annalen der Philosophie* Bd. 3, H. 3, str. 362–374.
8) — (1925), „Die axiomatische Methode in der neueren Mathematik“, *Annalen der Philosophie* 5, str. 241–274.
9) — (1926/1976), *Vorlesungen über die neuere Geometrie* (Zweite Auflage, mit einem Anhang: Max Dehn, „Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung“) (reprint), Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

[**256**] PEACOCK, G. (1830), *A Treatise on Algebra*, Cambridge: J. & J. J. Deighton.

[**257**] PEANO, G.

1) — (1888), *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Hermann Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino: Ed. Frat. Bocca.
2) — (1889), *I principii di geometria logicamente esposti*, Torino: Fratelli Bocca Editori.
3) — (1889a), *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Torino: Ed. Frat. Bocca.
4) — (1890), „Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane“ , *Math. Ann.* 36, str. 157–160.
5) — (1891a), „Osservazioni del Direttore sull'articolo precedente“ (osvrt na Segre 1891), *Rivista di Matematica* 1, str. 66–69.
6) — (1891b), „Risposta“ (a una Dichiarazione di Corrado Segre), *Rivista di Matematica* 1, str. 156–159.

7) — (1891c), „Lettera aperta al Prof. Giuseppe Veronese“, *Rivista di Matematica* 1, str. 267–269.

8) — (1892a), „Dimostrazione dell'impossibilità di segmenti infinitesimi costanti“, *Rivista di Matematica* 2, str. 58–62.

9) — (1892b), „Recensione: Giuseppe Veronese, Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, ecc., Padova, 1891, pag. XLVIII-630“, *Rivista di Matematica* 2, str. 143–144.

10) — (1894), „Sui fondamenti della Geometria“, *Rivista di Matematica* 4, str. 51–90.

11) — (1898), „Analisi della teoria dei vettori“, *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, Vol. 33 (Adunanza del 13 Marzo 1898), str. 513–534.

12) — (1903), „Principio de permanentia: exercitio de latino recto“, *Rivista di Matematica* 3, str. 84–87.

13) — (1910), „Sugli ordini degli infiniti“, Atti della Reale Accademia dei Lincei (Rendiconti; 16 Giugno 1910), S. 5, Vol. 19, str. 778–781.

14) — (1911), „Le definizioni in matematica“, *Arxivs de l'Institut de ciencies* (Barcelona, Institut d'Estudis Catalans), Vol. 1, str. 49–70.

15) — (1913), „Derivata e differenziale“, Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino (Adunanza del 17 Novembre 1912), Vol. 48, str. 47–69.

16) — (1957–1958–1959), *Opere scelte*, Vol. I–III, Roma: Edizioni Cremonese.

[**258**] PECKHAUS, V. (1994), „Benno Kerry. Beiträge zu seiner Biographie“, *History and Philosophy of Logic* 15 (1), str. 1–8.

[**259**] PEIFFER-REUTER, R. (1987), „La limitation de l'illimité et la finitude de l'infini“, *Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, Fascicule 14, str. 1–13. [NUMDAM LINK]

[**260**] PEIRCE, C. S.

1) — (1900), „Infinitesimals“, *Science* (16 March 1900), Vol. 11, Iss. 272, str. 430–433.

2) — (1976), *The New Elements of Mathematics* (prir. C. Eisele), Vol. III/1, Mathematical Miscelanea, The Hague-Paris: Mouton Publishers & New Jersey: Humanities Press.

3) — (2010), *Philosophy of Mathematics: Selected Writings* (prir. M. E. Moore), Bloomington-Indianapolis: Indiana University Press.

[**261**] PETRI, B. & SCHAPPACHER, N. (2007), „On Arithmetization“ u C. Goldstein *et al.* (prir.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, Ch. V.2, str. 343–374.

[**262**] PETRONIEVICS, B.

1) — (1904), *Principien der Metaphysik, Bd. I (Allgemeine Ontologie und die formalen Kategorien) mit einem Anhang: Elemente der neuen Geometrie*, Heidelberg: Carl Winters Universitätsbuchhandlung.

2) — (1907), *Die typischen Geometrien und das Unendliche*, Heidelberg: Carl Winters Universitätsbuchhandlung.

3) — (1908), „Selbstanzeige: *Die typischen Geometrien und das Unendliche*“, *Kant Studien*, Bd. 13, Heft 1–3, str. 158–159.

4) — (1917), „Sur les nombres infinis de Fontenelle“, *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, Vol. XXVI, str. 309–316.

5) — (1929), „N. Lobatschewsky et J. Bolyai. Etude comparative d'un cas special d'inventeurs simultanés", *Revue philosophique de la France et de l'Étranger*, T. 108, str. 190–214.

6) — (1934), „Über Leibnizens Methode der direkten Differentiation", *Isis*, Vol. XXII, str. 69–76.

7) — (1937), *Résumé des travaux philosophiques et scientifiques de B. Petronievics* (*Bulletin de l'Académie des Lettres*, № 2), Belgrade: Académie Royal Serbe.

[**263**] PETRONIJEVIĆ, B.

1) — (1929a), „Kritičke primedbe na Fontenelovu teoriju beskrajnih brojeva", *Glas SKA*, Knj. CXXXIV; objavljeno i kao separat, Beograd: Grafički zavod „Makarije", str. 1–16.

2) — (1951), *Geometriska ispitivanja iz teorije paralelnih linija od N. I. Lobačevskog* (preveo i napomene dodao B. Petronijević; drugo, prošireno izdanje), Klasični naučni spisi Matematičkog instituta SAN, Beograd: Narodna knjiga i Štamparija i knjigoveznica Srpske akademije nauka.

3) — (1998), *Izabrana dela Branislava Petronijevića, Tom 12. Autobiografija, pesme, prepiska*, Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

[**264**] PIERPONT, J. (1904), „The history of mathematics in the nineteenth century" (Address delivered before the Department of Mathematics of the International Congress of Arts and Science, St. Louis, September 20, 1904), *Bulletin of the American Mathematical Society* 11, str. 136–159.

[**265**] POGONOWSKI, J. (2021), „Mathematics is the Logic of the Infinite": Zermelo's Project of Infinitary Logic", *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric* 66 (3), str. 673–708.

[**266**] POINCARÉ, H.

1) — (1882), „Théorie des groupes fuchsiens", *Acta Mathematica* 1, str. 1–62.

2) — (1893), „Le continu mathématique", *Revue de métaphysique et de morale*, T. 1, str. 26–34.

3) — (1898), „L'Oeuvre mathématique de Weierstraß", *Acta Math.* 22, str. 1–18.

4) — (1898a), „On the Foundations of Geometry", *The Monist* 9 (1), str. 1–43.

5) — (1902a), *La Science et l'Hypothèse*, Paris: E. Flammarion.

6) — (1902b), „Les fondements de la géométrie – *Grundlagen der Geometrie* par M. Hilbert", *Bulletin des sciences mathématiques*, S. 2, T. 26, str. 249–272.

7) — (1902c), „Les fondements de la géométrie – *Grundlagen der Geometrie* par M. Hilbert", *Journal des savants* (Mai 1902), str. 252–271.

8) — (1903a), „Poincaré's review of Hilbert's *Foundations of Geometry*", *letin of the American Mathematical Society*, Vol. 10, Iss. 1, str. 1–23.

9) — (1903b), „Extrait d'une lettre de M. H. Poincaré", *Bulletin des sciences mathématiques*, S. 2, T. 27, str. 115.

10) — (1904), „Rapport sur les travaux de M. Hilbert", *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan*, T. 14, str. 10–48.

11) — (1908), „L'avenir des mathématiques", *Revue générale des sciences pures et appliquées*, T. 19, str. 930–939.

12) — (1909), „L'avenir des mathématiques", *Atti del 4° Congresso internazionale dei Matematici* (prir. G. Castelnuovo), Roma: Tipografia della R . Accademia dei Lincei, 1909, Vol. I, str. 167–182.

13) — (1911a), „Prix Bolyai: procès verbal des Séances de la Commission internationale de 1910. Rapport de M. Henri Poincaré", Budapest: Magyar Tudományos Akadémia/Imprimerie de la Société Franklin, str. 1–39 (separat).

14) — (1911b), „Prix Bolyai: procès verbal des Séances de la Commission internationale de 1910. Rapport de M. Henri Poincaré", *Bulletin des sciences mathématiques*, S. 2, T. 31, str. 67–100.

15) — (1911c), „Prix Bolyai: procès verbal des Séances de la Commission internationale de 1910. Rapport de M. Henri Poincaré", *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, S. 1, Vol. 31, str. 109–132.

16) — (1912), „Prix Bolyai: procès verbal des Séances de la Commission internationale de 1910. Rapport de M. Henri Poincaré", *Acta Math.* 35, str. 1–28.

[**267**] POLLARD, S. (prir.) (2010), *Essays on the Foundations of Mathematics by Moritz Pasch*, Dordrecht: Springer.

[**268**] POPOVIĆ, S.

1) — (2015), *Aristotel o ontološkom statusu geometrijskih objekata*, diplomski rad, Beograd: Filozofski fakultet Univerziteta u Beogradu. COBISS.SR-ID 526005399.

2) — (2016), *O jednoj zaboravljenoj alternativi Kantor-Dedekindovoj teoriji kontinuuma : Infinitezimalizam od Lajbnica do osnivača nearhimedovske geometrije*, magistarski rad, Beograd: Filozofski fakultet Univerziteta u Beogradu. COBISS.SR-ID 527746455.

3) — (2020), „Reality, Fundamentality, Grounding (and Cognate Notions)", *Theoria* 63 (3), str. 105–124.

[**269**] PRIEß-CRAMPE, S. H. G. (1983), *Angeordnete Strukturen, Gruppen, Körper, projektive Ebenen*, Berlin: Springer-Verlag.

[**270**] PROBST, S. (2018), „The Calculus" u M. R. Antognazza (prir.), *The Oxford Handbook of Leibniz*, Oxford: Oxford University Press, Ch. 11, str. 211–224.

[**271**] PROCLUS (1873), *Procli Diadochi In primum Euclidis Elementorum librum commentarii* (ex recognitione G. Friedlein), Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana, Leipzig: B. G. Teubner.

[**272**] PROIETTI, C. (2008), „Natural Numbers and Infinitesimals: A Discussion between Benno Kerry and Georg Cantor", *History and Philosophy of Logic* 29 (4), str. 343–359.

[**273**] PURKERT, W. & ILGAUDS, H. J. (1985), *Georg Cantor 1845–1918*, Vita Mathematica, Basel: Birkhäuser.

[**274**] QUINE, W. V. O.

1) — (1948), „On What There Is", *The Review of Metaphysics. A Philosophical Quarterly*, Vol. 2, No. 5, str. 21–38.

2) — (1968), „Ontological Relativity", *The Journal of Philosophy*, Vol. 65, No. 7, str. 185-212.

3) — (1969), „Existence and Quantification" u W. V. O. Quine, *Ontological Relativity and Other Essays*, New York-London: Columbia University Press, Ch. 4, str. 91–113.

4) — (2013), *Word and Object* (New Edition), Cambridge, MA & London: The MIT Press.

[**275**] RAŠKOVIĆ, M. & IKODINOVIĆ, N. (2010), *Priče o malim i velikim brojevima. O brojanju, merenju, zaključivanju...*, Beograd: Matematički institut SANU, Zavod za udžbenike i Društvo matematičara Srbije.

[**276**] RAŠKOVIĆ, M. (1983), *Logike sa merom u Lajbnicovom univerzumu*, doktorska disertacija, Beograd: Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu.

[**277**] RICHMOND, H. W. (1900), „The figure formed from six points in space of four dimensions", Math. Ann. 53, str. 161–176.

[**278**] RIEMANN, B.

1) — (1854/1867), „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" (Mitgetheilt durch R. Dedekind), *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Bd. 13, str. 133–152.
2) — (2016), *On the Hypotheses Which Lie at the Bases of Geometry* (prir. J. Jost, kritičko izdanje), Cham: Birkhäuser. [= **Jost 2016**]

[**279**] ROBINSON, A.

1) — (1961), „Non-Standard Analysis", *Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Amsterdam Proc*, Ser. A64 = *Indagationes Mathematicae*, Vol. 64, str. 432–440. [preštampano u *Selected Papers of Abraham Robinson, Vol. II*, Luxemburg & Körner 1979: 3–11]
2) — (1963), *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, Amsterdam: North Holland Publishing Company.
3) — (1966), *Non-Standard Analysis*; Amsterdam: North Holland Publishing Company.
4) — (1966a), „Formalism 64" u Y. Bar-Hillel (prir.), *Logic, Methodology, and Philosophy of Science: Proceedings of the 1964 International Congress* (Jerusalem, August 26–September 2, 1964), Amsterdam: North Holland Publishing Company, str. 228–246.
5) — (1968), „Some Thoughts on the History of Mathematics", *Compositio Mathematica* 20, str. 188–193. [preštampano u *Selected Papers of Abraham Robinson, Vol. II*, Luxemburg & Körner 1979: 568–574]
6) — (1969), „From a formalist's point of view", *Dialectica*, Vol. 23, No. 1, str. 45–49.
7) — (1975), „Concerning Progress in the Philosophy of Mathematics", *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* 80, str. 41–52. [preštampano u *Selected Papers of Abraham Robinson, Vol. II*, Luxemburg & Körner 1979: 556–567]
8) — (1979), *Selected Papers of Abraham Robinson* (prir. H. J. Keisler, S. Körner, W. A. J. Luxemburg & A. D. Young), *Vol. I: Model Theory and Algebra* (prir. i predgovor napisao H. J. Keisler) [= **Keisler 1979**] i *Vol. II: Nonstandard Analysis and Philosophy* (prir. W. A. J. Luxemburg & S. Körner) [= **Luxemburg & Körner 1979**], Amsterdam-New York-London: North Holland Publishing Company.

[**280**] ROEPER, P.

1) — (1997), „Region-Based Topology", *Journal of Philosophical Logic* 26, str. 251–309.
2) — (2006), „The Aristotelian Continuum. A Formal Characterization", *Notre Dame J. Formal Logic* 47 (2), str. 211–232.

[**281**] ROLLET, L. & NABONNAND, P. (2003), „An Answer to the Growth of Mathematical Knowledge? The Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques", *EMS Newsletter* 47, str. 9–14.

[**282**] ROWE, D.

1) — (2002), „Mathematical Schools, Communities, and Networks“ u M. J. Nye (prir.), *The Cambridge History of Science, Vol. 5: The Modern Physical and Mathematical Sciences*, Cambridge: Cambridge University Press, Ch. 6, str. 113–132.
2) — (2018), „An Enchanted Era Remembered: Interview with Dirk Jan Struik“ u D. E. Rowe, *A Richer Picture of Mathematics. The Göttingen Tradition and Beyond*, Cham: Springer Nature, str. 379–391.
3) — (2025), *Felix Klein. The Erlangen Program*, Cham: Birkhäuser.

[**283**] ROYCE, J. (1900), *The World and the Individual* (Gifford Lectures), First Series, The Four Historical Conceptions of Being, New York: The MacMillan Company.

[**284**] RUFFINI, E. (1926), *Il metodo d'Archimede e le origini dell'analisi infinitesimal nell'antichità* (sa predgovorom F. Enriquesa), Roma: Casa Editrice Alberto Stock.

[**285**] RUSSELL, B.

1) — (1897), *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge: at the University Press.
2) — (1901), „Recent Work on the Principles of Mathematics“, *International Monthly*, Vol. 4 (July–December 1901), str. 83–101. [preštampano u Moore 1993, Ch. 10, str. 363–379]
3) — (1903), *The Principles of Mathematics*, Cambridge: at the University Press.
4) — (1917), „Mathematics and the Metaphysicians“ u M*ysticism and Logic and Other Essays*; London: George Allen & Unwin Ltd., Ch. 5, str. 74–96.
5) — (1919), *Introduction to Mathematical Philosophy*, London: G. Allen & Unwin.
6) — (1993), *The Collected Papers of Bertrand Russell, Vol. 3. Toward the „Principles of Mathematics“, 1900–02* (prir. G. H. Moore), London-New York: Routledge. [= **Moore 1993**]
7) — (2009), *The Autobiography of Bertrand Russell*, London-New York: Routledge.

[**286**] SAUER, T. & SCHOLL, R. (prir.) (2016), *The Philosophy of Historical Case Studies*, Cham: Springer Switzerland.

[**287**] SAUER, W. (2014), „Metaphysics EZHΘ: Aristotle's Unified Treatise περὶ τῆς οὐσίας καὶ τοῦ ὄντος, *de Essentia et de Ente*“, *Belgrade Philosophical Annual*, Vol. XXVII, str. 93–111.

[**288**] SCANLAN, M. (1991), „Who were the American Postulate Theorists?“, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 56, No. 3, str. 981–1002.

[**289**] SCHEIBE, E. (2006), *Die Philosophie der Physiker*, München: Verlag C.H.Beck (drugo izdanje, 2012).

[**290**] SCHLIMM, D.

1) — (2010), „Pasch's Philosophy of Mathematics“, *The Review of Symbolic Logic* 3 (1), str. 93–118.
2) — (2020), „Pasch's Empiricism as Methodological Structuralism“ u E. H. Reck & G. Schiemer (prir.), *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, New York: Oxford University Press, Ch. 4, str. 88–105.

[**291**] SCHMIEDEN, K. & LAUGWITZ, D. (1958), „Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung“, *Mathematische Zeitschrift* 69, str. 1–39.

[**292**] SCHOLZ, E.

1) — (1982), „Herbart's influence on B. Riemann“, *Hist. Math.* 9, str. 413–440.

2) — (1995), „Hermann Weyl's 'Purely Infinitesimal Geometry'" u S. D. Chatterji (prir.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Zürich, August 3–11, 1994), Basel: Birkhäuser, str. 1592–1603.

[**293**] SCHÖNFLIES, A.

1) — (1897a), „Sur les nombres transfinis de Mr. Veronese", *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, S. 5, V. 6, str. 362–368.

2) — (1897b), „Transfinite Zahlen, das Axiom des Archimedes und die projective Geometrie", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 5, str. 75–81.

3) — (1898), „Mengenlehre" u *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Bd. 1: Arithmetik und Algebra, erster Teil (redigiert von W. F. Meyer), Odeljak **I A 5**, Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner, str. 184–207.

4) — (1900), *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Teil I, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8 (separat), str. i–vi + 1–250, Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner.

5) — (1906), „Über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter (nicht archimedischer) Maßbestimmung", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 15, str. 26–41.

6) — (1908), *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, Bericht, Teil II, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Ergänzungsband 2, str. 1–331, Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner.

7) — (1927), „Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen", *Acta Mathematica* 50, str. 1–23.

[**294**] SCHUBERT, H. (1899), *Elementare Arithmetik und Algebra*, Leipzig: G. J. Göschensche Verlagshandlung.

[**295**] SCHUBRING, G.

1) — (2005), *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century France and Germany*, New York: Springer Verlag.

2) — (2016), „Comments on a Paper on Alleged Misconceptions Regarding the History of Analysis: Who Has Misconceptions?", *Foundations of Science* 21 (3), str. 527–532.

3) — (2017), „Searches for the origins of the epistemological concept of model in mathematics", *Arch. Hist. Exact Sci.* 71, str. 245–278.

[**296**] SCHUR, F.

1) — (1898), „Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie", *Math. Ann.* 51, str. 401–409.

2) — (1901), „Über die Grundlagen der Geometrie", *Math. Ann.* 55, str. 265–292.

3) — (1909), *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner.

[**297**] SCOTT, D. (1969), „On Completing Ordered Fields" u W. A. J. Luxemburg (prir.), *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability*, New York etc: Holt, Reinhart & Winston, str. 274–278.

[**298**] SCRIBA, C. J. & SCHREIBER, P. (2015), *5000 Years of Geometry: Mathematics in History and Culture*, Basel: Birkhäuser.

[**299**] SEGRE, C.

1) — (1891), „Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche“, *Rivista di Matematica* 1, str. 42–66. Napomena: u disertaciji je korišćena paginacija iz Segre, C. (1963), *Opere*, Vol. IV (a cura della Unione Matematica Italiana), Roma: Edizione Cremonese, str. 387–412.
2) — (1891a), „Una dichiarazione“, *Rivista di Matematica* 1, str. 154–156.
3) — (1921), „Mehrdimensionale Räume“, *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. III, 2. Teil, 2. Hälfte, Heft 7, str. 769–972.

[**300**] SERVOS, J. W. (1993), „Research Schools and Their Histories“, *Osiris*, Vol. 8, *Research Schools: Historical Reappraisals*, str. 2–15.

[**301**] SEVERI, F. (1957), „Prefazione“ u *Opere* di C. Segre, Vol. I a cura della Unione Matematica Italiana), Roma: Edizione Cremonese, str. v–xii.

[**302**] SEXTUS EMPIRICUS (1936), *Against Physicists. Against Ethicists* (uporedni grčki i engleski tekst, prev. R. G. Bury), Loeb Classical Library 311, Cambridge, MA: Harvard University Press.

[**303**] SHAMSEDDINE, K. & BERZ, M.

1) — (2003), „Measure Theory and Integration on the Levi-Civita Field“, *Contemporary Mathematics* 319, str. 369–387.
2) — (2010), „Measure Theory and Integration on the Levi-Civita Field“, *Contemporary Mathematics* 508, str. 215–237.

[**304**] SHAPIRO, S. & HELLMAN, G.

1) — (2017), „Frege Meets Aristotle: Points as Abstracts“, *Philosophia Mathematica* 25 (1), str. 73–90.
2) — (prir.) (2021), *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives*, Oxford: Oxford University Press.

[**305**] SHAPIRO, S.

1) — (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford-New York: Oxford University Press.
2) — (prir.) (2005), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford: Oxford University Press.

[**306**] SIEGMUND-SCHULTZE, R.

1) — (2022), „From Lattices to Social History to Theories of Modernity in Mathematics: A biographical essay for Herbert Mehrtens (1946–2021)“, *Hist. math.* 58, str. 17–34.
2) — (2024), „Two contrasting and complementary views of Göttingen: letters from the first female Norwegian Ph.D. in mathematics, Elizabeth Stephansen, to her compatriot Carl Størmer in the winter semester of 1902/3“, *British Journal for the History of Mathematics* 39 (2), str. 77–100.

[**307**] SIMON, M.

1) — (1906), *Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im 19. Jahrhundert*, Bericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner.
2) — (1909), „Historische Bemerkungen über das Continuum, den Punkt und die gerade Linie“, *Atti del 4° Congresso internazionale dei Matematici* (prir. G. Castelnuovo), Roma: Tipografia della R . Accademia dei Lincei, 1909, Vol. III, str. 385–390.

[**308**] SINACEUR, H.

1) — (1994), „Calculation, Order and Continuity“ u P. Ehrlich (prir.), *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers – Springer Science+Business Media, str. 191–206.

2) — (2006), „From Kant to Hilbert: French philosophy of concepts in the beginning of the twentieth century“ u J. Ferreirós & J. Gray (prir.), *The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosophy*, Oxford: Oxford University Press, str. 311–337.

[**309**] SINKEVICH, G. I. [Синкевич, Г. И.]

1) — (2016), „История методов сходящихся последовательностей и вложенных отрезков“, История науки и техники, № 13, str. 3–14.

2) — (2017), „On the History of Nested Intervals: From Archimedes to Cantor“, *Gaṇita Bhārati* 39 (1), str. 23–45.

[**310**] SKOLEM, T.

1) — (1920), „Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen“, *Skrifter utgitt av Videnskapsselskapet i Kristiania*, Matematisk-naturvidenskabelig Klasse 6, str. 1–36.

2) — (1922), „Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre“, *Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem 5. Kongress der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors* 4, str. 217–232.

3) — (1934), „Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen“, *Fundamenta Mathematicae* 23 (1), str. 150–161.

[**311**] SLEMBEK, S. (2007), „On the Arithmetization of Algebraic Geometry“ u J. Grey & K. H. Parshall (prir.), *Episodes in the History of Modern Algebra* (1800–1950), History of Mathematics, Vol. 32, Providence & London: A co-publication of the AMS and LMS, Ch. 12, str. 285–300.

[**312**] SMITH, W. B. (1912), „Henri Poincaré: An Appreciation“, *The Monist*, Vol. 22, No. 4, str. 615–617.

[**313**] SOCHOR, A. (1993), „Complexity of the axioms of the alternative set theory“, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 34 (1), str. 33–45.

[**314**] SOMMERVILLE, D. M. Y. (1911), *Bibliography of non-Euclidean geometry, including The Theory of Parallels, the Foundations of Geometry, and Space of n Dimensions*, London: Harrison & Sons.

[**315**] STÄCKEL, P. & ENGEL, F. (1895), *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie*, Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner.

[**316**] STANKOVIĆ, M. (2012), *Ekvivalentni oblici aksiome neprekidnosti skupa realnih brojeva*, master rad, Beograd: Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, LINK.

[**317**] STOLZ, O. & GMEINER, J. A.

1) — (1902), *Theoretische Arithmetik* (I. Abtheilung. Allgemeines. Die Lehre von den rationalen Zahlen. Zweite umgearbeitete Auflage der *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik* von O. Stolz), Leipzig: Teubner

2) — (1915), *Theoretische Arithmetik* (II. Abtheilung. Die Lehren von den reelen und von den complexen Zahlen. Zweite umgearbeitete auflage der *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik* von O. Stolz), Leipzig: Teubner.

[**318**] STOLZ, O.

1) — (1881), „B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung", *Math. Ann.* 18, str. 255–279.

2) — (1883), „Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes", *Math. Ann.* 22, str. 504–519.

3) — (1884), „Die unendlich kleinen Grössen", *Berichte des Naturwissenschaftlich-Medizinischen Vereines in Innsbruck* 14, str. 21–43.

4) — (1885), *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik, Erster Theil: Allgemeines und Arithhmetik der Reelen Zahlen*, Leipzig: Teubner.

5) — (1888), „Ueber zwei Arten von unendlich kleinen und von unendlich grossen Grössen", *Math. Ann.* 31, str. 601–604.

6) — (1891a), „Ueber das Axiom des Archimedes", *Math. Ann.* 39, str. 107–112.

7) — (1891b), *Grössen und Zahlen* (Rede bei Gelegenheit der feierlichen Kundmachung der gelösten Preisaufgaben am 2. März 1891), Leipzig: Teubner.

[**319**] STRAUMANN, N. (2011), „On the first Solvay Congress in 1911", *The European Physical Journal H*, Vol. 36, str. 379–399.

[**320**] STROLL, A. (1988), *Surfaces*, Minneapolis: University of Minnesota Press.

[**321**] STROYAN, K. D. & LUXEMBURG, W. A. J. (1976), *Introduction to the Theory of Infinitesimals*, New York-San Francisco-London: Academic Press (A Subsidiary of Harcourt Braće Jovanovich).

[**322**] STRUIK, D. J. (1981), *Matematica: un profilo storico* (prir. U. Bottazzini), Bologna: Il Mulino.

[**323**] SZÉNÁSSY, B. (1995), „Contributions to the History of the Bolyai-Prize", *Természet Világa* 124, str. 291–294.

[**324**] ŠIKIĆ, Z.

1) — (1989), *Kako je stvarana novovjekovna matematika*, Zagreb: Školska knjiga.

2) — (2023), „Wignerov problem i realni brojevi", beleške sa predavanja održanog na Seminaru za istoriju i filozofiju matematike, mehanike i astronomije Matematičkog instituta SANU u Beogradu 17.10.2023. godine.

[**325**] TAHKO, T.

1) — (2012), „Introduction" u T. Tahko (prir.), *Contemporary Aristotelian Metaphysics*, Cambridge: Cambridge University Press, str. 1–7.

2) — (prir.) (2012a), *Contemporary Aristotelian Metaphysics*, Cambridge: Cambridge University Press.

[**326**] TALL, D. O. (1980), „Looking at graphs through infinitesimal microscopes windows and telescopes. An introduction to calculus using infinitesimals", *The Mathematical Gazette* 64 (427), str. 22–49.

[**327**] TANNERY, P.

1) — (1885), „Le concept scientifique du continu: Zénon d'Élée et Georg Cantor", *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger* (juillet à décembre), T. 20, str. 385–410.

2) — (1887), *La géométrie grecque*. Paris: Gauthier-Villars.

[**328**] TAO, T. (2012), „A cheap version of nonstandard analysis“, dostupno *online*, LINK.

[**329**] TARSKI, A. & GIVANT, S. (1999), „Tarski's System of Geometry“, *The Bulletin of Symbolic Logic* 5 (2), str. 175–214.

[**330**] TARSKI, A.

1) — (1930), „Sur les ensembles définissables de nombres réels“, *Fundamenta Mathematicae* 17 (1), str. 210–239.
2) — (1948/1951), *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry* (prep. for publ. by J. C. C. McKinsey), Santa Monica: The Rand Corporation.

[**331**] TEMPLE, G. (1981), *100 Years of Mathematics. A Personal Viewpoint*, New York: Springer-Verlag.

[**332**] TENNANT, N.

1) — (2022), *The Logic of Number*, Oxford: Oxford University Press.
2) — (2023), „Logicism and Neologicism“, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2023 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (ur.), LINK.

[**333**] THIEME, H. (1900), *Die Umgestaltung der Elementar-Geometrie*, Beilage zum Jahresbericht des Königlichen Berger-Gymnasiums und der Berger-Oberrealschule zu Posen, Posen (nepoznati izdavač).

[**334**] THOMAE, J.

1) — (1870), *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen*, I. Auflage, Halle an der Saale: L. Nebert Verlag.
2) — (1872), „Sur les limites de la convergence et de la divergence des séries infinies à termes positifs“, *Annali di matematica pura ed applicata* 2 (5), str. 121–129.
3) — (1873), *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen*, II. vermehrte Auflage, Halle an der Saale: L. Nebert Verlag.
4) — (1890), *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen*, III. erheblich vermehrte Auflage, Halle an der Saale: L. Nebert Verlag.

[**335**] TIKHOMIROV, V. M. [Тихомиров, В. М.] (2014), „Аксиоматический метод и теория действительных чисел в лекциях А. Н. Колмогорова“, Математика в высшем образовании, № 12, str. 149–154.

[**336**] TOADER, I. (2021), „Permanence as a principle of practice“, *Hist. Math.* 54, str. 77–94.

[**337**] TOEPELL, M. (1986), „On the Origins of David Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*“, *Arch. Hist. Exact Sci.* 35 (4), str. 329–344.

[**338**] TORRETTI, R.

1) — (1978), *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht: Reidel.
2) — (2021), „Nineteenth Century Geometry“, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2021 Edition), Edward N. Zalta (ur.), LINK.

[**339**] TYMOCZKO, T. (prir.) (1985–1998), *New Directions in the Philosophy of Mathematics. An Anthology* (prvo i drugo, izmenjeno i prošireno izdanje), Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser.

[**340**] ULLRICH, P. (1989), „Weierstraß' Vorlesung zur 'Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen'“, *Arch. Hist. Exact Sci.* 40 (2), str. 143–172.

[**341**] URQUHART, A. (2008), „Mathematics and Physics: Strategies of Assimilation“ u P. Mancosu (prir.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford: Oxford University Press, str. 417–440.

[**342**] VAHLEN, K. T.

1) — (1905), *Abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen und nicht-euklidischen Geometrie*, Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner.

2) — (1907), „Über nicht-archimedische Algebra“, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 16, str. 409–421.

[**343**] VAN BENTHEM, J. (1991), *The Logic of Time. A Model-Theoretic Investigation into the Varieties of Temporal Ontology and Temporal Discourse* (2nd edition), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers – Springer Science+Business Media.

[**344**] VAN DALEN, D. (2013), *L. E. J. Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher: How Mathematics Is Rooted in Life*; London-Heidelberg-New York-Dordrecht: Springer.

[**345**] VAN HEIJENOORT, J. (1967), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

[**346**] VAN DER WAERDEN, B. L. (1953), *Modern Algebra* (2nd ed.) (prev. F. Blum), New York: Frederick Ungar Publishing Co.

[**347**] VARGAS, F. & MOORE, M. E. (2021), „The Peircean Continuum“ u S. Shapiro & G. Hellman (prir.), *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives*, Oxford: Oxford University Press, Ch. 13, str. 328–346.

[**348**] VARIĆAK, V. (1910), „Matematički rad Boškovićev“, *Rad JAZU*, Knj. 181, Matematičko-prirodoslovni razred 47, str. 75–208.

[**349**] VEBLEN, O. & YOUNG, J. W. (1910–1918), *Projective Geometry*, Vol. I–II, Boston etc: Ginn and Company i New York etc: Blaisdell Publishing Company (A Division of Ginn and Company). [= **Veblen & Young 1910** & **1918**]

[**350**] VEBLEN, O.

1) — (1903), „Hilbert's Foundations of Geometry“, *The Monist*, Vol. 13, No. 2, str. 303–309.

2) — (1904), „A System of Axioms for Geometry“, *Transactions of the American Mathematical Society* 5 (3), str. 343–384.

3) — (1906), „The Foundations of Geometry: An Historical Sketch and a Simple Example“, *Popular Science Monthly*, Vol. 68, str. 21–28.

[**351**] VITALI, G. (1912), „Sulle applicazioni del postulato della continuità nella Geometria elementare“ u F. Enriques (prir.), *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Parte prima: Critica dei principii, Vol. I, Bologna: N. Zanichelli Editore, Articolo V, str. 193–230.

[**352**] VIVANTI, G.

1) — (1889), „Fondamenti della teoria dei tipi ordinati“, *Annali di Matematica* 17, str. 1–35.

2) — (1891a), „Sull'infinitesimo attuale“, *Rivista di Matematica* 1, str. 135–153.

3) — (1891b), „Ancora sull'infinitesimo attuale“, *Rivista di Matematica* 1, str. 248–255.

4) — (1893), „Lista bibliografica della teoria degli aggregati“, *Rivista di Matematica* 3, str. 189–192.

5) — (1894), *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione in matematica*, Mantova: Stab. Tipo.-lit. G. Mondovi. Preštampano u Giornale di Matematiche di Battaglini 1900. godine.

[**353**] VOELKE, J.-D. (2010), „Les fondements de la géométrie selon Friedrich Schur“, *Revue d'histoire des mathématiques*, T. 16, Fasc. 2, str. 225–294.

[**354**] VOLKERT, K.

1) — (1986), *Die Krise der Anschauung: eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850*, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

2) — (2013), *Das Undenkbare denken. Die Rezeption der nichteuklidischen Geometrie im deutschsprachigen Raum (1860-1900)*, Berlin-Heidelberg: Springer Spektrum.

3) — (2018), *In höheren Räumen. Der Weg der Geometrie in die vierte Dimension*, Berlin-Heidelberg: Springer Spektrum.

4) — (prir.) (2015), *David Hilbert. Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899)* (kommentiert von Klaus Volkert), Klassische Texte der Wissenschaft, Heidelberg: Springer Spektrum.

[**355**] VON HELMHOLTZ, H.

1) — (1878), „Die Thatsachen in der Wahrnehmung", Rede zu Gedächtnissfeier der Stiftung der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin gehalten am 3. August 1878, Berlin: Buchdr. der Königl. Akad. der Wiss. (G. Vogt), LINK.

2) — (1883), *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. II (Zweite Abtheilung), Leipzig: Johann Ambrosius Barth.

3) — (1921/1977), *Epistemological Writings* (prir. P. Hertz & M. Schlick, prev. M. F. Lowe, uvod, redakcija i prateća bibliografija R. S. Cohen & Y. Elkana), Dordrecht-Boston: D. Reidel Publishing company. [= **Hertz & Schlick 1921/1977**]

[**356**] VON NEUMANN, J. (1923), „Zur Einführung der transfiniten Zahlen", *Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio scientiarum mathematicarum* 1, str. 199–208.

[**357**] VOPĚNKA, P. (2023), *New Infinitary Mathematics* (prir. A. Vencovská), Prague: Karolinum Press (Charles University Prague).

[**358**] VOSS, J. (1975), „Foreword", *Hist. Math.* 2 (4), str. 425–427.

[**359**] WAISMANN, F. (1936), *Einführung in das mathematische Denken. Die Begriffsbildung der modernen Mathematik*, Wien: Gerold & Co.

[**360**] WANG, H. (1996), *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, Cambridge, MA: MIT Press.

[**361**] WEBER, H, WELLSTEIN, J. & JACOBSTHAL, W. (prir.) (1905), *Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende*, Bd. II, Elemente der Geometrie, Leipzig: Verlag und Druck von B.G. Teubner. [= **Weber *et al.* 1905**]

[**362**] WEBER, H. (1893), „Leopold Kronecker", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 2, str. 5–31.

[**363**] WEIL, A. (1980), „History of Mathematics: Why and How?", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Helsinki 1978*, Vol. I (prir. O. Lehto), Helsinki: Academia Scientiarum Fennica, str. 227–236.

[**364**] WEYL, H. (1944), „David Hilbert and his mathematical work", *Bulletin of the American Mathematical Society* 50 (9), str. 612–654.

[**365**] WHITE, M. J.

1) — (1988), „On Continuity: Aristotle versus Topology?", *History and Philosophy of Logic* 9 (1), str. 1–12.

2) — (1993), „The Metaphysical Location of Aristotle's Μαθηματικά", *Phronesis*, Vol. 38, No. 2, str. 166–182.

[**366**] WHITEHEAD, A. N. & RUSSELL, B. (1910–1912–1913), *Principia Mathematica*, Vol. I–III, Cambridge: at the University Press. [= **Whitehead & Russell 1910**, **1912** & **1913**]

[**367**] WHITEHEAD, A. N. (1898), *A Treatise on Universal Algebra. With Applications*, Cambridge: at the University Press.

[**368**] WIENER, N. (1921), „A new theory of measurement: a study in the logic of mathematics“, *Proceedings of the London Mathematical Society*, S. 2, Vol. 18, str. 181–205.

[**369**] WIGNER, E. P. (1960), „The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences“, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13, No. I, str. 1–14.

[**370**] WILLE, M. (2011), „'Metamathematics' in Transition“, *History and Philosophy of Logic* 32 (4), str. 333–358.

[**371**] WILSON SHATALOV, K. (2020), „Continuity and Mathematical Ontology in Aristotle“, *Journal of Ancient Philosophy* 14 (1), str. 30–61.

[**372**] YOUSCHKEVITCH, A. P. [Юшке́вич, А.-А. П.] (1976), „The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century“, *Arch. Hist. Exact Sci.* 16 (1), str. 37–85.

[**373**] ZACH, R. (2023), „Hilbert's Program“, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2023 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (ur.), LINK.

[**374**] ZEUTHEN, H.

1) — (1886), *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Kopenhagen: Höst & Sohn Verlag.
2) — (1905), „Gebrauch und Mißbrauch historischer Benennungen in der Mathematik“ u A. Krazer (prir.), *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses*, Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner, str. 536–542.

POPIS GRAFIKONA, ILUSTRACIJA I SLIKA

Sl. 1. Geometrijski prikaz Arhimedova aksioma

Sl. 2. Dieudonnéov shematski prikaz povijesti razvoja funkcionalne analize; strelice označuju veze između ključnih pojmova i rezultata (preuzeto iz Dieudonné 1981: 8)

Sl. 3. Eugenio Bellotto, Busto ritratto di G. Veronese (1933). Pallazo del Bo, Padova. (Catalogo generale dei Beni Culturali, codice: 0500090759)

Sl. 4. Veroneseove π-figure na Pascalovu *Hexagrammum Mysticum* (preuzeto iz Veronese 1876: 660)

Sl. 5. Fotografija sudionika s Četvrtoga međunarodnog kongresa matematičara (Sezione Meccanica?), Rim, 1908. (Arhiv SANU, sign. 14197-II-13)

Sl. 6. Matematički opus G. Veronesea

Sl. 7. Digitalni repozitorij Veroneseovih radova (dostupno na: https://www.mi.sanu.ac.rs/novi_sajt/publications/veroneze.php)

Sl. 8. Shematski prikaz tematske strukture sekundarne literature o Veroneseu

Sl. 9. Opažanje geometrijskih objekata (preuzeto iz Bošković 1754, §13)

Sl. 10. Opažanje geometrijskih objekata (usp. Arsenijević 2007: 84 i Popović 2017: 100)

Sl. 11. Cantorov ternarni skup

Sl. 12. Prvih nekoliko iteracija postupka kojim se generira Peano-Hilbertova krivulja (preuzeto iz Hilbert 1891: 459)

Sl. 13. Faksimil djela §12 prvoga izdanja Hilbertovih *Grundlagen* (preuzeto iz Hilbert 1899: 24)

Sl. 14. Vizualni prikaz Veroneseova Principa IV

Sl. 15. Vizualni prikaz „skokova“ u kontinuumu

Sl. 16. Fanov prikaz Veroneseova nearhimedovskoga kontinuuma (Fano 1938: 501)

Sl. 17. Veroneseov apsolutni kontinuum $\boldsymbol{\nu}$ (prema Popović 2017: 107)

Sl. 18. Cantorovi transfinitni ordinali

Sl. 19. Veroneseov nearhimedovski brojevni pravac

Sl. 20. Tullio Levi-Civita (1873–1941). Fotografija, reproducirano iz Hodge 1942, ©2017, Royal Society

Sl. 21. Rogljasti kut $\measuredangle ABC$

Sl. 22. Vizualni prikaz Arhimedova aksioma

Sl. 23. Vizualni prikaz Cantorova aksioma neprekidnosti

Sl. 24a. Faksimil str. Veroneseovih *Fondamenti di geometria* (Veronese 1891: 209)

Sl. 24b. Faksimil str. 210 Veroneseovih *Fondamenti di geometria* (Veronese 1891: 210)

Sl. 25a. Faksimil str. 7 Veroneseovih *Elementi di geometria* (Veronese 1897: 7).

Sl. 25b. Faksimil str. 8 Veroneseovih *Elementi di geometria* (Veronese 1897: 8)

Sl. 26. Faksimil djela sadržaja GM V, str. vi

Sl. 27. Faksimil nap. 4 iz Veronese 1891: 568

Sl. 28. Geografski prikaz transmisije Veroneseovih radova i rezultata do Prvoga svjetskog rata (izrađen pomoću servisa MapChart)

Sl. 29. Faksimil djela Cantorova pisma Vivantiju od 13.12.1893. (I b, XVII b), u kojemu se spominje Veronese (preuzeto iz Meschkowski & Nilson 1991: 520)

Sl. 30. Dijagram koji prati rekonstrukciju i analizu Killingova dokaza Arhimedova aksioma (Killing 1885, §6, str. 46–7, usp. Ehrlich 2006: 22)

Sl. 31. Skupna fotografija sudionika prve Solvayeve konferencije (Bruxelles, 1911.; fotograf: Benjamin Couprie, izvor: Wikimedia Commons)

Sl. 32. Faksimil Hilbertove fusnote uz §12 *Grundlagen* (njemački izvornik (1899) i francuski prijevod (1900))

Sl. 33. Transfer iz $\mathbb{R}$ u $^*\mathbb{R}$

Sl. 34. Realni i hiperrealni brojevni pravac, Keislerov mikroskop i teleskop

Sl. 35. Von Neumannova konstrukcija

Sl. 36. Binarno stablo $\mathbf{No}$ nadrealnih brojeva (preuzeto iz Conway 1976: 11)

POPIS TABLICA

Tablica 1. Pregled nekih ključnih ideja i rezultata u razvoju moderne geometrije

Tablica 2. Pregled nekih ključnih ideja i rezultata u razvoju moderne analize

APPENDIX

Novootkriveni Veroneseov rukopis (**Cod. Ms. G. Cantor 29, № 1**) [**1890**]

Tijekom arhivskih istraživanja koja sam u više navrata provodio tijekom izrade ove disertacije, u okviru Cantorova Nachlassa, koju je Akademija znanosti u Göttingenu povjerila na čuvanje Državnoj i sveučilišnoj knjižnici Donje Saske u Göttingenu (*Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen*), u jednoj od kutija s rukopisima, bilješkama i separatima drugih autora koje je Cantor sačuvao otkrio sam jedan nenaslovljeni Veroneseov rukopis na francuskome jeziku, opsega 27 listova, čija je glavna tema rasprava o statusu beskonačnosti, a osobito o Cantorovim transfinitnim ordinalima i Veroneseovim nearhimedovskim beskonačnim brojevima (sign. Cod. Ms. G. Cantor 29, br. 1). Rukopis je nastao sredinom 1890. godine, dakle nakon objavljivanja rada „Il continuo rettilineo e l'assioma V di Archimede" (1889), a prije nego što su *Fondamenti* izašli iz tiska (1891). Po svoj je prilici Veronese rukopis poslao Cantoru uz pismo od 5. srpnja 1890. godine. Koliko mi je poznato, nijedan povjesničar ni proučavatelj Veroneseova opusa dosad nije bio svjestan postojanja ovoga rukopisa, koji je, iz historiografske perspektive, od prvorazredne važnosti jer dokumentira razvoj Veroneseovih ideja o beskonačnim brojevima u prijelaznom razdoblju između objavljivanja dviju njegovih ključnih publikacija posvećenih nearhimedovskoj matematici. Iz toga razloga ovdje prvi put objavljujem faksimil ovoga rukopisa. Zahvaljujem Arhivu, Odjelu rukopisa i rijetkih knjiga te Centru za reprodukcije Državne i sveučilišne knjižnice Donje Saske u Göttingenu na ljubaznosti i susretljivosti pri ustupanju ovoga Veroneseova rukopisa.

XV3.

Dans un traité sur les fondements de la géom. à plusieurs dimensions exposés dans une forme élémentaire, et dans lequel je me suis posé le problème dans toute sa généralité, j'ai dû m'occuper aussi dans l'introduction de mon travail des principes des formes ou grandeurs mathématiques abstraites. Ce serait trop long si je voulais vous donner ici une idée de ma méthode et des mes résultats. J'espère que mon livre sera publié entre cette année et alors je m'empresserai de vous en envoyer une exemplaire.

C'est précisément dans l'introduction que j'ai mis en carré des autres formes de l'infini et infiniment petit actuel. Vous avez démontré qu'il ne peut pas avoir des grandeurs linéaires infiniment petites (dans le sens que ces grandeurs aient pour image un trait continu rectiligne) et vous en avez déduit que l'axiome d'Archimède pour les segments rectilignes est une propriété qui peut être démontrée. M. Stolz a démontré que cette théorème ne vaut pas pour les grandeurs infiniment petites ici pour celles de du Bois Reymond, car on ne peut pas définir leur multiple selon le nombre ω [1]. M. Stolz ajoute même d'avoir démontré l'axiome susdit à l'aide de la définition du continu donnée par lui, en suivant celle de Dedekind [2]. Mais comme vous pouvez voir de ma lettre dirigée à M. Stolz il admet implicitement dans sa définition le même axiome, et sa démonstration n'est pas complète et pour la compléte on ne peut pas s'en passer de l'axiome d'Archimède.

M. Killing a aussi essayé de démontrer cette propriété, mais sa démonstration contient avec plus d'évidence une pétition de principe [3].

Dans votre définition du continu vous l'admettez aussi implicitement, comme a déjà remarqué M. Stolz [4]. Une telle question, ce me semble, a beaucoup d'intérêt pour l'essence même des continus. Or les infinis et les infiniment petits que j'ai trouvés constituent un continu linéaire qui contient le continu ordinaire. Pour ce continu ne vaut pas votre théorème sur l'infiniment petit actuel.

Pour déterminer ces infinis et infiniment petits on a besoin seulement de l'idée générale de série donnée d'éléments, ou système d'éléments à une dimension homogène dans un sens donné (ordre), c'est à dire que à connexion d'un

[1] cf Math. Ann. XXXI, 4 1888

[2] Stolz l.c et Math. Ann. XXII p. 510 - Vol. ii. Allg. Arith. p. 80-83 - Dedekind Stetigkeit u. Irr. Zahlen 1872.

[3] Die Nicht-Euklid. Raumformen Leipzig 1885. p. 47.

[4] Math. Ann. XXII l.c

élément donné il y a dans le système deux segments (parties ou intervalles) égaux à un segment donné (III), dans le sens donné, tout le premier a pour second extrême et le second pour premier extrême l'élément donné (Voyez la lettre à M. Stolz II pag. 6 et rem. I pag. 13). L'infini et l'infiniment petit actuels servent pour la construction même du système continu homogène contenu d'éléments avec l'hypothèse de la limite [1]; et comme un groupe ordonné d'éléments, que j'appelle naturel, me sert à déduire les propriétés fond. des nombres entiers naturels le système homogène contenu me sert pour les autres nombres réels finis, infinis et infiniment petits [2]

Mais j'irais trop loin si je voulais suivre cette voie, qui est la plus logique et pour cela la plus scientifique. Pour vous donner brièvement une idée de ces formes nouvelles et des leurs premières propriétés je choisis le chemin inverse, c'est à dire celui des signes.

1. Déf I. Etant donnée la série des nombres naturels

(I) 1 2 3 . . . . n . . . .

nous posons après d'elle des autres signes ou nombres $\omega_1 - n$, $\omega_1 - n + 1$, . . . ω_1, où n est un nombre de la série (I), en appelant ces qui suivent un nombre donné plus grands et ceux qui le précèdent plus petits que le nombre donné. De même pour les autres nombres que nous introduirons plus tard.

On a donc quelque soit n

(1) $n < \ldots < \omega_1 - n < \omega_1 - n + 1 \ldots < \omega_1 - 1 < \omega_1$.

Déf I nous disons que la série

1 2 3 . . . n . . . $\omega_1 - n \ldots \omega_1$.

contient ω_1 nombres

des signes mêmes des nouveaux nombres on a:

$\omega_1 - n + n = \omega_1$.

En ajoutant à ω_1 l'unité, de même que à $\omega_1 - n$, on obtient un autre nombre (ou signe) $\omega_1 + 1$ différent des premiers et plus grand que ceux-ci, car il est après d'eux.

De même on obtient

$\omega_1 + n > \omega_1$.

Avec le même principe nous posons les nombres

$\omega_1 . 2 - n$, $\omega_1 . 2 - n + 1$, . . . $\omega_1 . 2$

étant $\omega_1 + \omega_1 = \omega_1 . 2$

[1] v. leg. II pag. - ou bien dans la lettre à M. Stolz leg. 8

[2] Il n'est pas le contenu numérique basé sur des regles arbitraires quelque possibles (comme il est semblable à M. Dedekind l. c. et Was sind u. sollen die Zahlen. 1888), qui sert à éclaircir le contenu intuitif, mais c'est celui-ci qui est de guide à établir les hypothèses abstraites du groupe homogène contenu, de même que on déduit les propriétés du contenu numérique sans pourtant que l'intuition entre comme élément nécessaire dans les déf. du contenu. Ainsi on peut facilement employer la géométrie des contenus sans la faire dépendre des nombres fractionnaires et irrationnels et sans abandonner la méthode classique grecque dont l'élégance dérive de la simplicité du procès constructif de l'intuition et non pas de la simplicité des formes.

De la même manière nous posons les nombres

$$\omega_{1.2+1},\ \omega_{1.2+2},\ \ldots\ \omega_{1.2+\nu}\ \ldots$$

$$\omega_{1.3-\nu},\ \omega_{1.3-\nu+1}\ \ldots\ \omega_{1.3}$$

et en général les nombres

$$\omega_{1.n\pm\nu}$$

de même après la série

$$\omega_1,\ \omega_{1.2},\ \omega_{1.3}\ \ldots\ \omega_{1.n}\ \ldots$$

nous posons les nombres

$$\omega_1^2-\omega_{1.n}-n_2,\ \omega_1^2-\omega_{1.n_1}-n_1+1\ \ldots\ \omega_1^2-1,\ \omega_1^2,\ \ldots\ \omega_1^2+\omega_{1.n_1}+n_2\ \ldots$$

où ω_1^2 indique que ω_1 a été posé ω_1 fois (déf I) et l'on a $\omega_1^2=\omega_{1.}\omega_{1.}$. Et en général en indiquant ω_1^m que ω_1^{m-1} a été posé ω_1 fois ($\omega_1^m=\omega_1^{m-1}.\omega_1$) désorait un nombre de (I) on a les nombres:

$$\omega_1^m n_1 \pm \omega_1^{m-1}n_2 \pm \omega_1^{m-2}n_3 \pm \ldots \pm n_{m+1}$$

où les ν sont nombres de (I), et $n_2, n_3 \ldots n_{m+1}$ peuvent être 0.

On obtient donc la série des nombres

$$\omega_{1.\nu}\ \ldots\ \omega_{1.n}\ \ldots\ \omega_{1.}\ \ldots\ \omega_1^2-\omega_{1.}n_1-n_2\ \ldots\ \omega_1^{m}n_1+\omega_1^{m-1}n_2+\ldots+n_{m+1}$$

a/ 1 2 3 .... n ....

les nombres de (I) nous les indiquons par des lettres latines et ceux de a/ par des lettres grecques.

Avant de poser des autres nombres examinons un peu ceux de la série a/.

Du procès précédent on voit que dans la série a/ il n'y a pas deux nombres égaux, car chacun a un signe déterminé différent des autres, ou parce que il occupe dans la série a/ une place déterminée; donc:

une quelconque des trois relations

$$\alpha=\beta,\quad \alpha<\beta,\quad \alpha>\beta$$

exclut les autres deux.

Pour les nombres de a/ on a:

si $\alpha>\beta$, $\beta>\gamma$ il est $\alpha>\gamma$.

et par conséquent aussi:

si $\alpha<\beta$, $\gamma<\beta$ " $\alpha<\gamma$

En effet si α est après β, et β est après γ dans la série a/, α est après γ, c'est à dire $\alpha>\gamma$, (prem. I)

~~Nous disons~~ dans les deux cas précédents que β est situé entre α et γ, ou bien aussi que β est situé dans l'intervalle $(\alpha\ldots\gamma)$

Aux nombres de a/ nous pouvons faire correspondre les intervalles (01), $(0\gamma\ldots$ $(\omega_1\ldots)$, c'est à dire les intervalles que les nombres de a/ déterminent avec 0; et la série a/ pourra ainsi être substituée par la série

a'a'/ 0, 1, 2 3 .... n .... $\omega_{1.\nu}$ ... $\omega_{1.}$ ... ω_1^2 .... ω_1^m ....

Si réciproquement à la série d'intervalles $\pm a'_\nu$ à partir de 0 nous pouvons substituer les nombres de a_ν.

Rem. Si $n = m + p$ l'intervalle $(m \dots n)$ est égal à l'intervalle $(0 p)$ mais si l'on considère l'intervalle par ex: $(n \dots \infty_1)$ nous ne savons pas encore à lui correspond un nombre de a_ν. ~~Dans chaque cas~~, jusqu'à ce que la question ne soit pas décidée, nous supposons que à chaque intervalle soit indiqué par un signe ou nombre, et que ces nombres se comportent relativement à l'idée de plus grand et de plus petit, comme les intervalles mêmes de la série qu'ils représentent, et par cela aussi comme les nombres de a_ν. Par ex:

$(n \dots \infty_1, -1) < (n \dots \infty_1) < (n \dots \infty_1 + 1)$

et on peut indiquer $(p \dots q)$ par le nombre $-p+q$.

2 Pour l'égalité et la diversité des intervalles de a'_ν nous avons les principes suivants - qui découlent de l'axiome logique d'identité et de diversité, c'est à dire:

Def I Si (A) et (B) sont deux groupes ordonnés d'éléments, nous disons que (B) appartient à (A), lorsque chaque élément de (B) est un élément de (A), et les éléments de (B) se suivent dans le même ordre que dans (A).

Nous disons que (A) est une partie de (A) lorsque (B) appartient à (A), mais chaque élément de (A) n'est pas un élément de (B). Le groupe (A) relativement à ses parties s'appelle tout. Mais lorsque nous ne disons pas le contraire par parties de (A) nous convenons d'entendre seulement les groupes (B) dont les éléments immédiatement consécutifs sont aussi consécutifs dans (A), c'est à dire que les éléments de (A) compris entre deux éléments E et F de (B) sont aussi des éléments de (B).

Tels sont les intervalles de la série a'_ν.

Def II De cette déf. il résulte que le tout et la partie sont inégaux et nous disons que le tout est plus grand que la partie, et la partie plus petite que le tout, et nous écrivons alors les signes précédents

$$(A) > (B) \quad \text{ou} \quad (B) < (A).$$

ce qui exclut pour le principe de contradiction "A est A et n'est pas non-A, l'identité $(A) = (B)$, lorsque on tient compte de la relation "tout et partie".

Et si $(A) \equiv (A')$ nous disons aussi que (A') est plus grand que (B) et (B) plus petit que (A').

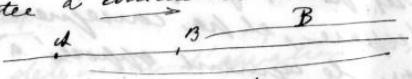
Les choses A et B identiques, si elles sont distinctes, sont diverses dans le sens qu'elles ne sont pas une chose unique, mais nous ne devons pas tenir compte de cette diversité dans les relations d'identité, ce qui tient à une chose A ainsi pourrait substituer aucune autre chose distincte de A. Il ne faut pas pourtant que l'identité $A = A$ soit contredite, c'est à dire il faut toujours qu'il se réunisse ~~pas~~ sans aucune

distinction l'absurdité "A est et n'est pas A".

Mais deux choses peuvent être diverses relativement à quelques caractères (métriques) et égales relativement à d'autres, dans ce cas on a une égalité relative aux caractères communs, ou une équivalence. Mais lorsque elles sont identiques on ne tient pas compte de leur diversité de position, et lorsque elles sont diverses on ne tient pas compte de leurs caractères communs. Par conséquent, une chose A peut être substituée mentalement à une chose B distincte de A relativement aux caractères communs, c'est à dire A est égal à B, mais en relation avec d'autres, au moins puisque A et B ne sont pas une chose unique, et n'est pas B. Il faut remarquer qu'ici il n'y a pas d'absurdité, car il ne résulte pas sans distinction que "A est et n'est pas B".

De même, si l'on considère par ex: le segment (A) d'une droite illimitée à commence du point et (et par conséquent ouverte)

3



dans le sens indiqué par la flèche, et le segment d'elle à commence du point B dans le même sens, et en considérant, comme l'on fait en géométrie, la droite comme un tout donné et constant, puisque (B) est partie de (A), il ne peut pas être sans aucune distinction (A) ≡ (B). Mais si nous considérons seulement que de A et de B nous pouvons construire deux séries de segments limités égaux entr'eux et de manière que au segment somme de deux de ces segments correspond le segment somme des segments correspondants égal au premier, alors relativement à cette correspondance d'identité parmi les segments limités de A et de B dans le sens donné on peut écrire (A) ≡ (B). C'est le cas qui se présente pour deux nombres ordinaux entiers et d'autre côté, comme nous verrons bientôt, réels absolus, tandis que on l'a pour nos nombres.

Vous même avez remarqué que le segment (A) n'est pas le segment (B), comme quantum donné, et qu'il n'y a pas de contradiction dans votre formule n+w = w. Mais de ce que vous dites il paraît que pour vous le quantum donné ne soit pas une grandeur, tandis que nous la trouvons capable avec ses parties et d'autres grandeurs.

A mon avis jusqu'à ce que la droite est ouverte on ne peut pas dire que dans le mouvement sans déformation, on en d'autres termes dans le mouvement dans lequel restent les mêmes toutes les relations d'identité et de diversité parmi toutes

les parties de la droite et la droite même que le segment (B) est identique au segment (A), car (B) se transporte en (A) dans ce cas il y a une contradiction évidente, puisque le mouvement sans déformation regarde l'égalité absolue, ou le quantum donné, c'est à dire que le mouvement dans le monde extérieur a lieu indépendamment de notre esprit. Donc par le mouvement susdit le segment (B) ne peut pas coïncide avec le segment (A). On peut dire seulement, en bornant le mouvement dans déformation aux segments limités que chaque segment limité à partir de B peut coïncide avec un segment à partir de A, et réciproquement. On a ainsi l'égalité relative de (A) et (B), qui a lieu aussi pour les nombres $n+w$ et w lorsque la droite est fermée, comme le cercle, cette différence disparaît. Lorsque on dit donc que la droite peut glisser sur elle même, ou qu'elle peut tourne autour d'un quelconques des ses points jusqu'à passe par un point quelconque de l'espace, et par conséquent, par ex: (B) peut se place sur le segment opposé à partir de B, il faut entendre par là, pour pouvoir conclure que (A)=(B) ou que (B) est égale à la partie restante de la droite à partir de B dans le sens opposé, que le mouvement sans déformation doit regarde seulement les segments limités.

Cependant, en restant dans le champ de l'échelle d'une unité donnée, comme par ex: dans le segment (A) à partir de A, la contradiction susdite n'a aucune conséquence car les grandeurs variables se comprent entr'elles au moyen des leurs états finis, et par conséquent nous pouvons dire que le segment (M) est négligeable relativement à tout le segment (A), et de manière que l'on a (A)=(B) [x]

Sur ce point nous reviendrons bientôt.

3 Rem. L'opération $\alpha+\beta$, étant α et β deux nombres ou intervalles de a_ν ou a'_ν est déterminée, c'est à dire que désignant $\alpha+\beta$ l'on peut exécute l'opération $+\beta$ à partir d'un nombre quelconque α de la série a_ν, et le résultat est désigné par $\alpha+\beta$, car l'on a

$$\alpha+\beta-1 < \alpha+\beta < \alpha+\beta+1$$

Ajoutons ces nombres à la série a_ν, nous pouvons ensuite toujours qu'ils sont des nombres de a_ν. Cela signifie que à partir d'un nombre quelconque de a_ν on peut construire dans la série un intervalle égal à un intervalle quelconque donné.

x) mais de cette égalité identité il faut toujours l'employer dans le sens expliqué. Car on ne pourrait pas conclure des identité $(AM)+(B1)\equiv(B\alpha)+(\alpha\cdots)$ étant $(B\cdots)\equiv(A\cdots)$ que $(AM)\equiv(B\alpha)$ que personne ne se contentera d'une telle déduction.

* le principe d'identité est sommis dans mon livre à une discussion détaillée, car je n'applique pas le principe métaphysique du mouvement sans déformation comme principe nécessaire de la géom. théorique; je fais même voir qu'il est nuisible à la simplicité et à la rigueur géométrique.

Déf. La multiplication d'un nombre α par un nombre β se laisse définir comme la multiplication des nombres naturels, où le α appelle le multiplicande et β le multiplicateur, $\alpha \cdot \beta$ le produit.

Déf I Si β et α sont deux nombres donnés, $\beta > \alpha$, et si il n'existe pas aucun nombre ν tel que on ait:

$$\alpha \cdot \nu > \beta$$

β s'appelle infini relativement à α, et α infiniment petit relativement à β. Si cette relation est satisfaite, α et β s'appellent finis.

D'ici on voit facilement.

1) Chaque nombre β infini (ou infiniment petit) α est infini (ou infiniment petit) relativement à chaque nombre fini avec α.

2) Dans la comparaison de deux nombres par rapport au fini, infiniment petit ou infini chacun des trois cas exclut les autres deux.

Pour mieux déterminer l'opération ∞, nous donnons l'hypothèse suivante:

Hyp. II Tout nombre x compris entre les deux séries

$$1\ 2\ 3 \ldots n \ldots \qquad e \ldots \infty_1 - n \ldots \infty_1$$

étant n fini et quelconque, est fini par rapport à ∞_1.

J'appelle l'unité 1 unité fondamentale.

3) La série

$$\ldots x-n,\ x-n+1, \ldots x,\ x+1, \ldots x+n$$

ne peut avoir aucun nombre commun avec les séries

$$1\ 2\ 3 \ldots n \ldots, \qquad \ldots \infty_1 - n \ldots \infty_1$$

4) Les nombres infinis compris dans la série

$$\ldots \infty_1 - n \ldots \infty_1 \ldots \infty_1 + n$$

sont finis entre eux et satisfont à l'hyp. II par rapport à l'unité fondamentale

Par ex. le nombre $\infty_1 - n$ est fini par rapport à ∞_1, car il ne peut pas être infini, étant $\infty_1 - n < \infty_1$; il ne peut pas être infiniment petit parce que $x < \infty_1 - n$, donc il est fini (1) (2) (4)

Chaque nombre compris entre deux d'eux, par ex: $\infty_1 + n$, et 0. ne peut pas être infini - ni par rapport à $\infty_1 + n$, ni infiniment petit car il le serait aussi par rapport à ∞_1, contre l'hyp. II même.

Déf II Nous pouvons donc parler des premiers nombres infinis qui satisfont à l'hyp. II et sont finis entre eux. Je les appelle infinis de 1er ordre. Ceux qui sont infinis de 1er ordre par rapport à un infini de $(m-1)^{\text{ème}}$ ordre je les appelle infinis de $m^{\text{ème}}$ ordre.

si α est un nombre infini de m^{me} ordre par rapport à un nombre β je dis que β est infiniment petit de m^{me} ordre par rapport à α.

5/ Un nombre fini est négligeable par rapport à un nombre infini

5') Un nombre infiniment petit est négligeable par rapport à un nombre fini ou infini *)

En effet dans le champ d'une échelle d'unité donnée on peut négliger un nombre fini par rapport à la partie restante de la échelle, mais le champ (donné et constant) de l'unité 1 est contenu dans l'intervalle $(0 \ldots \infty_1)$, le théorème 5/, est par conséquent aussi 5'), est donc évidemment ici il n'y a pas d'absurdité, ca un tel absolu le nombre fini n'est pas négligeable. *)

Def III Les unités $1, \infty_1, \infty_1^2, \ldots \infty_1^m \ldots$ et les nombres de intervalles finis par rapport à ces unités s'appellent unités de diverse espèce. J'appelle les champs finis par rapport à ces unités, exemples, champs infinis de $0^{te}, 1^{re}, 2^{me}, \ldots m^{me}$ ordre, tandis que les champs de leurs échelles, qui ne sont pas la même chose, je les appelle champs à l'infini de $1^{re}, 2^{e} \ldots (m+1)^{me}$ ordre.

Tandis que le champ d'une échelle est un tout donné et constant et infini, le champ fini est une grandeur finie variable qui devient plus grande de chaque grandeur finie donnée, c'est à dire qui devient indéfiniment grande.

On démontre facilement les théorèmes suivants:

6/ Les nombres finis infinis ou infiniment petits du même ordre sont finis entr'eux, et les nombres finis par rapport à un nombre α sont infinis ou infiniment petits du même ordre.

7/ Un nombre α infini (ou infiniment petit) d'un ordre donné par rapport à un nombre β est infini (ou infiniment petit) de même ordre par rapport à tous les nombres finis avec β.

8/ Les nombres par rapport auxquels un nombre α est infini (ou infiniment petit) d'un ordre donné sont finis entr'eux.

4 En appliquant aux exposants de ∞_1 le même procès indiqué au numéro 1, nous posons les nouveaux nombres:

$$\infty_1^{\infty_1 - n} - \infty_1^{m_1} - \infty_1^{m-1} - \ldots - n_m$$

(où $n, m, n_1, n_2 \ldots n_m$ sont des nombres de (I) quelconques), et après $\infty_1^{\infty_1 - n} - \infty_1^{m_1} - \infty_1^{m-1} - \ldots - n_{m+1}$

*) L'idéaliste de droite [illegible] regarde cette propriété comme un axiome; il dit: "deux grandeurs finies dont la différence est infiniment petite sont égales." Chacun voit que cette propriété formulée de cette façon donne bien à la contradiction "A est et n'est pas A_0". Cette propriété doit être expliquée et démontrée. En outre l'idéaliste de la D.R. ne se préoccupe pas des relations entre l'infini le fini et l'infiniment petit, il ajoute seulement qu'elles sont données par la "Infinitäts" [illegible] de la D.M.K. même [illegible] Fund. Th. p. 75-76] (Voir note page 9)

D.M.K. a démontré le théorème que si dans [illegible] un des infinis, $\psi(x)$, est une série d'infinis $\psi_1(x), \psi_2(x) \ldots$ pour lesquels on a: $\psi_1(x) < \psi_2(x) \ldots < f(x)$ il y a toujours des autres séries $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \ldots < f(x)$ dont les individus ont un infini plus grand que toutes les $\psi(x)$ [l.c. pg. 284]. Si $\psi(x)$ a un infini plus grand que $\psi(x)$ on a: $\lim \frac{\psi(x)}{\psi(x)} = \infty$ by, par l'hypp. II même la série $\left(\frac{\infty_1}{2} + \frac{\infty_1}{2^2} + \ldots + \frac{\infty_1}{2^n}\right)$ pour $n = \infty$ a pour limite ∞_1, et entre la série précédente et ∞_1 il n'y a pas une autre série d'infinis plus grands.

$$\omega_1^{\omega_1},\ \omega_1^{\omega_1+1}\ \ldots\ \omega_1^{\omega_1+\omega_1-n}\ \ldots$$

$$\omega_1^{\omega_1}u_1 + \omega_1^{\omega_1-1}u_2 + \omega_1^{\omega_1-2}u_3 + \ldots + \omega_1^{\omega_1-n}u_n + \omega_1^{m}u_{\omega_1,m} + \omega_1^{n_1-1}u_{\omega_1,n-n+1} + \ldots + u_{\omega_1+1}$$

où n et les n sont toujours nombres de (I) et en nombre fini quelconques.

Par le même principe de formation on a :

$$\omega_1^{\omega_1-n}\omega_1^{n} = \omega_1^{\omega_1}$$

c'est à dire le nombre $\omega_1^{\omega_1}$ est infini d'ordre n par rapport au nombre $\omega_1^{\omega_1-n}$

En continuant ainsi, nous avons les nombres

$$\omega_1^{\omega_1+1} = \omega_1^{\omega_1}\omega_1$$

c'est à dire $\omega_1^{\omega_1}$ répété ω_1 fois, et :

$$\omega_1^{\omega_1+1}u_1 + \omega_1^{\omega_1}u_2 + \omega_1^{\omega_1}u_3 + \ldots + u_{\omega_1+2}$$

$$\omega_1^{\omega_1,m-n}u_1 + \omega_1^{\omega_1,m-n+1}u_2 + \ldots + u_{\omega_1,m-n+1}$$

et ainsi $\omega_1^{\omega_1^2}\ldots\ \omega_1^{\omega_1,\omega_1}\ldots$

nous avons donc la classe des nombres :

(II) $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \omega_1-n,\ \ldots\ \omega_1-1,\ \omega_1,\ \omega_1+1,\ \ldots\ \omega_1+u,\ \ldots$

$$\omega_1\cdot 2\ \ldots\ \omega_1\cdot\omega_1+u\ \ldots\ \omega_1^2-\omega_1\cdot m-u\ \ldots\ \omega_1^2\ \ldots\ \omega_1^{\omega_1}\ \ldots$$

$$\omega_1^{\omega_1}\ \ldots\ \omega_1^{\omega_1,\omega_1}\ \ldots\ \eta$$

Chaque nombre de cette classe peut s'exprimer par le symbole :

$$Z = \omega_1^{\mu}u_1 + \omega_1^{\mu-1}u_2 + \omega_1^{\mu-2}u_3 + \ldots + \omega_1^{m}u_{\mu-m+1} + \ldots + u_{\mu+1}$$

où $n_1, n_2, \ldots n_{\mu+1}$ sont des nombres de (I) donnés et quelconques, en nombre fini, qui peuvent être aussi tous ou en partie $=0$, et où μ est un des nombres finis ou un des nombres infinis de (II) qui ont été obtenus précédemment par le même symbole Z.

Déf I J'appelle les nombres (II) excepté le zéro, nombres entiers réels.

J'appelle ω_1^{μ} nombre infini d'ordre μ par rapport à l'unité fondamentale, lequel est infini de 1er ordre par rapport au nombre $\omega_1^{\mu-1}$, et d'ordre σ par rapport au nombre $\omega_1^{\mu-\sigma}$

si x est infini d'ordre β par rapport à un nombre y, je dis que y est infiniment petit d'ordre β par rapport à x.

Rem I Pour la comparaison des nombres ou des intervalles de la classe (II) on applique les mêmes règles que pour ceux de la classe (I) ou a').

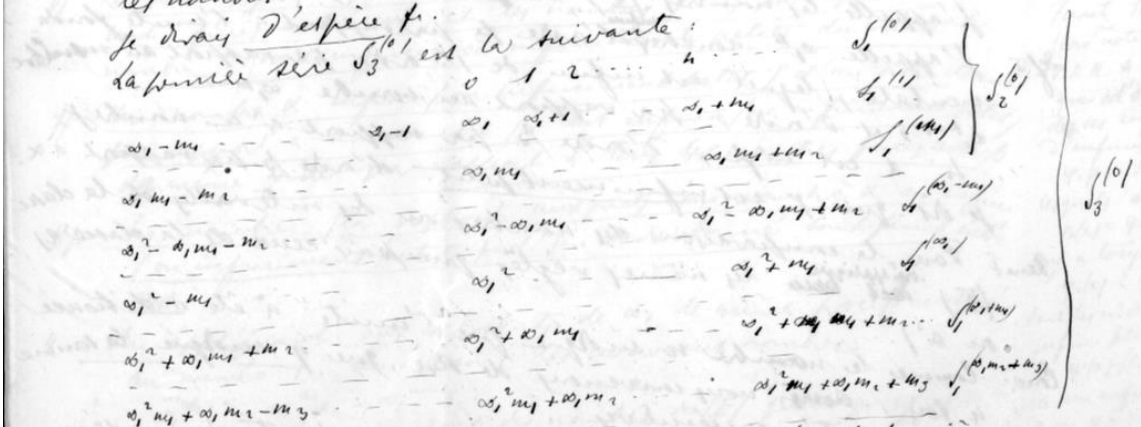
Conv. Comme le nombre n indique que l'unité a été additionnée n fois, nous convenons de dire que y indique la somme de y unités entendues.

Déf I. Par série illimitée de première espèce j'entends une série qui n'a ni de premier ni de dernier élément déterminé, ou

bien telle que si elle a le premier n'a pas le dernier élément et réciproquement; et en outre telle que chacun des éléments a un élément déterminé qui le suit, excepté le dernier, s'il existe.
Un élément pareillement que chacun des éléments de la série, qui n'est pas le premier, a un unique déterminé qui le précède.
La série des nombres (I) est un exemple de ces séries qui ont un premier élément déterminé. Si l'on considère la série des nombres négatifs et positifs nous avons un exemple d'une série illimitée de première espèce qui n'a pas de premier et de dernier élément déterminés. En outre la série des nombres négatifs mais dans le sens positif, par ex: $\ldots \omega_1 - n \ldots \omega_1$ est une série illimitée de première espèce qui n'a pas de premier élément mais qui a le dernier élément (ω_1) déterminé!

1) Les nombres de la classe (II) peuvent se ranger successivement en séries illimitées de 1re espèce, celles-ci en séries analogues et ainsi de suite indéfiniment.

En effet chaque nombre de la classe (II) est de la forme $\gamma_1(\omega^\nu)$. En posant $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_\nu = 0$ et en laissant varier $\mu_{\nu+1}$ on a la série (I); si l'on voulait considérer aussi les valeurs négatives de $\mu_{\nu+1}$ il faudrait les ajouter à (II). L'indice maintenant la série (I) par le symbole $S_1^{(0)}$. Si $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{\nu-1} = 0$ et en laissant varier μ_ν μ_ν on a une série S_1, et par conséquent pour toutes les valeurs positives de μ_ν on a une série $S_2^{(0)}$ illimitées de première espèce par rapport aux série S_1. En continuant ainsi on voit que les nombres d'ordre ν constituent une série S_ν, que je dirai d'espèce ν.
La première série $S_3^{(0)}$ est la suivante:



si l'on indique par S_1 une quelconque des séries de première espèce contenues dans la $S_2^{(0)}$, par S_2 une quelconque des séries

de la 2e espèce contenues dans $S_3^{(0)}$, et ainsi de suite, nous aurons la série

$S_1\ S_2\ S_3 \ldots \ldots S_\nu \ldots$ respectivement

représentée par les nombres qui ont les symboles communs ~~suivants~~

$\omega_1, \omega_1^2, \omega_1^3 \ldots \omega_1^\nu \ldots$

Indiquons cette série avec $\Sigma_1^{(0)}$. Nous aurons toute de suite après la série $\omega_1^{\infty - m_1}\ \omega_1^{\infty - m_1 + 1} \ldots \omega_1^{\infty} \ldots \omega_1^{\infty + m_1} \ldots$ $\Sigma_1^{(1)}$

et chaque nombre de cette série représente une série S, c'est à dire :

$S_{\infty - m_1}, S_{\infty - m_1 + 1}, \ldots S_\infty \ldots S_{\infty + m_1}$

la première desquelles contient toutes les précédentes formées par les nombres ~~compris dans~~ de α plus petits que

$\alpha_1^{\infty - m_1} \mu_1 + \alpha_1^{\infty - m_1 + 1} \mu_2 + \ldots + \alpha_1^{\infty - m - m} \mu_m + \alpha_1^{\mu_1} \mu_1' + \alpha_1^{m-1} \mu_2' + \ldots + \mu_m'$.

2) La série des nombres donnés qui précèdent un nombre infini dans la classe (II) ou la première puissance. 5

Considérons le nombre

(1) $\qquad \omega_1^{\nu + m_{\nu+1}} + \omega_1^{\nu + m_\nu} + \ldots + \omega_{1, m_2 + m_1}$

de (II), où $m_1, m_2 \ldots m_{\nu+1}$ sont $\infty, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n \ldots$ et au moins un de nombres $m_2 m_3 \ldots m_{\nu+1}$ ne soit pas nul, si l'on veut que (1) soit infini. Supposons en premier lieu que ν soit fini $= m$, chaque nombre de cette forme dépend donc des nombres $m_1 m_2 \ldots m_{m+1}$. Laissons de côté d'abord les valeurs négatives des m; et que l'on considère les valeurs de $m_1, m_2 \ldots m_{m+1} \leqq 10$, en supposant que de (II) on lève le rèo en sorte que 1 corresponde au rèo, on aura 10^{m+1} nombres de (II) compris dans (1), qui correspondent ~~respectivement~~ à rang unique aux nombres de la série (I) de 1 jusqu'à 10^{m+1}. Que l'on pose après :

$m_1, m_2, \ldots m_{m+1} \overset{> 10}{\leqq} 100$

on aura encore $100^{m+1} - 10^{m+1}$ nombres de (II) qui correspondront aux nombres de (I) de 10^{m+1} jusqu'à 100^{m+1}, et ainsi de suite.

Si l'on considère aussi les valeurs négatives de $m_2 \ldots m_{m+1}$ il suffit de remarquer que la série des nombres négatifs et positifs entiers (I) peut se faire correspondre à la série des nombres positifs : il suffit par ex: de faire correspondre -1 à 2, 2 à 3, -2 à 4, 3 à 5 etc., de manière que lorsque m_1 prend les valeurs par ex: 2^{e13} on doit prendre dans (II) les valeurs correspondantes -1, et 2.

si nous nous arrêtons à un nombre donné pour lequel les ν sont donnés, s'il au moins ν_2 n'est pas ≤ 0, a fortiori évidemment la même propriété pour les nombres qui le précèdent. En effet les nombres qui précèdent les nombres infinis ne sont pas en nombre fini, et par conséquent leur série doit être au moins de la première puissance; mais elle ne peut pas être d'une puissance supérieure car cette série est contenue dans la série (1), lorsque, les ν sont indéterminés dans le sens usité, laquelle et cette série est de la première puissance.

Si μ est un nombre infini par ex: ω_1, il suffit de remarquer que toute la série $\xi^{(0)}$ donnée par le symbole (1) lorsque ν est fini et soit indéfiniment, est de la première puissance, comme il a été démontré, ainsi que les séries successives $\xi^{(1)}$ etc, et par conséquent par le théorème 1) le théor. 4 est démontré.

3) La classe (II) n'a pas la même puissance que (I).

En effet à vos nombres de la forme $\omega, \omega^2 \ldots \omega^\omega \ldots \omega^{\omega^\omega} \ldots$ on peut faire correspondre tous les groupes des nombres

$\omega_1 - \nu_1 \quad / \nu_1 = 0, 1, 2 \ldots \nu \ldots$

$\omega_1^2 - \omega_1 \nu_1 \pm \nu_2 \quad / \nu_1, \nu_2 = 0, 1, 2 \ldots \nu \ldots$, si $\nu_2 = 0$ doit être aussi > 0, dans le cas du signe $+$)

à ω^ω tous les nombres qui précèdent $\omega_1^{\omega_1}$ et suivent les nombres du champ infini d'ordre $\omega_1 - 1$, et au nombre ω^η les nombres qui précèdent ω_1^η, et suivent les nombres infinis d'ordre $\eta - 1$, étant η le nombre que l'on obtient de η en posant ω_1 en lieu de ω. Mais vous avez démontré que votre classe (II) n'a pas la même puissance de (I), donc le théor. est dém.

3') La classe (III) des mes nombres a la même puissance que votre classe (III).

*) acta math. Vol II pg 3, 4.

Supposons en effet que elle ait la puissance de votre classe (III), qui est immédiatement supérieure à celle de (II) selon la définition même de la même classe (III). Cela signifie donc qu'il y aura au moins un nombre ξ de votre classe (II) qui correspondra à un nombre ξ de la classe (III). Mais il faudrait dans ce cas que la série des nombres qui précèdent η était de la seconde puissance, ce qui est absurde (2), donc etc.

Rem I Nous pourrions continuer à former des autres classes de nombres comme les votres en les assujettissant au principe de continuité I et à l'hypothèse II, mais pour la suite il suffirait de l'arrêter aux seuls infinis comme nous verrons et infiniments petits d'ordre fini —

2) *Si $\mu=\mu'$, $\sigma=\sigma'$ on a $\mu+\sigma=\mu'+\sigma'$*

L'opération ω_1 est à sens unique par le principe même, car tout autre nombre de (II) est plus grand ou plus petit que ω_1, de même si μ est un nombre quelconque de (III) les autres nombres de (III) sont plus grands ou plus petits que μ, parce que tous les autres ou le précèdent ou le suivent dans la série (II). Donc si l'on part dans d'un nombre μ, il y a un seul nombre qui intervalle η tel que

$$\mu+\sigma=\eta \quad \text{(rem. nr. 3)}.$$

De σ on a le même intervalle qui représente les nombres μ et μ', et après, le même intervalle qui représente quand σ, etc, et par conséquent $\mu+\sigma$, $\mu'+\sigma'$ sont représentés par le même intervalle, mais nous ne savons pas encore si $\mu+\sigma$ est toujours un nombre de (III) (rem. nr. 3).

4) *Il y a un seul nombre σ qui satisfait à la relation*

$$\mu+\sigma=\eta$$

En effet si par ex: $\sigma'>\sigma$, cela signifie que à partir de 0 l'intervalle σ est contenu dans l'intervalle σ', sans être σ' même, et par conséquent l'intervalle $\mu+\sigma$ est contenu dans l'intervalle $\mu+\sigma'$ sans être $\mu+\sigma'$ même, donc

$$\mu+\sigma'>\mu+\sigma \quad \text{(def II, 4)}$$

Remarque Ces propriétés ont lieu aussi pour nos nombres.

3) *Il y a un seul nombre μ qui satisfait la relation*

$$\mu+\sigma=\eta$$

En effet soit $\mu<\mu'$, il y a donc un intervalle μ'' qui sépare μ' de μ, et par cela

$$\mu'+\mu''=\mu$$

si il était $\mu+\sigma=\eta$ $\quad \mu'+\sigma=\eta$

on aurait aussi $\mu'+\mu''+\sigma=\mu'+\sigma$

mais l'intervalle σ est contenu dans l'intervalle $\mu''+\sigma$ sans être cet intervalle, donc $\mu'+\sigma$ est contenu dans l'intervalle $\mu'+\mu''+\sigma$ sans être cet intervalle, par conséquent

$$\mu'+\sigma<\mu'+\mu''+\sigma \quad \text{(def 2, 4)}.$$

Remarque Si on rencontre une autre différence avec nos nombres, car pour ceux-ci l'équation $\beta+\alpha=\beta$ ou n'est pas toujours résoluble, comme dans le cas $\beta+w=w+1$, ou bien elle admette infinité solutions, comme par ex: $\beta+w=2w$. La différence consiste principalement dans le fait, que n'existent pas les nombres $w-1$, $w-2$ etc., qui n'existent pas. Comme les opérations associatives

4) *L'addition des nombres de (III) est commutative à la loi*

soient $(\alpha\gamma)$, $(\alpha\varepsilon)$, $(\varepsilon\delta)$ les intervalles qui correspondent successivement aux nombres μ, μ', μ'' à partir de 0; $(\alpha\gamma)+(\alpha\varepsilon)$ qui représente

$\mu+\mu'$ donne l'intervalle $(\alpha\gamma)$. L'intervalle $(\alpha\gamma)+(\gamma\delta)=(\alpha\delta)$ représente le nombre $(\mu+\mu')+\mu''$. Or, $(\alpha\gamma)+(\gamma\delta)\equiv(\alpha\delta)$ représente à partir de β le nombre $\mu'+\mu''$, et

$$(\alpha\gamma)+(\gamma\delta)=(\alpha\delta)$$

le nombre $\mu+(\mu'+\mu'')$

mais de α il y a un seul intervalle égal à $(\alpha\delta)$, (nom. 4) donc

$$(\mu+\mu')+\mu''=\mu+(\mu'+\mu'')$$

la loi a lieu pour un nombre quelconque fini de termes; mais elle a lieu aussi pour un nombre infini de termes, toujours dans le cas que la somme donne un nombre ou intervalle déterminé de $(\alpha\beta)$.

Supposons par ex que l'on ait la somme:

$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{\omega_1-n}+\mu_{\omega_1-n+1}+\cdots+\mu_{\omega_1-1}+\mu_{\omega_1},$$

si elle détermine l'intervalle $(\alpha\gamma)$ à partir de 0, qui s'obtient de l'intervalle $(\alpha\beta)$, qui représente par ex. $\mu_1+\cdots+\mu_{\omega_1-n}$, en lui ajoutant l'intervalle $(\beta\gamma)$ qui représente la somme restante; et par conséquent si nous séparons les nombres μ en deux groupes, toujours dans l'ordre dans lequel ils se suivent, nous obtenons le même intervalle ou le même nombre. Par ex:

$$(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{\omega_1-1})+(\mu_{\omega_1}+\mu_{\omega_1+1}+\cdots)=(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{\omega_1-1})+\mu_{\omega_1},$$

5) L'addition d'un nombre fini de nombres est soumise à la loi commutative

Soit donné par ex. le groupe ordonné d'éléments

(1) $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{\omega_1-1}\alpha_{\omega_1}\alpha_{\omega_1+1}$

qui est obtenu par la simple succession à l'élément α du groupe donné $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\omega_1+1}$, qui représente dans l'ordre donné, des ses éléments le nombre ω_1+1. En faisant correspondre dans le groupe (1) à chaque élément son successeur, de manière que α_1 corresponde à α_2, α_2 à α_3, etc α_{ω_1} à α_{ω_1+1}, les deux groupes

$$\alpha\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\omega_1-1}\alpha_{\omega_1}$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{\omega_1}\alpha_{\omega_1+1}$$

se correspondent univoquement et dans le même ordre et par conséquent ils déterminent le même nombre donc

$$1+\omega_1=\omega_1+1$$

et l'on a aussi $n+\omega_1=\omega_1+n$.

Les deux groupes

$$\alpha\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\omega_1-2}\alpha_{\omega_1-1}$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{\omega_1-1}\alpha_{\omega_1}\alpha_{\omega_1+1}$$

ne se correspondent pas de la même manière indiquée, car à α_{ω_1-1} ne correspond pas l'élément successif α_{ω_1}, mais α_{ω_1+1}. On peut

établi une correspondance univoque et dans le même ordre parmi les éléments de la série $\nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots \nu_n \dots$, par ex: $\nu_1 \nu_2$, $\nu_2 \nu_{n+1}$, etc en ne sortant jamais de la série, mais si nous entrons aussi dans la série $\dots \nu_{\omega,n} \nu_{\omega,n+1} \dots \nu_{\omega,}$ qui est liée avec la première par l'axe dans le quel se suivent ses éléments, car mes nombres infinis sont donnés par des groupes ordonnés limités à deux esteins en levant ν_ω on ne peut plus établir la correspondance univoque et dans le même ordre, parceque la seconde série doit commencer par un élément $\nu_{\omega,-n}$ quelque soit n, et non pas de $\nu_{\omega,}$.

T c'est impossible d'appliquer l'idée de l'égalité absolue à vos nombres, car si l'on imagine pour un moment que l'on puisse considérer dans votre série [illegible] un intervalle ou un nombre égale à ω à partir de ν, de manière que le nombre résultant soit plus grand que ω, on aurait entre ν_ω et $\nu_{\omega+\omega}$ ou ω, et par conséquent ν_ω et $\nu_{\omega+\omega}$ ne serait pas le premier nombre infini.

D'autre côté l'intervalle $(\nu \dots \omega_1)$ n'est pas égal à l'intervalle $(0 \dots \omega_1)$, car il contient dans $(0 \dots \omega_1)$ sans être cet intervalle (ν, η, η, η), donc $\nu + \omega_1 > \omega_1$. Si l'on veut conserver cette inégalité et d'autre part si l'on veut faire usage de la correspondance univoque et de même ordre pour la règle comparaison des nombres il faut que la correspondance de la première série lorsque n croit indéfiniment entraîne celle de la seconde, comme dans le cas précédent

T La droite ordinaire d'Euclide parcourue dans une direction donne nous donnée une idée (mais pas complète) d'un groupe qui contient ω_1 éléments.

Semblablement si l'on a les groupes

$$\nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots \nu_{\mu-1} \nu_\mu$$
$$\nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots \nu_\mu \nu_{\mu+1}$$

qui donnent le même nombre, c'est à dire $\mu + 1 = 1 + \mu$, et par cela

$$n + \mu = \mu + n.$$

J'ici on déduit aussi

(4) $$\sigma - n + \mu = \sigma + \mu - n$$

en effet $\sigma - n + \mu = \sigma - n + \mu + n - n = \sigma - n + n + \mu - n = \sigma + \mu - n$

et en général si μ et η sont des nombres infinis de $\mu < \eta$, et l'on considère les groupes

$$\nu^{(1)} \nu^{(2)} \dots \nu^{(k-1)} \nu^{(k)} \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{\eta-\mu-1} \nu_{\eta-\mu} \nu_{\eta-\mu+1} \dots \nu_{\eta-1} \nu_\eta$$
$$\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{\mu-1} \nu_\mu \nu_{\mu+1} \nu_{\mu+2} \dots \nu_{\eta-1} \nu_\eta \nu_{\eta+1} \dots \nu_{\eta+\mu} \nu_{\eta+\mu}$$

le second s'obtient du premier en substituant remplaçant aux premiers μ éléments les μ éléments $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_\mu$ dans le même ordre, et en ajoutant de ν_η en avant l'indice μ, en gardant en outre de cette façon la (2). Mais ainsi on peut faire correspondre à un ensemble et dans le même ordre les deux groupes donnés, donc on a:

(3) $$\mu + \eta = \eta + \mu$$

la loi commutative a bien évidemment lieu pour un nombre fini quelconque de nombres.

Rem. Cette propriété n'a pas lieu pour vos nombres, en effet comme vous l'avez fait voir au moyen de la correspondance univoque et même ordre on voit que $\omega \geq \omega + 1$ tout différents.

5°) Les intervalles entre deux nombres de (II) s'expriment toujours avec des nombres de la même classe.

En effet soient μ et η deux nombres de (II), et σ le nombre qui représente l'intervalle (μ,η); on sait que $\sigma = -\mu + \eta$ (rem. no. 1).

On a $\mu + \sigma = \eta$

ou $\sigma + \mu = \eta$

et par conséquent $\sigma = \eta - \mu$

qui est un nombre de (II), car μ et η sont des nombres de cette classe. Par ex:

$$2 + \sigma = \omega_1$$

on a $\sigma = \omega_1 - 2$.

qui est un des nombres de (II).

5°) La somme $\mu + \eta$ lorsque μ et η sont des nombres de (II) appartient également à (II)

En effet μ et η sont de la forme Z (no. 4), et par loi commutative de la somme d'un nombre fini de nombres le théorème est démontré

6) Pour l'addition d'un nombre infini des nombres, qui représente un nombre de II a lieu aussi la loi commutative comparablement à la nature de nombre ω_1.

Soit $\eta = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_{\omega_1 - n} + \mu_{\omega_1 - n+1} + \cdots + \mu_{\omega_1 - 2} + \mu_{\omega_1 - 1} + \mu_{\omega_1}$

nous avons

$$\eta = (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{\omega_1 - 1}) + \mu_{\omega_1} \quad (3)$$

puisque la parenthèse représente un nombre de (II), c'est à dire l'on a:

$\eta - \mu_{\omega_1}$,

$$\eta = \mu_{\omega_1} + (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{\omega_1 - 1})$$

et par ale aussi:

$$= \mu_{\omega_1} + (\mu_{\omega_1 - 1} + \mu_2 + \cdots + \mu_{\omega_1 - 2})$$

$$= \mu_{\omega_1} + \mu_{\omega_1 - 1} + (\mu_1 + \cdots + \mu_{\omega_1 - 2})$$

et en continuant ainsi, on a:

$$\eta = (\mu_{\omega_1} + \mu_{\omega_1 - 1} + \cdots + \mu_{\omega_1 - n} + \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m + \cdots)(\mu_{m+1} + \cdots + \mu_{\omega_1 - n+1})$$

$$= (\mu_{\omega_1} + \mu_{\omega_1 - 1} + \cdots + \mu_{\omega_1 - n})(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m + \cdots)(\mu_{m+1} + \cdots + \mu_{\omega_1 - n+1})$$

si on croit en place μ_{m+1} vient en place avant de μ_m et $\mu_{\omega_1 - n+1}$ après de $\mu_{\omega_1 - n}$, et par conséquent si on voit indéfiniment; ce lorsque étant déterminés on a $\eta = \mu_{\omega_1} + \mu_{\omega_1 - 2} + \cdots + \mu_{\omega_1 - n} + \cdots + \mu_m + \mu_{m+1} + \cdots + \mu_0$

De ce que nous venons de dire plus haut sur l'égalité des nombres infinis, les éléments du groupes $(a_1 a_2 \cdots a_n \cdots a_{\omega_1})$ se trouvent bien correspondre à sens unique et dans le même ordre aux éléments du groupe $(a_1 a_2 \cdots a_n \cdots a_{\omega_1} a_{\omega_1 - 1} \cdots a_{\omega_1 - n} \cdots)$

car si l'élément α_∞ du second groupe devrait correspondre le premier élément après la même série, qui n'existe point, dans l'exemple précédent de la droite cela equivaudrait à considérer d'abord le segment de la droite à partir de A dans le sens indiqué par la flèche, et de considérer après le segment restant de A dans le sens opposé, ce qui contredirait au fait que ce segment doit être considéré dans la même direction donnée. On peut donc faire tout changement de place dans les séries et entre les séries de manière à ne changer pas l'ordre relatif des deux séries; il faut donc que dans ces changements de place à fin que le nombre ne change pas le groupe d'un nombre infini d'éléments reste toujours composé de séries opposées, comme par ex: $1\,2\,3\cdots n\cdots, \ldots \alpha_{\nu-n}\ldots\alpha_\nu$, c'est à dire, comme nous disons, que ne soit pas altérée la nature même ou nombre ∞_ν.

Ainsi on ne peut pas avoir dans le cas précédent

$$\eta = \varphi_1 + \varphi_2 x \cdots + \varphi_n + \cdots + \varphi\infty_1 + \varphi\alpha_{\nu-1} + \cdots + \varphi\infty_n + \cdots$$

Ex. 1
$$\varphi\infty_1 = \left|\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right| + \left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right| + \cdots + \left|\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right| + \cdots + \left|\frac{1}{\alpha_{\nu-n-1}}+\frac{1}{\alpha_{\nu-n-1}}\right| + \left|\frac{1}{\alpha_{\nu-n}}+\frac{1}{\alpha_{\nu-n}}\right| + \cdots$$
$$+ \left|\frac{1}{\alpha_{\nu-\theta}}+\frac{1}{\alpha_{\nu-\theta}}\right| + \left|\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\alpha_\nu}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{\nu-n-1}}+\frac{1}{\alpha_{\nu-n-1}}\right| + \left|\frac{1}{\alpha_{\nu-n}}+\frac{1}{\alpha_{\nu-n+1}}+\cdots+\frac{1}{\infty_\nu}\right|\right.$$
$$+ \left|\frac{1}{\alpha_{\nu-n}}+\frac{1}{\alpha_{\nu-n+1}}+\cdots+\frac{1}{\infty_\nu}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{\infty_{\nu-n}}+\frac{1}{\alpha_{\nu-n+1}}+\cdots+\frac{1}{\infty_\nu}\right| + \left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{\nu-n-1}}+\frac{1}{\alpha_{\nu-n-1}}\right| + \left|\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{\alpha_{\nu-n}}+\frac{1}{\alpha_{\nu-n}}\right|$$

en transportant $\frac{1}{n+1}$ après $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{\alpha_{\nu-n-1}}$ après $\frac{1}{\alpha_{\nu-n}}$ on a ainsi en continuant

$$= \left|\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{\nu-n}}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}\right| + \left|\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{\alpha_{\nu-n}}+\frac{1}{\alpha_{\nu-n+1}}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}\right|$$

ou

$$= \alpha_{\nu.2}.$$

Ex. 2.
$$\infty_\nu = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{\nu-n}}+\frac{1}{\alpha_{\nu-n+1}}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}$$
$$= \left|\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{\nu-(n+1)}}\right| + \left|\frac{1}{\infty_{\nu-n}}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{\nu-(n+1)}}\right| + \left|\frac{1}{\infty_{\nu-n}}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}\right|\left|\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{\nu-(n+1)}}\right| + \left|\frac{1}{\infty_\nu}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1\right|$$

Il suit indéfiniment on porte l'unité $\frac{1}{n+1}$ après $\frac{1}{n}$ et l'unité $\frac{1}{\alpha_{\nu-(n+1)}}$ après $\frac{1}{\infty_{\nu-n}}$, et par conséquent on voit indéfiniment la première série disparaître

et on complète la seconde, et l'on a :

$$\omega_1 = \frac{1}{\omega_1'} + \frac{1}{\omega_1'-1} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$$

Ex. 3 $\omega_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{\omega_1-2n+2} + \frac{1}{\omega_1-2n+1} + \frac{1}{\omega_1-2n} + \frac{1}{\omega_1-2n+1} + \cdots + \frac{1}{\omega_1-1} + \frac{1}{\omega_1}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{\omega_1-2n-3} + \frac{1}{\omega_1-2n-2} \Big| \frac{1}{2}$$

$$+ \Big| \frac{1}{\omega_1-2n-1} + \frac{1}{\omega_1-2n+1} + \cdots + \frac{1}{\omega_1-1} \Big| + \frac{1}{\omega_1-2n} + \cdots + \frac{1}{\omega_1-2n+2} + \cdots + \frac{1}{\omega_1-2} + \frac{1}{\omega_1} \Big|$$

$$= \Big| \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{\omega_1-2n} + \frac{1}{\omega_1-2n+2} + \cdots + \frac{1}{\omega_1-2} + \frac{1}{\omega_1} \Big| + \Big| \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{\omega_1-2n-3} + \frac{1}{\omega_1-2n-2} \Big| + \Big| \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{\omega_1-2n+1} + \cdots + \frac{1}{\omega_1-1} \Big|$$

En transportant $2n+2$ après $2n$ et ω_1-2n-2 avant de $\frac{1}{\omega_1-2n}$, et $2n+3$ après de $\frac{1}{2n+1}$ et $\frac{1}{\omega_1-2n-3}$ avant de $\frac{1}{\omega_1-2n-1}$, et en continuant ainsi indéfiniment jusqu'à ce que la série moyenne disparaît, on complète les deux séries extrêmes, qui sont égales entre elles et chacune est moitié de la ~~dernière~~ série moyenne, car les unités de la ~~dernière~~ première ~~et de la seconde~~ dernière séparation sont $2n+1$, et les unités de la série moyenne se transportent successivement deux à deux dans les dernières séries. Si l'on indique avec ω_1' le nombre correspondant à ces deux séries on a :

$$\omega_1 = \omega_1' \cdot 2$$

que nous écrirons aussi sous la forme :

$$\omega_1' = \frac{\omega_1}{2}$$

Le nombre n'appartient pas à la classe (II), mais il est compris entre 0 et ω_1. Cependant jusqu'à ce que l'on ne suppose pas l'existence de ce nombre, et on sait les deux séries seules données seulement, $1, 2, \ldots n, \ldots \omega_1 - n \ldots \omega_1$, alors nous ne pouvons pas former deux nouvelles couples de séries opposées avec les deux séries données ; dans ces cas n est autant grand que l'on veut, mais toujours donné, et ~~dans le sens~~ il ne peut pas devenir indéfiniment grand.

En continuant ainsi sous les conditions établies on démontre la loi commutative pour un nombre infini des nombres.

b/ Si dans un groupe ordonné qui contient un nombre infini d'éléments on change l'ordre des éléments sans altérer la nature du nombre ω_1, le groupe résultant représente le même nombre.

II. Pour la multiplication des nombres de (II) a lieu la loi distributive

Si l'on considère un nombre de (II), par ex :

(1) $\omega_1^{\mu} n_1 \pm \omega_1^{\mu-1} n_2 \pm \cdots \pm \omega_1^2 n_{\mu-1} \pm \omega_1 n_\mu \pm n_{\mu+1}$

et si l'on multiplie un nombre η par (1), cela signifie qu'il faut le prendre $\omega_1^{\mu} n_1$ fois, après $\pm \omega_1^{\mu-1} n_2$ fois etc de manière que l'on a

par la définition même

$$\gamma\,(\omega_1^{\mu}\eta_0 \pm \omega_1^{\mu-1}\eta_1 \pm \cdots \pm \eta_{\mu+1}) = \gamma\,\omega_1^{\mu}\eta_0 \pm \cdots \pm \gamma\,\eta_{\mu+1}$$

si γ est un nombre entier positif, le multiplicande et γ le multiplicateur, cela signifie que l'on doit répéter (1) γ fois (cours n. 4); on a dans cette opération chaque nombre de (1) deux fois répété γ fois, et par la loi commutative de la somme on aura:

$$(\omega_1^{\mu}\eta_1 \pm \cdots \pm \eta_{\mu+1})\gamma = \omega_1^{\mu}\eta_1\gamma \pm \cdots \pm \eta_{\mu+1}\cdot\gamma$$

7) La division des nombres de (II) est aussi soumise à la loi distributive cela dérive de la déf. même de cette opération.

évidemment s'il s'agit de la somme (ou de la différence) de plusieurs nombres (1), a lieu la même propriété.

1) **La multiplication de deux nombres de (II) est soumise à la loi commutative**

Cette propriété peut être démontrée directement de la loi commutative de la somme, mais peut être aussi démontrée en employant la loi distributive et le cas déjà considéré $2\omega_1 = \omega_1 \cdot 2$.

9) Il y a un seul nombre μ et un seul nombre ν tels que $\mu\cdot\nu = \gamma$. Si $\nu' \gtrless \nu$ de la déf. même de la multiplication et par les propriétés de l'addition $\mu\nu' \gtrless \mu\cdot\nu$

on a: $\mu\nu = (\mu'+\mu'')\nu = \mu'\nu + \mu''\nu$

à l'inverse $\mu = \mu' + \mu''$

$\mu\nu > \mu'\nu$.

On

$\frac{1}{\eta}$ Si l'on introduit les nombres fractionnaires infiniment petits du type $\frac{1}{\eta}$, ils sont représentés aussi par des intervalles qui tout compris parmi ceux de la classe (II). Pour les opérations fondamentales ces nombres on a les mêmes règles que pour les nombres fract. finis. Leur addition ou soustraction équivaut à une addition ou soustraction d'intervalles dans le sens convenu au n. 4, et la multiplication de l'un par l'autre équivaut au multiple d'un sous-multiple de l'intervalle représenté par le premier nombre.

Déf. La nouvelle classe des nombres ainsi obtenus je l'appelle classe (II') des nombres rationnels absolus de 2ème espèce.

1) Tous les nombres rationnels absolus de 2ème espèce infiniment petits jusqu'à l'ordre μ, y compris tous ceux dont les ordres sont finis avec μ, forment un groupe qui se transforme en soi même par les quatre opérations fondam. appliquées un nombre fini de fois.

Soit μ entier et infini d'ordre σ; le type fondamental de μ est ω_1^{σ}, et par conséquent le type des nombres infinis d'ordre μ est $\omega_1^{\sigma}\cdot n$, n étant un nombre de (I), aussi fini. Tout nombre infini d'ordre fini avec ceux d'ordre μ, sont du type $\omega_1^{\sigma}\cdot n$

Si deux de ces nombres ν, tous les nombres μ plus grands sont donnés
qui les composent sont de la forme :

$$\omega_1^{\omega_1^{\sigma}\nu}, \quad \omega_1^{\omega_1^{\sigma}\mu}$$

et si l'on multiplie ces deux nombres, on obtient évid. un
nombre du même groupe, car on a :

$$\omega_1^{\omega_1^{\sigma}\nu} \cdot \omega_1^{\omega_1^{\sigma}\mu} = \omega_1^{\omega_1^{\sigma}(\mu+\nu)}.$$

Si le théor. est vrai pour la multiplication, à plus grande raison
y est-il vrai pour la somme.

Tout nombre fractionnaire ou toute division se peut mettre
sous la forme $\frac{\eta}{\xi}$, où ξ et η sont des nombres de (II), ce qui est évident
puisque les opérations fondamentales ces nombres ne sauraient entre eux
ou avec les nombres entiers conduisent à des nombres du
même groupe

1°) Les nombres rationnels absolus de 1ère espèce finis infinis et infiniment petits d'ordre fini
forment un groupe qui a la même propriété

Dans tes cas β est un nombre fini.

Rem. Si dans la définition d'un nombre infini de nombres par α
ω_1^{μ}, il y a un nombre maximum ω_1^{ν}, la somme évidemment
sera plus petite de $\omega_1^{\nu} \cdot \omega_1^{m} = \omega_1^{\nu+m}$, qui est un des nombres
du groupe misrit. On ne peut pas dire autant de la
multiplication, car en multipliant ω_1 un
nombre ω_1 de fois par lui même, on a le nombre $\omega_1^{\omega_1}$
qui n'est pas compris dans le groupe 1°).

§ 10 Si nous introduisons les nombres irrationnels par rapport à toutes
les unités $1, \omega_1^{1}, \omega_1^{2} \ldots \omega_1^{m} \ldots \omega_1^{\omega_1}$ etc nous avons
des autres nombres compris dans qui sont représentés par des
intervalles d'une nouvelle classe qui contient la classe (I').
En se bornant au champ des infinis et infiniment
petits d'ordre fini, c'est à l'intervalle $(0 \ldots 1)$, les nombres
rationnels et les irrationnels sont donnés par le
symbole

$$\frac{\nu}{\mu} = \left| \frac{\alpha_1^{(0)}}{2} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{2^n} \right| \pm \frac{m_1}{\omega_1} \left| \frac{\alpha_1^{(1)}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{2^{n_1}} \right| \pm \cdots$$

$$\pm \frac{m_m}{\omega_1^{m}} \left(\frac{\alpha_1^{(m)}}{2} + \cdots \pm \frac{\alpha_{n_m}^{(m)}}{2^{n_m}} \right)$$

où les α sont indépendamment l'un de l'autre $= 0, 1$; $m, m_1 \ldots m_m$
sont des nombres finis; et les n sont aussi des nombres finis
donnés, ou bien qui deviennent indéf. grands, c'est à
dire $/n = 1, 2, \ldots r \ldots = \infty /$.

Les nombres représentés par le symbole Σ je les appelle nombres
obtenus de la division successive par moitié de l'intervalle
$(0 \ldots 1)$ le nombre représenté par la première parenthèse
si cet donné que nous considérons le champ infiniment petit

de 1er ordre autour de lui; pour cela il y a dans ζ_1 la seconde parenthèse, de même la troisième et ainsi de suite; $\pm m_\mu \rho^\mu$ indique que l'unité de champ infiniment petit de 1er ordre dans laquelle on a effectué l'opération indiquée par la seconde parenthèse.

Tout autre nombre représenté par un intervalle limité, et qui n'est pas compris dans le symbole ζ_1, mais qui est contenu dans l'intervalle $(0\ldots1)$, doit être compris entre deux nombres de ζ_1, par ex: il sera compris entre deux nombres de la division par moitié de la première unité, dont la différence soit $\frac{1}{2^{\mu_1}}$; ensuite entre deux nombres du champ infiniment petit de 1er ordre, dont la différence soit $\frac{1}{2^{\mu_1}\omega_1}$, et ainsi de suite; et enfin il sera compris entre deux nombres de la division par moitié du champ infiniment petit d'ordre m, dont la différence sera $\frac{1}{2^{\mu_1}\omega_1^m}$. On voit indéfiniment le nombre $\frac{1}{2^{\mu_1}\omega_1^m}$ devenir plus petit que chacun nombre donné δ du groupe. Nous convenons donc que lorsque on voit indéfiniment δ_1 déterminent un nouveau nombre de $(0\ldots1)$, et par conséquent un intervalle déterminé de $(0\ldots1)$.

En considérant successivement les autres nombres infiniment petits que avec les premiers forment un groupe fermé selon le théo. 1) nr. 7, les nombres obtenus avec la division successive en p parties égales, étant p un nombre de (I), et qui sont compris dans l'intervalle $(0\ldots1)$ seront indiqués par le symbole

$$\zeta_2 = \left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{p} + \ldots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{p^n}\right) \pm \frac{m_1}{\omega_1}\left(\frac{\alpha_1^{(1)}}{p} + \ldots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{p^n}\right) \pm \ldots$$

$$\pm \frac{m_n}{\omega_1^n}\left(\frac{\alpha_1^{(n)}}{p} + \ldots + \frac{\alpha_n^{(n)}}{p^n}\right) \pm \frac{m_{\omega_1-r_1}}{\omega_1^{\omega_1-r_1}}\left(\frac{\alpha_1^{(\omega_1-r_1)}}{p} + \ldots + \frac{\alpha_{n_1-r_1}^{(\omega_1-r_1)}}{p^{n_1-r_1}}\right) \pm \ldots$$

$$\pm \ldots \pm \frac{m_\mu}{\omega_1^\mu}\left(\frac{\alpha_1^{(\mu)}}{p} + \ldots + \frac{\alpha_{n_\mu}^{(\mu)}}{p^{n_\mu}}\right)$$

où p et μ sont des nombres donnés. $\alpha = 0, 1, 2 \ldots p-1$; les n et les m ceux qui se rapportent aux groupes précédents aux quels n'appartient pas μ, sont aussi donnés ou indéfiniment grands (ω).

Lorsque μ croît indéfiniment en sens absolu, c'est-à-dire lorsque μ devient plus grand que un nombre quelconque donné de (II), nous écrivons limes $\mu = \infty$.

Si limes $\mu = \infty$ on a un autre nombre qui n'est pas contenu dans ζ_2, si dans ζ_2 μ est donné un nombre de (II), mais qui peut être représenté par ζ_2 lorsque on suppose que μ devienne indéfiniment grand en sens absolu.

Tout nombre compris entre 0 et 1 peut s'exprimer avec la
division en η parties égales, c'est à dire le symbole:

$$\frac{\nu}{\eta^{\nu}} = \left| \frac{\alpha_1^{(0)}}{\eta} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{\eta^2} + \cdots + \frac{\alpha_{\eta}^{(0)}}{\eta^{\eta}} \right|$$

$$\pm \frac{m_1}{\omega_1^{\sigma\,|\omega_1 \cdot r_1|}} \left| \frac{\alpha_1^{(1)}}{\eta} + \cdots + \frac{\alpha_{m_1}^{(1)}}{\eta^{m_1}} \right|$$

$$\pm \frac{m_2}{\omega_1^{\sigma\,|2\omega_1 - r_2|}} \left| \frac{\alpha_1^{(2)}}{\eta} + \cdots + \frac{\alpha_{m_2}^{(2)}}{\eta^{m_2}} \right|$$

$$\pm \cdots \pm \frac{m_s}{\omega_1^{\sigma\,|s\omega_1 - r_s|}} \left| \frac{\alpha_1^{(s)}}{\eta} + \cdots + \frac{\alpha_{m_s-1}^{(s)}}{\eta^{s}} \right|$$

$$\pm \cdots \pm \frac{m_{\omega_1 - \mu_1}}{\omega_1^{\sigma\,|\omega_1^2 - \omega_1\mu_1 - r_1^{(\nu)}|}} \left| \frac{\alpha_1^{(\omega_1 - \mu_1)}}{\eta} + \cdots + \frac{\alpha_{m\omega_1 - \mu_1}^{(\omega_1 - \mu_1)}}{\eta^{m\omega_1 - \mu_1}} \right| \cdots$$

$$\pm \cdots \pm \frac{m_\mu}{\omega_1^{\sigma\,|\omega_1\mu - r_1^{(\mu)}|}} \left| \frac{\alpha_1^{(\mu)}}{\eta} + \cdots + \frac{\alpha_{m_\mu}^{(\mu)}}{\eta^{m_\mu}} \right|$$

où η est de l'ordre σ, les α peuvent prendre les valeurs $0, 1, 2 \cdots \eta - 1$
et en outre toutes les valeurs finies par rapport à η et
qui s'obtient de $\eta\nu$ avec la division par moitié. Les $\alpha^{(1)}$ sont finis ou
infinis (ω) les r sont
des nombres finis et
μ peut être un nombre
donné de (II), ou bien
être un nombre
qui croît indéfiniment en sens absolu.
Dans le premier cas je
dis que $\frac{\nu}{\eta^{\nu}}$ représente
un élément ou nombre
de la division en
η parties égales.

Def I Les nombres obtenus avec la division en η parties égales
mais qui ne peuvent pas se mettre sous la forme $\frac{\mu}{\eta}$,
μ et η étant des nombres de (II), s'appellent nombres
rationnels absolus de la seconde espèce; j'appelle
tandis que les autres nombres qui ne sont pas rationnels
s'appellent irrationnels absolus, et tous ensemble nombres
réels absolus.

Maintenant soit X un nombre réel quelconque, on peut cons-
truire des séries de nombres (Y) toujours croissantes ou toujours
décroissantes (Y'), telles que $X - Y$ dans le premier cas,
ou $Y - X$ dans le second, deviennent plus petits de toute grandeur
nombre donné $\frac{1}{\mu}$. Entre deux nombres
α et β il y a un nombre infini des nombres, et en
outre deux séries de variables l'une
toujours croissante (X) l'autre toujours décroissante (Y),
de manière que $Y - X$ deviennent plus petit que toute grandeur
nombre donné $\frac{1}{\mu}$, déterminent un et un seul
nombre du système.
Si nous considérons par ex. l'infiniment petit $\frac{1}{\omega_1 - m}$, il est

fini par rapport à l'infiniment petit $\frac{1}{\omega_1}$, en ω_1 et $\omega_1 - m$ sont infinis de 1er ordre — une série qui donne lieu à ce nombre au moyen des unités $\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_1^2} \cdots \frac{1}{\omega_1^\mu}$ est la suivante :

$$\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{m}{\omega_1^2} + \cdots + \frac{m^n}{\omega_1^{n+1}} + \cdots\right) + \left(\frac{m^{n-1}}{\omega_1^{\omega_1 - n}} + \frac{m^n}{\omega_1^{\omega_1 - n+1}} + \cdots + \frac{m^{2n+1}}{\omega_1^{\omega_1}} + \cdots\right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{m^{n-1}}{\omega_1^{\mu-n}} + \frac{m^n}{\omega_1^{\mu-n+1}} + \cdots + \frac{m^{\mu+m-1}}{\omega_1^{\mu+m}} + \cdots\right)$$

pardessus $\mu = \lambda$

Si nous nous arrêtons au terme $\frac{m^{2n+1}}{\omega_1^\mu}$ on a :

$$\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{m}{\omega_1^2} + \cdots + \frac{m^n}{\omega_1^{n+1}} + \cdots\right) + \left(\frac{m^{n-1}}{\omega_1^{\omega_1 - n}} + \cdots + \frac{m^{2n+1}}{\omega_1^{\omega_1}} + \cdots\right) + \left(\frac{m^{n-1}}{\omega_1^{\mu-n}} + \cdots + \frac{m^{2n+1}}{\omega_1^\mu}\right)\left(\omega_1 - m\right) + 1 - \frac{m^{2n+2}}{\omega_1^\mu} < 1$$

tandis que l'on a

$$\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{m}{\omega_1^2} + \cdots + \frac{m^n}{\omega_1^{n+1}} + \cdots\right) + \left(\frac{m^{n-1}}{\omega_1^{\omega_1 - n+1}} + \cdots + \frac{m^{2n+1}}{\omega_1^{\omega_1}} + \cdots\right) + \left(\frac{m^{n-1}}{\omega_1^{\mu-n}} + \cdots + \frac{m^{2n+1}}{\omega_1^\mu} + \frac{1}{\gamma^n \omega_1^\mu}\right)\left(\omega_1 - m\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{\gamma^n \omega_1^{\mu-1}} - \frac{m}{\omega_1^\mu}\left(m^{n+1} + \frac{1}{\gamma^n}\right)$$

La différence entre ces deux nombres est

$$\frac{1}{\gamma^n \omega_1^{\mu-1}} + \frac{m^{2n+2}}{\omega_1^\mu}$$

qui devient indéf. en sens absolu lorsque $\mu = \lambda$.

La différence des nombres correspondants, desquels on considère les multiples selon $\omega_1 - m$ est $\frac{1}{\gamma^n \omega_1^\mu}$, qui devient aussi indéf. petite en sens absolu.

Déf II Ce système de nombres ou d'intervalles nous l'appelons continu absolu, absolu dans le sens que nous n'entendons pas de dépasser les limites de la classe II. Si nous posions des autres classes de nombres entiers analogues aux notres, on aurait des continus plus étendus.

S'il était démontré que le continu correspondant à la classe II à la troisième puissance, on le pourrait appeller avec plus de précision continu de la troisième puissance.

Je ne sais pas si vous avez donnée la démonstration que le continu numérique ordinaire est de la II puissance comme vous avez promis dans vos travaux que je connais.

Déf III On démontre facilement, ce que j'appelle nombres finis absolus, de même on démontre facilement ces théorèmes :

1) Chaque nombre multiple d'un autre δ selon un nombre fini d'ordre σ est un nombre infini d'ordre σ par rapport au second et chaque nombre multiple d'un autre infini d'ordre μ selon un

nombre infini d'ordre γ est de l'ordre $\mu+\gamma$

1°) Si ξ est un nombre infiniment petit d'ordre γ par rapport à un nombre α, les multiples de ξ selon des nombres infinis du même ordre γ sont finis avec α.

1°) Si ξ est un nombre infiniment petit d'ordre γ par rapport à un nombre α, chaque nombre infini d'ordre $\mu<\gamma$ par rapport à ξ est infiniment petit d'ordre $\gamma-\mu$ par rapport à α.

2°) Etant donnés deux nombres α et β $(\alpha<\beta)$ quelconques il y a toujours un nombre fini ou infini entier γ tel que $\alpha.\gamma > \beta$

de manière que $\alpha\gamma$ est fini avec β; ou bien si γ est de l'ordre μ, en multipliant avec 1_μ l'unité ω_μ on a:

$$\alpha\gamma_0 \leqq \beta < \alpha(\gamma_0+1_\mu) \qquad (\gamma_0 = \gamma - 1_\mu)$$

ou bien $\alpha.\gamma.m \leqq \beta < \alpha\gamma_0(m+1)$.

En effet si α et β sont infinis du même ordre, ils sont finis entre eux. Si α est infini d'ordre μ, β d'ordre μ' et $\mu' = \mu + \mu''$, en prenant de α un multiple selon un nombre infini d'ordre μ'' on a un nombre du même ordre que β, et par conséquent fini avec β.

Si γ' est un nombre infini d'ordre μ'', on aura un des trois cas

$$\alpha\gamma' \leqq > \beta$$

Dans le 1er et 2e cas on peut toujours donner un nombre γ du même ordre de μ'' tel que

$$\alpha\gamma > \beta$$

$$\alpha\gamma \leqq \beta < \alpha(\gamma+1_{\mu''})$$

ou encore

$$\text{accp}\quad \alpha\gamma.m \leqq \beta < \alpha\gamma(m+1).$$ x)

ou bien

3°) Chaque nombre donné α est infiniment petit d'un ordre déterminé γ par rapport à un autre nombre $\beta > \alpha$, si α n'est pas fini avec β.

En effet on doit avoir un nombre infini déterminé entier γ tel que $\alpha\gamma \geqq \beta$

étant $\alpha\gamma$ fini avec β, donc α est infiniment petit d'ordre γ par rapport à β.

4°) Pour les principes I — V du continu je vous prie de voir la lettre de M. Stolz. Vous voyez que ces propriétés sont satisfaites par les nombres de mon système xx)

x) on a aussi: si $\alpha<\beta$ on a toujours un nombre rationnel absolu $\frac{p}{q}$ ou de 2e espèce tel que $\alpha\frac{p}{q} \leqq \beta < \alpha\frac{(p+1)}{q}$

T l'idealiste de d. D. N. (1883) 177] essaye de démontrer la propriété IV, ayant admis comme nous avons vu l'infiniment petit (pag. 8), mais en démontrant que si $\lim \alpha_\nu = 0$, deviens indef. petit (relativ. à une série déc. conv. $\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_\nu}{10^\nu}$ $a_\nu = 0, 1, \ldots 9$) il y a bien des autres éléments distincts de N_∞, hors du champ de variabilité de N et N_1, ce qui équivaut à admettre l'hypothèse de la limite.

xx) Voyez la note de la lettre div. à M. Stolz pag. 8.

T

Donc :

a) Il y a des systèmes de grandeurs qui satisfont aux principes I – V du continu sans être soumis à l'axiome d'Archimède qui donne le continu ordinaire.

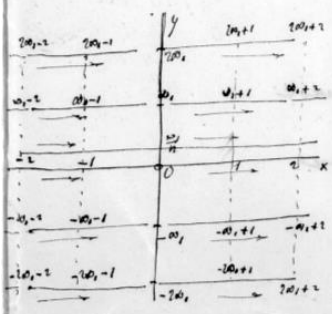
Cette propriété m'a conduit à traiter la géométrie indépendamment de l'axiome susdit – *)

*) Voyez Vla note m/s à pag. 6.

Je n'entre pas dans cette question, car j'ai déjà trop abusé de votre bonté !)

10 Je vous dirai encore deux mots seulement sur une représentation géométrique dans le champ ordinaire d'Euclide d'une partie du continu absolu, et sur la projectivité absolue.

Considérons nous d'abord le champ infini de 1re ordre par rapport à l'unité fondamentale, avec les échelles dans le sens opposé à partir de l'origine fondamentale 0. Les nombres de ce champ infini de 1re ordre se laissent ranger dans les séries $S_1^{(0)}\ S_1^{(1)} \ldots S_1^{(\infty_1)} \ldots$ / 14 mai 87. A chaque nombre $\frac{\alpha_1}{n}$ correspond une série $S_1(\frac{\alpha_1}{n})$, et par conséquent à chaque nombre de la forme $\infty_1 (\frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p^2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{p^\nu} + \cdots)$ $(n = p^\nu \cdots \infty)$ nous correspond une série S_1, si l'on ne considère pas les infiniment petits par rapport à l'unité fondamentale, et en considérant seulement les intervalles ou nombres infinis de 1er ordre, on peut les faire correspondre à sens unique aux points $(x\,y)$ du plan ordinaire d'Euclide, en faisant correspondre les valeurs de y aux séries S_1, et les valeurs de x aux nombres ou intervalles des mêmes séries, les origines sont respectivement $0, \frac{\infty_1}{n}, \ldots \infty_1, \ldots 2\infty_1 \ldots$ on bien $\infty_1 (\frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p^2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{p^\nu})$. Pour employer aussi les valeurs négatives de y il faut considérer les séries S_1 qui correspondent aux nombres négatifs du continu fondamentale. Deux éléments indéfiniment voisins dans ce continu sont situés dans une série S_1; à deux tels éléments correspondent sur le plan deux points indéfiniment voisins, mais pas réciproquement, car à deux tels points du plans correspondent en général deux éléments situés sur deux séries S_1 indéfiniment voisines.



Dans la figure à côté, les parallèles à l'axe des x sont dirigées toutes dans le même sens et à partir de l'origine fondamentale 0, elles représentent les séries S_1, qui ont leurs origines sur l'axe y. Si nous nous imaginons toutes les parallèles comprises dans la partie plane limitée par les parallèles qui passent par 0 et ∞_1, jusqu'au point ∞_1, et dans le même sens, nous avons une représentation assez claire du champ infini du 1er ordre, en remarquant que ici

les parallèles sont situées l'une sur l'autre, tandis que les séries ξ_ν sont situées l'une après l'autre.
si nous nous imaginons l'intervalle $(0 \ldots \infty_1)$ condensé dans le segment $(0\,1)$, on a un contenu total de l'unité (01) primitive est un infiniment petit actuel.

nous avons donc par analogie:
si l'on ne tient pas compte des infiniments petits par rapport à l'unité fondamentale, tous les nombres du champ fini et infini d'ordre fini se peuvent être représentés à cette unique et dans le même ordre sur un système des parallèles dans un espace à n dimensions.

1. Projectivité générale

Soient donnés quatre points du contenu absolu, dont les distances de l'origine fondamentale sont resp. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$
La fonction $\frac{\xi_1-\xi_3}{\xi_2-\xi_3} \cdot \frac{\xi_2-\xi_4}{\xi_1-\xi_4} = a$
est le rapport anharmonique des quatre points. Si celui-ci a est donné, ξ_1, ξ_2, ξ_3 tout donnés nous pouvons calculer ξ_4, au moyen des quatre opérations fondamentales appliquées un nombre fini de fois; c'est à dire on a:

$$\xi_4 = \frac{\xi_3(a\xi_1 - \xi_2 + \xi_1\xi_2(1-a))}{\xi_3(a-1) + \xi_1 - \xi_2 a}$$

Pour mieux fixer les idées considérons nous seulement le groupe formé par les seuls nombres finis, infinis et infiniment petits d'ordre fini $(1)\ldots\nu\ldots)$. Puisque les opérations fondamentales sont à sens unique et lorsque varient les objets varient aussi les résultat, ainsi en variant ξ_3 varie aussi ξ_4.

Si $\xi_1\xi_1'$, $\xi_2\xi_2'$, $\xi_3\xi_3'$ sont trois couples de nombres correspondants, à un nombre ξ_4 correspondra un nombre déterminé et unique ξ_4', de manière que

$$\frac{\xi_1-\xi_3}{\xi_2-\xi_3} \cdot \frac{\xi_2-\xi_4}{\xi_1-\xi_4} = \frac{\xi_1'-\xi_3'}{\xi_2'-\xi_3'} \cdot \frac{\xi_2'-\xi_4'}{\xi_1'-\xi_4'}$$

l'equation de la projectivité est encore dans le cas ordinaire

$$\alpha\xi\xi' + \beta\xi + \gamma\xi' + \delta' = 0$$

C'est facile de voir aussi dans ce cas que la correspondance projective est continue, car on a $\xi' = -\frac{\beta\xi+\delta}{\alpha\xi+\gamma}$, $\xi_1' = -\frac{\beta(\xi+\varepsilon)+\delta}{\alpha(\xi+\varepsilon)+\gamma}$
la différence est $\frac{\beta\xi+\delta}{\alpha\xi+\gamma+\alpha\varepsilon} + \frac{\beta\varepsilon}{\alpha\xi+\delta+\alpha\varepsilon} - \frac{\beta\xi+\delta}{\alpha\xi+\gamma}$

qui, si ε devient plus petit de chaque nombre infiniment petit donné, a pour limite zéro. On a donc:

La propriété est indépendante de l'axiome d'Archimède.

12 Enfin je remarque que la somme d'un nombre infini des nombres entiers de (II) peut être un nombre qui n'appartient pas ~~sera représentée dans la classe~~ ou bien à la classe (I), tandis que la somme d'un nombre fini des nombres de (I) est toujours un nombre de (I).

Par ex:

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots+\omega_1-n+\cdots+\omega_1$$
$$= \frac{\omega_1(\omega_1+1)}{2} = \frac{\omega_1^2-\omega_1}{2}$$

c'est à dire c'est un nombre fractionnaire infini de 2ème ordre.

13 De ce qui précède résulte que les puissances finies d'un nombre de la classe (II) sont des nombres de (II); pour les nombre ω_1 nous a aussi dans cette classe les puissances infinies.

Le procès par ex 2^{ω_1} est tout-à-fait déterminé, c'est à dire:

$$2^{\omega_1} = (1+1)^{\omega_1} = 1+\omega_1+\frac{\omega_1(\omega_1-1)}{2}+\cdots+\frac{\omega_1(\omega_1-1)\cdots(\omega_1-m)}{1\,2\cdots m+1}+$$
$$+\cdots+\frac{\omega_1(\omega_1-1)\cdots(\omega_1-m)}{1\,2\cdots(m+1)}+\cdots+\frac{\omega_1(\omega_1-1)}{2}+\omega_1+1$$

Ce symbole se compose avec des nombres de cette classe entiers et fractionnaires, c'est un nombre qui n'a pas un ordre déterminé, mais on peut le supposer compris entre 1 et 3^{ω_1}, les symboles présentent de caractères différents, nommés précédents, mais je ne m'en suis pas occupé! —

Padoue 5 Juil. 1890

G. Vivanti.